

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

**Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable. II :
transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal
; recherche de la cohomologie de l'espace de base**

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 20, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A19_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1949-1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE RÉELLE D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE

II : transgression dans un groupe de Lie
 et dans un espace fibré principal ;
 recherche de la cohomologie de l'espace de base.
 (Exposés de H. CARTAN, le 23 mai et 19 juin 1950).

1.- Notations.

On renvoie à l'exposé 19 pour les notations $\mathcal{A}(G)$, $\mathcal{A}'(G)$, $A(G)$, $S(G)$, $W(G) = A(G) \otimes S(G)$ (algèbre de Weil du groupe de Lie G), ainsi que pour les notations des opérateurs $i(x)$, $\theta(x) = \theta_A(x) + \theta_S(x)$. L'opérateur différentiel δ de $W(G)$ est donné par les formules (9), (8), (10) et (11) de l'exposé 19. La graduation de l'algèbre $W(G)$ est celle qui attribue le degré $p+2q$ aux éléments de $A^p(G) \otimes S^q(G)$. On utilise la notation $I_A(G)$ pour désigner la sous-algèbre des éléments invariants de $A(G)$, et la notation $I_W(G)$ pour désigner la sous-algèbre des éléments invariants de $W(G)$.

L'algèbre différentielle graduée $A(G)$, munie de la différentielle d_A , possède une algèbre de cohomologie notée $H_A(G)$, ou simplement $H(G)$; lorsque G est un groupe compact (connexe), elle s'identifie à l'algèbre de cohomologie (réelle) de l'espace du groupe G .

2.- Cohomologie de l'algèbre de Weil.

Théorème 1.- L'algèbre de cohomologie de l'algèbre de Weil est triviale : $H^m(W(G))$ est nul pour tout degré $m \geq 1$ (pour $m = 0$, $H^0(W(G))$ s'identifie évidemment au corps des scalaires). De même, l'algèbre de cohomologie de la sous-algèbre $I_W(G)$ est triviale.

Démonstration : soit k l'antidérivation de $W(G)$, de degré -1 , nulle sur $A(G)$, et définie sur $S^1(G)$ par $k(\tilde{x}') = x'$ (c'est-à-dire kh est l'identité sur $A^1(G)$). L'opérateur k commute avec les $\theta(x)$, donc opère aussi dans la sous-algèbre $I_W(G)$.

$\delta k + k\delta$ est une dérivation, entièrement définie par ses valeurs sur $A^1(G)$ et $S^1(G)$; elle transforme chaque $x' \in A^1(G)$ en x' lui-même, et chaque $\tilde{x}' \in S^1(G)$ en $\tilde{x}' - d_A x'$. Soit u un élément homogène de degré m ($m \geq 1$) de $W(G)$; $\delta ku + k\delta u$ est homogène de degré m . Soit q le poids maximum des termes non nuls de u (on dit qu'un élément de $A^p(G) \otimes S^q(G)$ est

de poids q). Dans

$$v = u - \frac{1}{m-q} (\delta ku + k\delta u), \text{ tous les termes sont de poids}$$

$\leq q$, et le terme de poids q est nul. On a ainsi un processus qui fait passer de u à v en diminuant strictement le poids maximum ; en l'itérant, on arrivera à un élément nul.

Cela étant, supposons que u soit un cocycle de $W(G)$: $\delta u = 0$. Alors v est un cocycle homologue à u ; de proche en proche, on voit que u est le cobord d'un élément de $W(G)$; ceci démontre la première partie du théorème. De plus, si u est un cocycle invariant, le même processus montre que u est le cobord d'un élément invariant de $W(G)$, d'où la deuxième partie du théorème.

3.- L'application canonique $I_S^p(G) \longrightarrow I_A^{2p-1}(G)$.

Remarquons d'abord que les éléments de $I_A(G)$ sont des cocycles de $A(G)$, pour la différentielle d_A de $A(G)$, en vertu de la formule (4) de l'exposé 19, numéro 3, formule qui explicite d_A).

Soit u un élément de $I_S^p(G)$ ($p \geq 1$) ; c'est un cocycle de $I_W(G)$, donc d'après le théorème 1, il existe un élément $w \in I_W(G)$ tel que $\delta w = u$; le degré de w est $2p - 1$. L'application canonique de l'algèbre $W(G)$ sur son quotient $A(G)$ (cf. 19, bas de la page 8) transforme w en un élément invariant w_A de $A(G)$, c'est-à-dire en un élément de $I_A^{2p-1}(G)$. Cet élément w_A est indépendant du choix particulier de w tel que $\delta w = u$. En effet, supposons $\delta w' = \delta w$; alors, d'après le théorème 1, il existe un élément invariant v de $W(G)$, tel que $w' - w = \delta v$; en projetant $W(G)$ sur $A(G)$, on obtient la relation $w'_A - w_A = d_A v_A$, et puisque v_A est dans $I_A(G)$, on a $d_A v_A = 0$. C.Q.F.D.

En associant ainsi à chaque $u \in I_S^p(G)$ l'élément $w_A \in I_A^{2p-1}(G)$ comme ci-dessus, on définit une application linéaire canonique

$$f : I_S^p(G) \longrightarrow I_A^{2p-1}(G) \quad (p \geq 1).$$

Les éléments de l'image de cette application sont transgressifs ; on dit qu'un élément $a \in I_A^q(G)$ (pour un $q \geq 1$) est transgressif dans l'algèbre $I_W(G)$ s'il est la projection, dans $A(G)$, d'un élément $w \in I_W^q(G)$ dont le cobord δw soit dans $S(G)$, donc dans $I_S(G)$ (observons que si q est pair, $\delta w = 0$ pour des raisons de degré, donc w a la forme δv , et par suite $a = d_A v_A$, ce qui exige $a = 0$). Ainsi : tout élément transgressif non nul est de degré impair.

Les éléments transgressifs de $I_A(G)$ forment évidemment un sous-espace vectoriel $T_A(G)$; si on en prend une base homogène, et que pour chaque élément a de cette base on choisit un w comme ci-dessus (w s'appelle une "cochaîne de transgression"), la correspondance $a \rightarrow \delta w$ définit une application linéaire de $T_A(G)$ dans $I_S(G)$, qu'on appellera une transgression. Autre manière de définir une transgression τ : c'est une application linéaire de $T_A(G)$ dans $I_S(G)$ qui, suivie de l'application canonique ρ (cf. ci-dessus), donne l'automorphisme identique de $T_A(G)$.

4.- La transgression dans le cas d'une algèbre de Lie réductive.

On suppose désormais que l'algèbre de Lie $\mathcal{O}(G)$ est réductive, c'est-à-dire composée directe d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple ; c'est le cas, notamment, quand G est un groupe compact. Dans ce cas, on sait que toute classe de cohomologie de $A(G)$ contient un élément invariant et un seul ; autrement dit, l'algèbre de cohomologie de $H_A(G)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre $I_A(G)$. De plus (théorème de HOPF ; voir Thèse de Koszul, Bull. Soc. Math., 1950), l'algèbre $I_A(G)$ s'identifie à l'algèbre extérieure d'un sous-espace $P_A(G)$ bien déterminé de $I_A(G)$, engendré par des éléments homogènes de degrés impairs. Les éléments de $P_A(G)$ s'appellent primitifs ; un élément homogène est dit primitif s'il est orthogonal aux éléments décomposables de l'algèbre $J_A(G)$ des éléments invariants de l'algèbre extérieure de l'algèbre de Lie $\mathcal{O}(G)$ (dans une algèbre graduée, un élément est dit "décomposable" s'il est une somme de produits d'éléments de degrés strictement plus petits de cette même algèbre).

On peut prouver :

Théorème 2.- Si $\mathcal{O}(G)$ est réductive, les éléments transgressifs de $I_A(G)$ ne sont autres que les éléments primitifs. (sans démonstration ici).

Considérons alors une transgression $\tau : P_A^{2p-1}(G) \rightarrow I_S^p(G)$.

Elle transforme les éléments d'une base de $P_A(G)$ (en nombre total égal, d'après Hopf, au rang du groupe G) en éléments de $I_S(G)$; on peut montrer (Cartan, Koszul, Chevalley) que ces éléments engendrent l'algèbre $I_S(G)$ (pour la structure multiplicative) et qu'ils sont algébriquement indépendants. Conséquence : l'algèbre $I_S(G)$ a la structure d'une algèbre de polynômes dont le nombre des variables est égal au rang de G ; le nombre des générateurs de poids p est égal au nombre des éléments primitifs de $I_A(G)$, de degré $2p-1$, et linéairement indépendants. Ce résultat est le pendant du théorème de Hopf concernant la structure de $I_A(G)$.

5.- Transgression dans un espace fibré principal de groupe G .

Soit, avec les notations de 19, E l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré principal $\mathcal{E}$, de groupe G (groupe de Lie connexe, tel que $\mathcal{U}(G)$ soit réductive). Choisissons une connexion infinitésimale dans $\mathcal{E}$ (19, numéro 5) ; elle définit un homomorphisme $\bar{f}$ de $W(G)$ dans E . Si a est un cocycle invariant primitif, et w une cochaîne de transgression de a (cf. numéro 4 ci-dessus), $\bar{f}(w)$ est un élément de E (invariant par le groupe G) qui "induit" le cocycle a sur chaque fibre ; sa différentielle $d(\bar{f}(w)) = \bar{f}(\delta w)$ est l'élément de B (algèbre des formes différentielles de l'espace de base $\mathcal{B}$) que la connexion associe à l'élément δw de $I_S(G)$. Ainsi la différentielle de la forme de transgression est un cocycle de l'espace de base ; ayant fait choix une fois pour toutes d'une transgression dans $I_W(G)$, on obtient ainsi une application linéaire $P_A^{2p-1}(G) \longrightarrow B^{2p}$, dite transgression dans l'espace fibré, qui est composée des deux applications

$$P_A^{2p-1}(G) \longrightarrow I_S^p(G) \quad (\text{transgression dans le groupe}) \quad \text{et} \quad I_S^p(G) \longrightarrow B^{2p}$$

(homomorphisme défini par la connexion).

Supposons en outre que le groupe G soit compact : alors l'algèbre de cohomologie $H(E)$ de l'espace fibré s'identifie à l'algèbre de cohomologie $H(I_E)$ de la sous-algèbre des éléments invariants de E . D'après un théorème de Chevalley (non publié), $H(I_E)$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie du produit tensoriel $I_A(G) \otimes B$, muni de la différentielle D que voici : D est une antidérivation égale, sur B , à la différentielle de B , et définie, sur $P_A(G)$, par l'homomorphisme de transgression $P_A(G) \longrightarrow B$ (qui élève le degré d'une unité) ; cette antidérivation se prolonge à tout $I_A(G) \otimes B$, et son carré est nul.

On a ainsi, dans une certaine mesure, résolu le problème suivant : reconstituer la cohomologie de l'espace fibré à l'aide de l'algèbre B des formes différentielles de la base, et du groupe G ; il suffit pour cela de connaître l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow B$ défini par une connexion infinitésimale.

6.- Recherche de la cohomologie de l'espace de base.

On aborde le problème inverse : de la connaissance de la cohomologie de l'espace fibré, et de quelque chose en plus, déduire la cohomologie de l'espace de base.

Considérons le produit tensoriel d'algèbres graduées $E \otimes W(G)$: c'est une algèbre graduée. Définissons-y un opérateur différentiel $\bar{\delta}$, qui prolonge

l'opérateur d de E et l'opérateur δ de $W(G)$. Définissons aussi des opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ (pour $x \in \mathcal{U}(G)$) : ce seront des antidérivations (resp. dérivations) qui prolongent les opérateurs $i(x)$ (resp. $\theta(x)$) déjà définis sur E et sur $W(G)$. Alors les $i(x)$, les $\theta(x)$ et la différentielle $\bar{\delta}$ satisfont aux relations (1), (2), (3), de l'exposé 19, où d serait remplacé par $\bar{\delta}$.

On notera $\bar{B}$ la sous-algèbre des éléments basiques de $E \otimes W(G)$: éléments annulés par les $i(x)$ et les $\theta(x)$; elle est stable pour $\bar{\delta}$. B et $I_S(G)$ s'identifient à deux sous-algèbres de $\bar{B}$, ce qui définit deux homomorphismes canoniques

$$(1) \quad H(B) \longrightarrow H(\bar{B}) \quad \text{et} \quad I_S(G) \longrightarrow H(\bar{B}) .$$

Tout ceci vaut, plus généralement, dans le cadre algébrique suivant : E est une algèbre différentielle graduée munie d'opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) de 19 ; B est la sous-algèbre des éléments basiques de E .

Théorème 3.- S'il existe une connexion dans E (au sens algébrique, c'est-à-dire une application linéaire f de $A^1(G)$ dans E^1 , compatible avec les $i(x)$ et les $\theta(x)$; cf 19), l'homomorphisme $H(B) \longrightarrow H(\bar{B})$ est un isomorphisme sur.

(sans démonstration ici).

Par cet isomorphisme, l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow H(\bar{B})$ défini par (1) devient un homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow H(B)$, et on vérifie aisément que ce n'est autre chose que l'homomorphisme défini par la connexion (19, numéro 7). Il est donc prouvé que ce dernier est indépendant de la connexion; c'est un invariant de la structure fibrée.

7.- Etude de l'algèbre différentielle $\bar{B}$.

Supposent désormais qu'il existe une connexion dans E , nous savons, par le théorème 3, que l'algèbre de cohomologie $H(B)$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie de l'algèbre différentielle $\bar{B}$. Supposons de plus que l'homomorphisme $H(I_E) \longrightarrow H(E)$ de la cohomologie de la sous-algèbre des éléments invariants de E dans la cohomologie de E soit un isomorphisme sur; c'est notamment le cas lorsque E est l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré principal de groupe G , et que G est compact (connexe); c'est aussi le cas si E est un espace vectoriel de dimension finie et que l'algèbre de Lie $\mathcal{U}(G)$ est réductive.

Alors la projection de $E \otimes W(G)$ sur son quotient E applique la sous-algèbre $\bar{B}$ ^(dans) la sous-algèbre I_E des éléments invariants de E ; on obtient ainsi un homomorphisme $\bar{B} \longrightarrow I_E$ compatible avec les opérateurs différentiels, d'où un homomorphisme $H(\bar{B}) \longrightarrow H(I_E)$. Il est clair que par identification de $H(\bar{B})$ avec $H(B)$, et de $H(I_E)$ avec $H(E)$, cet homomorphisme n'est autre que l'homomorphisme canonique $H(B) \longrightarrow H(E)$.

Pour donner une autre interprétation de $\bar{B}$, cherchons d'abord les éléments de $E \otimes A(G) \otimes S(G)$ annulés par les $i(x)$; ce sont les éléments de $F \otimes S(G)$, où F désigne la sous-algèbre des éléments de $E \otimes A(G)$ annulés par les $i(x)$. Alors (opérateur différentiel mis à part) $\bar{B}$ s'identifie à la sous-algèbre des éléments invariants de $F \otimes S(G)$. Or l'homomorphisme canonique de $E \otimes A(G)$ sur son quotient E (par l'idéal engendré par les éléments de degrés ≥ 1 de $A(G)$) applique biunivoquement la sous-algèbre F sur E ; et cette application de F sur E est compatible avec les $\theta(x)$. On en déduit un isomorphisme de $F \otimes S(G)$ sur $E \otimes S(G)$, qui applique la sous-algèbre des éléments invariants de $F \otimes S(G)$ sur la sous-algèbre des éléments invariants de $E \otimes S(G)$. Ainsi $\bar{B}$ s'identifie canoniquement à la sous-algèbre C des éléments invariants de $E \otimes S(G)$. Reste à expliciter la différentielle Δ que l'on obtient en transportant à C la différentielle de $\bar{B}$; on trouve que c'est l'antidérivation induite sur C par la différence $d - h$ des deux antidérivations d et h de $E \otimes S(G)$ définies comme suit :

d prolonge à $E \otimes S(G)$ la différentielle d de E , et est nulle sur $S(G)$;

h , nulle sur $S(G)$, est donnée par $h = \sum_k i(x_k) e(\tilde{x}'_k)$ (où (x_k) et (x'_k) désignent deux bases duales de $\mathcal{U}(G)$ et de $A^1(G)$) ; cet opérateur h généralise celui défini dans l'algèbre de Weil $A(G) \otimes S(G)$ (cf. formule (8) de 19).

Noter que le carré de $d-h$ n'est pas nul, en général, sur $E \otimes S(G)$; mais sa restriction Δ à C a un carré nul.

Résumons :

Théorème 4. - L'algèbre de cohomologie $H(B)$ de la sous-algèbre B des éléments basiques de E s'identifie canoniquement (s'il existe une connexion dans E) à l'algèbre de cohomologie de la sous-algèbre C des éléments invariants de $E \otimes S(G)$, C étant munie de la différentielle Δ définie ci-dessus. En outre, l'application canonique de $E \otimes S(G)$ sur son quotient E applique $\bar{C}$ sur la sous-algèbre I_E des éléments invariants de E , et l'homomorphisme

$H(C) \longrightarrow H(I_E)$ qu'on en déduit n'est autre que l'homomorphisme canonique $H(B) \longrightarrow H(E)$. (On a fait les hypothèses nécessaires pour que $H(I_E) \longrightarrow H(E)$ soit un isomorphisme sur).

8.- Utilisation de la théorie de Hirsch-Koszul.

La théorie de Hirsch (Comptes Rendus, décembre 1948, t. 227, p. 1328) mise au point par Koszul (non encore publié) permet, dans le cas de l'algèbre différentielle C , de prouver ceci :

Théorème 5.- Il existe une application linéaire biunivoque φ (non déterminée de manière unique) de l'espace vectoriel gradué $H(E) \otimes I_S(G)$ sur un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel gradué C , qui conserve les degrés et possède les propriétés suivantes :

- 1) sur $I_S(G)$, φ se réduit à l'application identique (on identifie canoniquement $I_S(G)$ à un sous-espace de $H(E) \otimes I_S(G)$, et à un sous-espace de C);
- 2) φ applique chaque élément $\alpha \otimes 1$ de $H(E) \otimes 1$ sur un élément de C dont l'image canonique dans I_E est un cocycle de la classe de α ;
- 3) l'image de $H(E) \otimes I_S(G)$ par φ est stable pour Δ ,

Ces propriétés entraînent alors que l'image de $H(E) \otimes I_S(G)$ dans C est un sous-espace dont la cohomologie s'identifie à celle de C ; par transport de structure (en identifiant $H(E) \otimes I_S(G)$ à son image dans C par φ), on obtient sur $H(E) \otimes I_S(G)$ un opérateur cobord (dédit de Δ) de carré nul, et l'espace de cohomologie de $H(E) \otimes I_S(G)$, pour ce cobord, est isomorphe à l'espace vectoriel $H(B)$ (en général, on perd la structure multiplicative).
Mieux : l'isomorphisme de $H(H(E) \otimes I_S(G))$ sur $H(B)$ est compatible avec les homomorphismes

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(H(E) \times I_S(G)) & & \\ & \nearrow & \updownarrow & \searrow & \\ I_S(G) & & H(B) & & H(E) \end{array}$$

Application : nouvelle interprétation des "classes caractéristiques" (cf. fin du numéro 7 de 19). Soit $\mathcal{E}$ un espace fibré principal de groupe G , tel que ses groupes d'homotopie $\pi_m(\mathcal{E})$ soient nuls pour $0 \leq m \leq N$. On sait (exposé 8, théorème 6) que, pour tout espace de base $\mathcal{B}'$, les structures fibrées principales de groupe G , de base $\mathcal{B}'$, correspondent biunivoquement aux classes d'applications de $\mathcal{B}'$ dans l'espace de base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$, pourvu que la dimension de $\mathcal{B}'$ soit $\leq N$; on dit que l'espace fibré $\mathcal{E}$ est classifiant pour la dimension N . Chaque structure fibrée de base $\mathcal{B}'$ définit alors un homomorphisme de

$H^m(\mathcal{B})$ dans $H^m(\mathcal{B}')$ ($m \leq N$). En composant les 2 homomorphismes

$$I_S(G) \longrightarrow H(\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad H(\mathcal{B}) \longrightarrow H(\mathcal{B}'),$$

on obtient évidemment l'homomorphisme canonique de $I_S(G)$ dans $H(\mathcal{B}')$. Or je dis que le premier homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow H(\mathcal{B})$ est un isomorphisme sur, pour toutes les valeurs du degré $\leq N$. En effet, $H^m(\mathcal{E})$ est nul pour $1 \leq m \leq N$, en vertu de l'hypothèse faite sur les groupes d'homotopie de $\mathcal{E}$; l'assertion résulte alors aussitôt du théorème 5. Ceci prouve deux choses : 1° les groupes de cohomologie $H^m(\mathcal{B})$ de la base d'un espace classifiant pour la dimension N , sont nuls pour tous les degrés impairs $\leq N$; 2° si on identifie $I_S^p(G)$ à $H^{2p}(\mathcal{B})$ pour tous les p tels que $2p \leq N$, l'homomorphisme $H^m(\mathcal{B}) \longrightarrow H^m(\mathcal{B}')$ défini par l'espace classifiant $\mathcal{E}$ pour les dimensions $m \leq N$, s'identifie à l'homomorphisme caractéristique défini à la fin du numéro 7 de l'exposé 19. Ceci précise le rôle d'"algèbre universelle" de l'algèbre de Weil (cf. numéro 8 de 19).

9.- La cohomologie des espaces homogènes.

Soit G un groupe de Lie compact et connexe, g un sous-groupe fermé connexe de G ; on notera G/g l'espace homogène, quotient de G par g (espace des classes à gauche suivant g); le groupe G opère à gauche dans G/g . Ici, c'est G qui est l'espace fibré principal (noté $\mathcal{E}$ auparavant), g est le groupe structural (noté G auparavant), G/g est l'espace de base (noté $\mathcal{B}$ auparavant).

Prenons pour E l'algèbre différentielle $A(G)$ des formes différentielles de l'espace G , invariantes à gauche; les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ (pour $x \in \mathcal{U}(g)$) y sont définis. La sous-algèbre B des éléments basiques de E s'identifie alors à l'algèbre des formes différentielles de l'espace G/g , invariantes à gauche par G . On sait que l'algèbre de cohomologie de B s'identifie à l'algèbre de cohomologie de l'espace homogène G/g ; nous la noterons $H(G/g)$.

Pour pouvoir appliquer la théorie précédente, on doit s'assurer de l'existence d'une "connexion" dans l'algèbre $E = A(G)$, c'est-à-dire d'une application linéaire f de $A^1(g)$ dans $A^1(G)$, compatible avec les $i(x)$ et les $\theta(x)$ relatifs aux $x \in \mathcal{U}(g)$. Une telle connexion est définie par un projecteur de l'algèbre de Lie $\mathcal{U}(G)$ sur la sous-algèbre $\mathcal{U}(g)$, compatible avec les $\theta(x)$; autrement dit, par un sous-espace de $\mathcal{U}(G)$, supplémentaire de

$\mathcal{U}(g)$, et invariant par g . Or l'existence d'un tel sous-espace est assurée parce que g est une sous-algèbre réductive de $\mathcal{U}(G)$ (cf. Thèse de Koszul, paragraphe 9, p. 86).

Ici, l'algèbre C est celle des éléments g -invariants de $A(G) \otimes S(g)$. Nous la noterons C_g . Son algèbre de cohomologie s'identifie canoniquement à l'algèbre cherchée $H(G/g)$, d'après le théorème 4. Ici, on va pouvoir compléter le théorème 5, en astreignant l'isomorphisme φ de ce théorème à être multiplicatif. En effet, le produit tensoriel $H(E) \otimes I_S(G)$ de ce théorème est ici $I_A(G) \otimes I_S(g)$; pour définir l'application φ de $I_A(G) \otimes I_S(g)$ dans C_g , prenons d'abord pour φ l'application identique sur $I_S(g)$; pour définir φ partout, il suffira de définir φ sur le sous-espace $P_A(G)$ des éléments primitifs de $I_A(G)$, identifié à un sous-espace de $I_A(G) \otimes I_S(g)$, et ensuite on prolongera multiplicativement. Pour cela, remarquons que tout élément de $P_A(G)$ est transgressif dans l'algèbre C_g ; en effet, considérons l'homomorphisme canonique

$$A(G) \otimes S(G) \longrightarrow A(G) \otimes S(g) \text{ défini par } S(G) \longrightarrow S(g);$$

il applique la sous-algèbre $I_W(G)$ des éléments G -invariants de $A(G) \otimes S(G) = W(G)$ dans la sous-algèbre C_g des éléments g -invariants de $A(G) \otimes S(g)$, et cette application (multiplicative) est compatible avec les différentielles Δ_G et Δ_g de ces sous-algèbres, telles qu'elles ont été définies à la fin du numéro 7 (juste avant le théorème 4). D'ailleurs Δ_G n'est autre, au signe près, que la différentielle induite par celle de l'algèbre de Weil $W(G)$; or tout élément de $P_A(G)$ est transgressif dans $I_W(G)$, comme on l'a vu au numéro 4. L'image, dans C_g , d'une cochaîne de transgression pour $a \in I_A(G)$, sera une cochaîne de transgression dans C_g , et c'est cette cochaîne que nous prendrons comme $\varphi(a)$. Ceci achève de préciser comment on choisit l'homomorphisme φ du théorème 4.

Ainsi, l'algèbre $I_A(G) \otimes I_S(g)$ peut être identifiée à une sous-algèbre de C_g , engendrée par $I_S(g)$ et des cochaînes de transgression. Si on transporte à $I_A(G) \otimes I_S(g)$ la différentielle de C_g ,
 , on trouve sur l'algèbre $I_A(G) \otimes I_S(g)$ la différentielle que voici : elle est nulle sur $I_S(g)$, et, sur le sous-espace $P_A(G)$ des éléments primitifs de $I_A(G)$, sa valeur s'obtient en composant une transgression $P_A(G) \longrightarrow I_S(G)$ et l'homomorphisme canonique $I_S(G) \longrightarrow I_S(g)$. Bien entendu, la transgression n'est pas déterminée de manière unique. Résumons les résultats obtenus :

Théorème 6. - Faisons choix d'une transgression dans le groupe G : c'est une application linéaire τ de $P_A(G)$ dans $I_S(G)$, qui applique $P_A^{2p-1}(G)$ dans $I_S^p(G)$. Composons τ avec l'application canonique de $I_S(G)$ dans $I_S(g)$; on obtient une application linéaire de $P_A(G)$ dans $I_S(g)$, qu'on prolonge en une antidérivation de l'algèbre $I_A(G) \otimes I_S(g)$, nulle sur $I_S(g)$. On obtient une différentielle δ de degré +1. Alors l'algèbre de cohomologie de $I_A(G) \otimes I_S(g)$, pour δ , est isomorphe à l'algèbre de cohomologie $H(G/g)$ de l'espace homogène G/g , par un isomorphisme qui satisfait au diagramme de compatibilité

$$\begin{array}{ccccc} & & H(I_A(G) \otimes I_S(g)) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ I_S(g) & & & & I_A(G) = H(G) \\ & \searrow & \updownarrow & \nearrow & \\ & & H(G/g) & & \end{array}$$

Corollaire : l'algèbre de cohomologie $H(G/g)$ est entièrement déterminée (à un isomorphisme près, compatible avec les homomorphismes $I_S(g) \rightarrow H(G/g)$ et $H(G/g) \rightarrow H(G)$) par la connaissance de l'homomorphisme $I_S(G) \rightarrow I_S(g)$, qui caractérise ainsi la "position homologique" du sous-groupe g dans le groupe G .

Toute étude plus approfondie de $H(G/g)$ revient donc à une étude de l'homomorphisme de l'algèbre $I_S(G)$ (algèbre de polynômes dont le nombre des variables est le rang de G) dans l'algèbre $I_S(g)$ (algèbre de polynômes dont le nombre des variables est le rang de g).

10.- Quelques résultats relatifs à $H(G/g)$

Nous énoncerons, sans démonstration, quelques-uns des résultats que l'on peut déduire du théorème 6.

Notons $I_S^+(g)$ (resp. $I_S^+(G)$) l'idéal des éléments de degrés > 0 dans $I_S(g)$ (resp. $I_S(G)$). Alors :

Le noyau de l'homomorphisme $I_S(g) \rightarrow H(G/g)$ est l'idéal J engendré dans $I_S(g)$ par l'image de $I_S^+(G)$. Donc : la sous-algèbre caractéristique de $H(G/g)$ (formée des "classes caractéristiques") s'identifie canoniquement à l'algèbre $I_S(g)/J$, quotient de l'algèbre $I_S(g)$ par l'idéal J . Les éléments de la sous-algèbre caractéristique sont de degrés pairs.

L'image $H_g(G)$ de $H(G/g)$ dans $H(G)$ est une sous-algèbre engendrée par un sous-espace $P'(G)$ de l'espace $P(G)$ des éléments primitifs de $H(G)$ (théorème de SAMELSON : Annals of Math., 42, 1941, Satz V). On obtient $P'(G)$ de la façon suivante : la transgression choisie τ applique biunivoquement

$P(G)$ sur un sous-espace V de $I_S(G)$, lequel s'applique sur un sous-espace V' de $I_S(g)$ par l'homomorphisme canonique $I_S(G) \longrightarrow I_S(g)$. Soit J' l'idéal de $I_S(g)$, formé des combinaisons linéaires d'éléments de V' à coefficients dans $I_S^+(g)$; J' est indépendant du choix de $\mathcal{V}$. Alors $P'(G)$ est le sous-espace formé des éléments de $P(G)$ que la différentielle $\mathcal{S}$ applique dans J' . La dimension de $P'(G)$ est au plus égale à la différence des rangs $r(G)$ et $r(g)$ des groupes G et g .

L'image de $I_S^+(g)$ dans $H(G/g)$ est toujours contenue dans le noyau de l'homomorphisme $H(G/g) \longrightarrow H(G)$. Pour que ce noyau soit exactement l'idéal engendré par les éléments de degré > 0 de la sous-algèbre caractéristique de $H(G/g)$, il faut et il suffit que

$$(3) \quad \dim P'(G) = r(G) - r(g) .$$

La condition (3) est trivialement vérifiée si $r(g) = r(G)$. Elle est aussi vérifiée si l'espace G/g est symétrique (au sens de E. Cartan). La condition (3) est aussi nécessaire et suffisante pour que $H(G/g)$ s'identifie au produit tensoriel d'algèbres $(I_S(g)/J) \otimes H_g(G)$. On peut alors déterminer le "polynôme de Poincaré" de $H(G/g)$ à l'aide de ceux de $H(G)$ et $H(g)$, pourvu que l'on connaisse les degrés des éléments primitifs qui engendrent $P'(G)$.

Lorsque $\dim P'(G) < r(G) - r(g)$, l'algèbre $H(G/g)$ est encore isomorphe à un produit tensoriel $K \otimes H_g(G)$, mais K contient, outre la sous-algèbre caractéristique, des générateurs de degré impair. On connaît des cas où $P'(G)$ est réduit à 0, bien que $r(g) < r(G)$.
