

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

WEN-TSÜN WU

Les classes caractéristiques d'un espace fibré. II

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 18, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A17_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1949-1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES D'UN ESPACE FIBRÉ, II.

(Exposé de WU WEN-TSÜN, le 8.5.1950)

1.- Classe de Steenrod d'un espace fibré.

Soit E un espace fibré localement trivial sur une base B connexe par arcs, avec projection p . Pour la fibre F nous supposons une fois pour toutes :

$$(1) \quad \pi_0(F) = \dots = \pi_{h-1}(F) = 0, \quad \pi_h(F) \neq 0, \quad \pi_1(F) \text{ abélien pour } h=1.$$

[cf. exposé 3. $\pi_0(F)$ = groupe d'homologie de F des cycles entiers de dimension 0 avec somme de coefficients nulle ; $\pi_0(F) = 0$ signifie que F est connexe.] Dans ces conditions la fibre est toujours simple dans la dimension h , au sens d'Eilenberg.

Considérons un lacet ℓ commencé et fini au point $x \in B$, dans un ouvert U assez petit pour que E soit trivial sur U . Il existe alors une projection q_U de cette partie de E sur U sur la fibre F_x . Une déformation de F_x au-dessus de ℓ à F_x déforme au même temps une sphère S_x dans F_x dans une sphère S'_x dans F_x . La projection q_U projette cette déformation suivant une déformation dans F_x de S_x à S'_x ; donc S_x et S'_x définissent le même élément du groupe d'homotopie de F_x . Il en résulte que, étant donné un chemin quelconque $\ell = \widehat{xy}$ dans la base B , on obtient un isomorphisme bien déterminé h_ℓ de $\pi_h(F_x)$ sur $\pi_h(F_y)$ en déformant la fibre F_x au-dessus de ℓ dans la fibre F_y . Cet isomorphisme h_ℓ ne dépende que de la classe d'homotopie de ℓ et de plus, $h_\ell h_{\ell'} = h_{\ell'\ell}$ pour $\ell = \widehat{xy}$ et $\ell' = \widehat{yz}$. Il en résulte que le système de groupes $\pi_h(F_x)$ et le système d'isomorphismes h_ℓ forment un système de groupes locaux dans B , soit $\mathcal{G}(E)$ ou \mathcal{G} (Exposé X de 1948-49).

Supposons que la base B soit un polyèdre avec une subdivision K , dont le bord de chaque cellule est topologiquement une sphère. Dans chaque cellule σ prenons un point représentatif $o(\sigma)$ (arbitraire mais fixe une fois pour toutes). L'isomorphisme $h_\ell : \pi_h(F_{o(\sigma)}) \longrightarrow \pi_h(F_{o(\sigma')})$, $\sigma' < \sigma$, est alors indépendant du chemin $\ell = o(\sigma) \widehat{o(\sigma')}$ choisi dans σ tel qu'on peut le désigner par $h_{\sigma, \sigma'}$. Par rapport au système \mathcal{G}_K de groupes $\pi_h(F_{o(\sigma)})$ et d'isomorphismes $h_{\sigma, \sigma'}$ définissons des cochaînes u^r de dimension r comme des fonctions sur σ^r avec $u^r(\sigma^r) \in \pi_h(F_{o(\sigma^r)})$ et l'opérateur de cobord par

$$\delta u^r(\sigma^{r+1}) = \sum_{(\sigma^r)} [\sigma^r : \sigma^{r+1}] h_{\sigma^r \sigma^{r+1}}(u^r(\sigma^r)),$$

où $[\sigma : \sigma']$ est le coefficient d'incidence de σ et σ' orientés. On a $\delta\delta = 0$ tel qu'on peut définir comme d'habitude les groupes de cohomologie $H^r(K, \mathcal{G}_K)$.

Une application φ d'une partie B' de B dans E est appelée une section dans E sur B' si $p\varphi = \text{identité}$. Deux sections φ_0 et φ_1 sur B' sont F -homotopes s'il existe une application φ de $B' \times I$ dans E telle que

$$\varphi_0(x) = \varphi(x \times 0), \quad \varphi_1(x) = \varphi(x \times 1) \quad \text{et} \quad \varphi(x \times t) \in F_x, \quad \text{pour } x \in B', t \in I.$$

Sous la condition (1) on peut alors démontrer, comme dans l'exposé 8 (théorème 5) :

Proposition 1. - (a) Il existe des sections dans E au-dessus du squelette K^h de K , de dimension h ; (b) Pour deux sections φ_0 et φ_1 sur K^h on peut trouver des sections φ'_0 et φ'_1 sur K^h , F -homotopes à φ_0 et φ_1 respectivement, telles que $\varphi_0 \equiv \varphi'_1 / K^{h-1}$.

Cela étant, considérons une section φ quelconque sur K^h . Pour chaque cellule orientée σ de dimension $h+1$ l'application $q_\sigma \varphi : \partial\sigma \rightarrow F_{o(\sigma)}$ définit un élément $c_\varphi^{h+1}(\sigma)$ de $\pi_h(F_{o(\sigma)})$. (cf. exposé III, 2e partie). On obtient ainsi une cochaîne c_φ^{h+1} par rapport à \mathcal{G}_K . D'après cette définition, $c_\varphi^{h+1} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une extension de section φ sur K^{h+1} . De plus, si φ est F -homotope à une section φ' sur K^h , on a $c_\varphi^{h+1} = c_{\varphi'}^{h+1}$.

Soient φ_0 et φ_1 deux sections sur K^h ; d'après la proposition 1 (b), elles sont homotopes respectivement aux sections φ'_0 et φ'_1 sur K^h , où $\varphi'_0 \equiv \varphi'_1 / K^{h-1}$. Pour chaque cellule orientée σ^h , les applications $q_{\sigma^h} \varphi'_0$ et $q_{\sigma^h} \varphi'_1$ de σ^h dans $F_{o(\sigma^h)}$ qui coïncident sur $\partial\sigma^h$ définissent alors un élément $c_{\varphi'_0, \varphi'_1}^h(\sigma^h)$ de $\pi_h(F_{o(\sigma^h)})$ (cf. Exp. 3). On obtient ainsi une cochaîne c^h par rapport au \mathcal{G}_K .

Lemme : Si δ est l'opérateur de cobord du système \mathcal{G}_K , on a

$$\delta c_\varphi^{h+1} = 0, \quad \delta c_{\varphi'_0, \varphi'_1}^h = c_{\varphi'_0}^{h+1} - c_{\varphi'_1}^{h+1}. \quad (\text{cf. 3, lemme 3}).$$

De plus, étant données φ et $c^{h+1} \in C^{h+1}(K, \mathcal{G}_K)$ homologue à c_φ^{h+1} , on peut trouver une section φ' sur K^h telle que $c_{\varphi'}^{h+1} = c^{h+1}$.

Pour le démontrer, considérons une cellule σ^{h+2} quelconque et soit L le complexe $\{\sigma^{h+2}\}$. L'obstruction de l'application $q_{\sigma^{h+2}} \varphi : L^h \rightarrow F_{o(\sigma^{h+2})}$ est alors une cochaîne c^{-h+1} dans L qui prend ses valeurs dans $\pi_h(F_{o(\sigma^{h+2})})$.

La restriction du système \mathcal{G}_K au complexe L étant un système "simple" dans L , la restriction de c_φ^{h+1} à L correspond à une cochaîne ordinaire dans L , qui n'est autre que la cochaîne \bar{c}^{-h+1} . Par conséquent on a

$\delta c_\varphi^{h+1}(\sigma^{-h+2}) = \bar{\delta} \bar{c}^{-h+1}(\sigma^{-h+2})$, où $\bar{\delta}$ est l'opérateur de cobord dans L au sens ordinaire. D'après l'exposé 3 ("théorie d'Eilenberg"), \bar{c}^{-h+1} est un cocycle (ordinaire) dans L , par conséquent $\bar{\delta} \bar{c}^{-h+1}(\sigma^{-h+2}) = 0$. La cellule σ^{-h+2} étant quelconque, on a $\hat{\delta} c_\varphi^{h+1} = 0$. L'autre formule du lemme est démontrée de la même façon.

Du lemme précédent on déduit ainsi :

Théorème 1. - (Steenrod.) Les cochaînes c_φ^{h+1} sont des cocycles par rapport au système \mathcal{G}_K (cocycles d'obstruction) dont la classe $C^{h+1} \in H^{h+1}(K, \mathcal{G}_K)$ est indépendante de la section φ sur K^h . La condition $C^{h+1} = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section au-dessus de K^{h+1} .

Pour l'invariance topologique de C^{h+1} ainsi que la définition de classe de Steenrod dans le cas où la base B est un espace quelconque cf. [2]. Tout ce qui est dit dans cet exposé s'étend alors aux espaces fibrés sur une base quelconque. Cela étant, on a

Théorème 2. - Si f^*E est l'image réciproque sur B' de l'espace fibré E sur B par une application $f: B' \rightarrow B$, on a $C^{h+1}(f^*E) = f^*C^{h+1}(E)$.

2.- Classes de Stiefel-Whitney d'un espace fibré en sphères.

Considérons maintenant le cas particulier où la fibre est une sphère S de dimension $n-1$, le groupe structural étant le groupe orthogonal $O(n)$. On peut alors parler de deux points orthogonaux sur la même fibre S . A l'espace fibré donné E on peut associer un système d'espaces fibrés $E^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ ($E^{(n)} = E$), ayant pour fibres :

$V_{n-k+1, n}$ = variété de Stiefel des suites de $(n-k+1)$ -vecteurs orthonormés dans \mathbb{R}^n ($V_{n, n} = O(n)$).

On a $\pi_i(V_{n-k+1, n}) = 0$, $0 < i < k-1$;

$$\pi_{k-1}(V_{n-k+1, n}) \approx \begin{cases} Z_0, & k \text{ impair ou } k = n \\ Z_2, & k \text{ pair } \neq n. \end{cases}$$

En tous cas la classe de Steenrod de $E^{(k)}$ est bien définie, soit

$W^k \in H^k(B, \mathcal{G}^{(k)})$, où $\mathcal{G}^{(k)} = \{ \pi_{k-1}(V_{n-k+1, n, (x)}) , h_\ell^{(k)} \}$. Cette classe est appelée la classe de Stiefel-Whitney de dimension k de l'espace fibré E ,

$k = 1, \dots, n$. Remarquons que le groupe structural $O(n)$ ne joue aucun rôle dans la définition de W^n mais est essentiel pour définir les autres W^k .

Les homomorphismes canoniques de $\pi_{k-1}(V_{n-k+1, n}) (\approx Z_0 \text{ ou } Z_2)$ sur Z_2 induisent d'une manière évidente des homomorphismes $\rho : H^1(B, \mathcal{G}^{(k)}) \rightarrow H^1(B, Z_2)$. Les classes ρW^k seront appelées les classes réduites de Stiefel-Whitney.

Les systèmes $\mathcal{G}^{(k)}$ pour k impair et $k = n$ sont isomorphes entre eux. En effet, ils sont tous isomorphes à un système (défini à un isomorphisme près) $\mathcal{Z} = \{Z_{0, (x)}, h_\ell\}$ défini de la manière suivante : Posons $Z_{0, (x)} = Z_0$; pour chaque point $x \in B$ prenons une orientation (arbitraire mais fixe une fois pour toutes) de la fibre sphère S_x ; pour $\ell = \widehat{xy}$, h_ℓ sera l'isomorphisme de $Z_{0, (x)}$ sur $Z_{0, (y)}$ qui applique l'élément $+1$ de $Z_{0, (x)}$ sur l'élément $+1$ ou -1 de $Z_{0, (y)}$ selon que, si l'on déforme la sphère S_x à la sphère S_y au-dessus de ℓ , les deux orientations de S_x et S_y vont coïncider ou non.

La remarque précédente donne une simplification pour l'étude des classes W^k lorsque B est un polyèdre avec une subdivision K avec coefficients d'incidence $[\sigma : \sigma']$: Considérons un complexe K' avec mêmes cellules que K mais des coefficients d'incidence éventuellement différents : $[\sigma : \sigma']' = \varepsilon [\sigma : \sigma']$, où $\varepsilon = +1$ ou -1 selon que h_ℓ applique l'élément $+1$ de $Z_{0, o(\sigma)}$ sur l'élément $+1$ ou -1 de $Z_{0, o(\sigma')}$, où ℓ est un arc dans $\bar{\sigma}$ ($\sigma' < \sigma$). Disons que K' est un complexe localement isomorphe à K . On peut alors considérer les classes $W^k(E)$ non comme des classes "locales" dans le complexe K , mais comme des classes "ordinaires" dans le complexe K' — C'est ce qu'a fait Whitney.

Théorème 3. — Pour k impair $2W^k = 0$.

Nous dirons que l'espace fibré E est orientable si les systèmes $\mathcal{G}^{(k)}$ sont simples, ou, intuitivement, si l'on peut orienter continûment les fibres sphères sur toute la base B . On a alors :

Théorème 4. — Une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace fibré soit orientable est que $\rho W^1(E) = 0$.

Dans le premier exposé nous avons introduit pour un espace fibré E de groupe structural $O(n)$ un système de classes mod 2, $W^k(E)$, $k = 1, \dots, n$, comme les images inverses des classes $W^k = \left\{ \underbrace{0 \dots 0}_{n-k} \underbrace{1 \dots 1}_k \right\}$ de la var. gr. $G_{n, N}$. Dans le cas où la fibre est la sphère de dimension $n-1$, on peut

identifier ces classes avec les classes réduites de Stiefel-Whitney :

Théorème 5. - $\rho W^k(E) = \mathbb{W}^k(E)$, $k = 1, \dots, n$.

Ce théorème est dû à Pontrjagin. Nous indiquons sa démonstration comme suit : Considérons l'espace fibré \mathcal{E} , de base $G_{n,N}$ dont la fibre au-dessus d'un élément $X \in G_{n,N}$ est la sphère unité dans cet élément. Soient W^k les classes de Stiefel-Whitney de \mathcal{E} . D'après le théorème 2, il suffit de démontrer $\rho W^k = \left\{ \underbrace{0 \dots 0}_{n-k} \underbrace{1 \dots 1}_k \right\}$, $k = 1, \dots, n$. Pour cela prenons dans R^{N+n} un système de $n-k+1$ vecteurs orthonormés e_1, \dots, e_{n-k+1} . Pour chaque élément $X \in G_{n,N}$ soit x_i la projection orthogonale de e_i sur X . Les vecteurs x_i dans X sont linéairement dépendants si et seulement si $\dim(X \cap R^{N+k-1}) \geq k$, où R^{N+k-1} est l'élément orthogonal aux vecteurs e_i . D'après l'exposé précédent, les éléments X satisfaisant à cette condition forment une pseudo-variété $v_k = [\underbrace{N-1 \dots N-1}_k \underbrace{N \dots N}_{n-k}]^*$ de dimension $nN-k$ dont la classe de cohomologie duale est la classe \mathbb{W}^k . Pour X non $\in v_k$ on peut alors "orthonormaliser" les vecteurs x_i dans X tels qu'on obtienne un système Φ de $n-k+1$ sections orthonormées dans \mathcal{E} sur $G_{n,N} - v_k$. Prenons maintenant une subdivision simpliciale K' de $G_{n,N}$ telle que v_k soit un sous-complexe L' de K' . Soit K la subdivision duale de K' . Le système Φ définit dans K un cocycle d'obstruction $w^k \in W^k$. Ce qui reste à vérifier est alors que ρw^k est dual au cycle mod 2 porté par la pseudo-variété v_k .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] STEENROD, Annals of Math., 44 (1943) p.610-627.
- [2] STEENROD, Annals of Math., 43 (1942) p.116-131.
- [3] STIEFEL, Comm. Math. helvetici, 8 (1936) p.305-343.
- [4] WHITNEY, Proc. nat. Acad. Sci., U.S.A., 26 (1940) p.143-153 ; Michigan Lectures, (1941) p.114-126.
- [5] PONTRJAGIN, C.R.Acad. Sci., URSS, 35 (1942) p.34-37 (Théorème 3).