

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Opérateurs d'homotopie (suite) : subdivision barycentrique

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 8, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A8_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1948-1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS D'HOMOTOPIE (Suite) :
SUBDIVISION BARYCENTRIQUE.

(Exposé fait par H. CARTAN, le 22.1.1949).

1.- Subdivision barycentrique des simplexes affines.

Dans ce numéro, on suppose que l'espace topologique E est l'espace d'un simplexe euclidien, muni de sa structure affine. Dans le groupe $S(E)$ des chaînes singulières de E , soit $A(E)$ le sous-groupe (permis) des chaînes singulières affines, c'est-à-dire des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, de simplexes singuliers affines.

Chaque point s de E définit un endomorphisme k de $A(E)$, de degré $+1$, à savoir l'opérateur conique de sommet s (cf. exposé 7, paragraphe 6). L'opérateur d'homotopie h associé à k (cf. exposé 7, paragraphe 1) est nul sur les chaînes de dimension ≥ 1 , et transforme tout simplexe de dimension 0 (point de E) dans le point s . On a donc, pour toute chaîne x de dimension ≥ 1 ,

$$(1) \quad x = kd(x) + dk(x) . \quad (\text{on écrit ici } d \text{ au lieu de } \partial, \text{ pour des commodités typographiques}).$$

Nous allons définir, dans $A(E)$, un endom. permis u , appelé subdivision barycentrique, et qui sera un opérateur d'homotopie. Tout d'abord, pour tout simplexe affine x , soit k_x l'opérateur conique ayant pour sommet le barycentre de x . L'opérateur u est défini, par récurrence sur la dimension du simplexe x de $A(E)$, par :

$$(2) \quad \begin{cases} u(x) = x & \text{si } x \text{ est de dimension } 0 ; \\ u(x) = k_x u d(x) & \text{si } x \text{ est de dimension } p \geq 1 . \end{cases}$$

On voit, par récurrence sur la dimension, que le support de $u(x)$ est contenu dans le support de x ; mieux : $u(x)$ est somme de simplexes dont chacun a pour support l'enveloppe convexe du barycentre de x et du support d'un simplexe de la subdiv. barycentrique de dx .

Montrons que u est un endomorphisme permis. Tout d'abord, par récurrence, on voit que u est de degré 0 (c'est-à-dire : $u(x)$ a même dim. que x). Reste à montrer que $du = ud$; on va montrer que c'est vrai sur les chaînes de dimension p , par récurrence sur p . C'est trivial pour $p = 0$. supposons-le

vrai pour $p-1$, et soit x un simplexe de dim. p . Compte tenu de (2), on doit montrer que $dk_x ud(x) = ud(x)$, ou, en posant $ud(x) = y$, que

$$dk_x(y) = y \quad (y \text{ étant de dimension } p-1).$$

Or
$$dk_x(y) + k_x d(y) = y,$$

car, d'après (1), c'est vrai si y est de dim. ≥ 1 , et, si y est de dim. 0 (x de dim. 1), y est combinaison linéaire de simplexes de dim. 0 dont la somme des coeff. est nulle, d'où encore le résultat. Il reste donc à montrer que $k_x d(y) = 0$, ou, en revenant à la définition de y , que $k_x dud(x) = 0$; il suffit de montrer que $dud(x) = 0$. Or $du(dx) = ud(dx)$, puisque $du = ud$ pour les chaînes de dim. $p-1$, et d'autre part $ud(dx) = 0$, puisque $dd = 0$. Ceci achève la démonstration.

Pour montrer que u est un opérateur d'homotopie, on va définir, par récurrence sur la dimension, un opérateur w de degré $+1$, tel que, pour tout simplexe x ,

$$(3) \quad x - u(x) = wd(x) + dw(x).$$

Posons $w(x) = 0$ si x est de dimension 0; alors (3) est vérifié pour x de dimension 0. Supposons w défini pour les x de dimension $\leq p-1$, de manière que (3) ait lieu pour les x de dimension $\leq p-1$. Pour un simplexe x de dimension p , $wd(x)$ est déjà défini; posons pour un instant

$$x - u(x) - wd(x) = z.$$

On vérifie $dz = 0$ (comme dans l'exposé 7, paragraphe 7), d'où, d'après (1), $z = dk_x(z)$. Nous poserons

$$w(x) = k_x(z) = k_x(x - u(x) - wd(x));$$

alors la relation (3) est vérifiée pour le simplexe x de dimension p .
C.Q.F.D.

On observera que le support de $w(x)$ est contenu dans le support de x (par récurrence sur la dimension de x). L'opérateur w est canoniquement attaché à l'opérateur "subdivision barycentrique" u .

2.- Subdivision barycentrique dans le groupe des chaînes singulières.

E désigne désormais un espace topologique quelconque. En remontant à la définition des simplexes singuliers de E (applications continues de simplexes euclidiens), on voit que les opérateurs u et w , définis dans l'espace d'un simplexe euclidien, définissent des opérateurs u_E et w_E dans le groupe des

chaînes singulières $S(E)$. Ces opérateurs satisfont à

$$x - u_E(x) = w_E d(x) + dw_E(x) \text{ pour tout } x \in S(E),$$

ce qui exprime que u_E (qui est appelé subdivision barycentrique dans $S(E)$) est un opérateur d'homotopie. De plus, si f est une application continue de E dans un espace E' , et si $\bar{f}$ désigne l'homom. correspondant de $S(E)$ dans $S(E')$, on a

$$\bar{f} \circ u_E = u_{E'} \circ \bar{f}, \quad \bar{f} \circ w_E = w_{E'} \circ \bar{f}.$$

Si F est un sous-espace de E , $S(F)$ (sous-groupe de $S(E)$) est stable pour u_E et w_E . Donc u_E est opérateur d'homotopie dans $S(E)$, $S(F)$ et $S(E \bmod F)$. Son transposé u_E^* est opérateur d'homotopie dans $S^*(E)$, $S^*(F)$ et $S^*(E \bmod F)$, quel que soit le groupe $\mathcal{J}$ de coefficients.

Subdivision barycentrique itérée.— La n -ième itérée u^n (nous laissons désormais tomber l'indice E dans u_E) est opérateur d'homotopie, associé à $w_n = w(e+u+\dots+u^{n-1})$ (cf. exposé 7, paragraphe 5).

3.- Subdivision mixte.

Soit V un recouvrement de E , tel que tout point de E soit intérieur à au moins un ensemble de E (cf. exposé 6, paragraphe 2). Pour chaque simplexe singulier x de l'espace E , il existe un entier n tel que tous les simplexes de la subdivision $u^n(x)$ soient petits d'ordre V (cela résulte du fait qu'un simplexe euclidien est un espace compact). Désignons par $n(x)$ le plus petit des entiers n jouissant de cette propriété. Si x^i est une face de x (cf. exposé 5, paragraphe 1), on a $n(x^i) \leq n(x)$. Une fois les entiers $n(x)$ définis pour tous les simplexes singuliers, nous allons leur associer un opérateur d'homotopie de la façon suivante.

Partons de l'endomorphisme $w_V(x) = w_{n(x)}(x) = w(x+u(x)\dots+u^{n(x)-1}(x))$. C'est un endom. de $S(E)$ pour lequel tous les sous-groupes $S(F)$ (F sous-espace de E) sont stables. Cherchons l'opérateur d'homotopie associé à w_V :

$$dw_V(x) + w_V d(x) = dw_{n(x)}(x) + \sum_i (-1)^i w_{n(x^i)}(x^i).$$

Or, puisque u^n est l'opér. d'homot. associé à w_n , on a

$$dw_{n(x)}(x) = x - u^{n(x)}(x) - w_{n(x)} d(x), \text{ d'où}$$

$$dw_V(x) + w_V d(x) = x - u^{n(x)}(x) - \sum_i (-1)^i \left(\sum_{n(x^i) \leq p < n(x)} u^p(x^i) \right).$$

Ainsi l'opérateur d'homotopie u_V associé à w_V est

$$u_V(x) = u^{n(x)}(x) + \sum_i (-1)^i w(\sum_{n(x^i) \leq p < n(x)} u^p(x^i)) .$$

Cette formule montre que : 1°) $u_V(x)$ est une somme de simplexes petits d'ordre V ; 2°) si x est petit d'ordre V , on a $u_V(x) = x$. Donc u_V est un projecteur du groupe $S(E)$, qui applique $S(E)$ sur le sous-groupe $S_V(E)$ des chaînes singulières petites d'ordre V .

Appliquons le théorème 2 de l'exposé 7 (paragraphe 2). On voit que l'homomorphisme canonique des groupes d'homologie

$$H_V(E) \rightarrow H(E)$$

(où $H_V(E)$ désigne le groupe dérivé de $S_V(E)$) est un isomorphisme sur. Autrement dit, pour calculer le groupe d'homologie singulière, on peut substituer le groupe $S_V(E)$ des chaînes petites d'ordre V , au groupe $S(E)$ de toutes les chaînes, sans changer le résultat. De même pour l'homologie relative : $H_V(E \bmod F) \rightarrow H(E \bmod F)$ est un isomorphisme sur. De même aussi pour la cohomologie : soit $I_V^*(E)$ le sous-groupe (idéal) des cochaînes qui s'annulent sur tous les simplexes sing. petits d'ordre V , et posons $S_V^*(E) = S^*(E)/I_V^*(E)$; soit $H_V^*(E)$ le groupe dérivé de $S_V^*(E)$ (groupe de cohomologie des fonctions de simplexes petits d'ordre V). Alors l'homom. canonique $H^*(E) \rightarrow H_V^*(E)$ est un isomorphisme sur. C'est d'ailleurs un isom. pour les structures d'anneau, puisque c'est un homom. d'anneau.

4.- Application : supports en cohomologie singulière.

Le support d'une cochaîne singulière f se définit comme le support d'une cochaîne d'Alexander (exposé 6, paragraphe 3). Un point M n'appartient pas au support de f si f prend la valeur zéro sur tous les simplexes singuliers dont le support est contenu dans un voisinage convenable de M . On voit que les cochaînes de support vide sont celles qui appartiennent à la réunion de tous les I_V^* relatifs à tous les recouvrements ouverts V ; soit I^* cette réunion. On a un homomorphisme canonique du groupe de cohom. sing. $H^*(E)$ dans le groupe dérivé du quotient $S^*(E)/I^*(E)$ (i.e: groupe des cochaînes singulières dans lequel on néglige les cochaînes de support vide). Je dis que c'est un isomorphisme sur. En vertu de la suite exacte (cf. exposé 2, paragraphe 7), cela revient à montrer que le groupe dérivé de $I^*(E)$ est nul ; or cela résulte du fait que $I^*(E)$ est réunion de sous-groupes (à savoir les $I_V^*(E)$) dont chacun a un groupe dérivé nul, d'après la fin du paragraphe 3.

Le fait que la cohomologie singulière de E peut se calculer à partir du groupe $S^*(E)/I^*(E)$ entraîne qu'on peut définir un homomorphisme canonique du groupe de cohomologie de Čech-Alexander $\check{H}(E)$ dans le groupe de cohomologie singulière $H^*(E)$ relatif au même groupe de coefficients χ . En effet soit $C^*(E)$ le groupe des cochaînes simpliciales de l'ensemble E considéré comme complexe simplicial, et $\check{I}(E)$ le sous-groupe des cochaînes de support vide ; le groupe $\check{C}(E)$ des cochaînes d'Alexander est $C^*(E)/\check{I}(E)$ (cf. exposé 6, paragraphe 3). Or on a un homomorphisme naturel de $C^*(E)$ dans $S^*(E)$, à savoir le transposé de l'homom. qui, à un simplexe singulier, associe la suite de ses sommets. C'est un homom. permis, qui applique évidemment $\check{I}(E)$ dans $I^*(E)$; par passage au quotient, on obtient un homom. permis de $C^*(E)/\check{I}(E) = \check{C}(E)$ dans $S^*(E)/I^*(E)$. Il définit donc un homomorphisme des groupes dérivés, c'est-à-dire un homomorphisme du groupe de cohomologie $\check{H}(E)$ dans le groupe de cohomologie singulière $H^*(E)$.

En combinant cet homomorphisme avec l'accouplement entre homologie et cohomologie singulières, on obtient un accouplement entre homologie sing. et cohomologie de Čech-Alexander : application bilinéaire du produit de $H(E)$ et de $\check{H}(E, \chi)$ dans χ .

5.- Subdivision barycentrique dans le groupe des chaînes (resp. cochaînes) de deuxième espèce.

Pour la définition des chaînes (resp. cochaînes) singulières de deuxième espèce, voir exposé 5, paragraphe 6.

Les opérateurs u_V et w_V du présent paragraphe 3 étant définis pour les simplexes singuliers, se prolongent de manière évidente aux chaînes singulières de deuxième espèce. Dans le groupe $S(E)$ des chaînes de deux. espèce, u_V est un opérateur d'homotopie, et un projecteur qui applique $S(E)$ sur le sous-groupe $S_V(E)$ des chaînes petites d'ordre V . On en déduit un isomorphisme des groupes dérivés (groupe d'homologie singulière de deuxième espèce).

De là on déduit comme plus haut : si on fait le quotient du groupe des cochaînes de deuxième espèce par le sous-groupe des cochaînes de support vide, on ne change pas le groupe dérivé : groupe de cohom. sing. de deuxième espèce. Or le groupe-quotient des cochaînes s'identifie à un sous-groupe permis du groupe $S^*(E)/I^*(E)$ défini au paragraphe 4 : c'est le sous-groupe des classes de cochaînes dont le support est compact. D'où le nom de groupe de cohomologie compacte donné au groupe de cohomologie singulière de deuxième espèce.

L'homomorphisme canonique de $C^*(E)/\check{I}(E)$ dans $S^*(E)/I^*(E)$ (défini au

paragraphe 4) applique les éléments de support compact sur des éléments de support compact. D'où un homomorphisme canonique de la cohomologie de Čech-Alexander de deuxième espèce dans la cohomologie singulière de deuxième espèce.

Soit maintenant E un espace compact, et F un sous-espace fermé de E : on notera $E-F$ l'espace topologique (localement compact), complémentaire de F dans E . Nous allons indiquer une relation entre l'homologie singulière de deuxième espèce de l'espace $E-F$, et l'homologie singulière relative ; mais il ne s'agira pas exactement de l'homologie de $E \bmod F$, mais de quelque chose d'un peu plus compliqué. Définissons le groupe des chaînes singulières de deuxième espèce de E modulo F , noté $\tilde{S}(E \bmod F)$, comme la "limite projective" ("inverse limit") des groupes $S(E \bmod W)$ relatifs aux voisinages ouverts W du sous-ensemble fermé F . Le groupe dérivé de $\tilde{S}(E \bmod F)$ se notera $\mathcal{H}(E \bmod F)$ et s'appellera le groupe d'homologie sing. de deuxième espèce de $E \bmod F$.

Précisons cette notion de limite projective. L'ensemble des W est un ensemble filtrant décroissant ; si $W_1 \subset W_2$, on a un homomorphisme naturel de $S(E \bmod W_1)$ dans $S(E \bmod W_2)$, et c'est un homomorphisme permis. Si $W_1 \subset W_2 \subset W_3$, on a une condition évidente de transitivité relativement aux homomorphismes. Un élément de la "limite projective" $\tilde{S}(E \bmod F)$, c'est une application $W \rightarrow x_W$ qui, à chaque voisinage ouvert W de F , associe un élément x_W du groupe $S(E \bmod W)$, de manière que, si $W_1 \subset W_2$, x_{W_2} soit l'image naturelle de x_{W_1} . L'ensemble $\tilde{S}(E \bmod F)$ ainsi défini est muni, d'une manière naturelle, d'une structure de groupe gradué à dérivation.

Théorème.— Soit E un espace compact, et F un sous-espace fermé. On a un isomorphisme canonique du groupe d'homologie singulière $\mathcal{H}(E-F)$ sur le groupe d'homologie singulière de deuxième espèce $\mathcal{H}(E \bmod F)$. (Ceci entraîne que ce dernier groupe ne dépend que de l'espace différence $E-F$).

Voici des indications sur la démonstration. Notons E' l'espace $E-F$ (sous-espace de E) ; le groupe $\mathcal{H}(E')$ est le groupe dérivé de $\tilde{S}(E')$, limite projective des $S(E' \bmod U)$, où U parcourt l'ensemble des complémentaires des parties compactes de E' (cf. exposé 5, paragraphe 6). Or, pour chaque voisinage ouvert W de F dans E , $E' \cap W$ est un U , et on a un homomorphisme naturel (biunivoque) de $S(E' \bmod (E' \cap W))$ dans $S(E \bmod W)$, d'où un homomorphisme naturel (biunivoque) des limites projectives :

$$f : \tilde{S}(E') \rightarrow \tilde{S}(E \bmod F) .$$

C'est un homomorphisme permis, d'où un homomorphisme

$$f : \mathcal{H}(E') \rightarrow \mathcal{H}(E \bmod F) .$$

Il s'agit de montrer que $\bar{f}$ est un isomorphisme sur, ce qui prouvera le théorème 1, en précisant l'isomorphisme.

Or f identifie $S(E')$ à un sous-groupe de $S(E \bmod F)$; on va définir, dans $S(E \bmod F)$, un opérateur d'homotopie qui soit un projecteur sur un sous-groupe de $S(E')$, ayant même groupe dérivé que $S(E')$. D'où le résultat.

Pour cela, choisissons une fois pour toutes un recouvrement V de E' par des ouverts dont l'adhérence (dans E) soit contenue dans E' . Pour chaque simplexe singulier x de l'espace E , définissons l'entier $n(x)$ égal à 0 si le support de x est contenu dans E' et petit d'ordre V , à un dans le cas contraire. Ceci définit (comme au paragraphe 3), un opérateur d'homotopie, que nous noterons ici h , associé à l'opérateur (noté ici k) tel que $k(x) = 0$ si $n(x) = 0$, $k(x) = w(x)$ si $n(x) = 1$ (w a la même signification qu'aux paragraphes 2 et 3). Les endomorphismes h et k opèrent dans chaque $S(E \bmod W)$, ainsi que les itérés h^n et k_n ; pour un x de $S(E \bmod W)$, on a $h^{n+1}(x) = h^n(x)$ et $k_{n+1}(x) = k_n(x)$ pour n assez grand. On peut donc définir h^∞ et k_∞ dans chaque groupe $S(E \bmod W)$. Ces endomorphismes opèrent aussi dans la limite projective $S(E \bmod F)$, et h^∞ est l'opérateur d'homotopie associé à k_∞ . D'autre part, h^∞ est un projecteur sur le sous-groupe $S_V(E')$ des éléments de $S(E')$ qui sont petits d'ordre V . Ceci prouve que $\mathcal{H}_V(E') \rightarrow \mathcal{H}(E \bmod F)$ est un isomorphisme sur, et comme $\mathcal{H}_V(E') \rightarrow \mathcal{H}(E')$ est un isomorphisme sur (cf. début de ce paragraphe 5), le théorème est démontré.

De la même manière, et dans les mêmes hypothèses (E compact, F fermé contenu dans E), soit $S^*(E \bmod F)$ le sous-groupe de $S^*(E)/I^*(E)$ formé des éléments dont le support ne rencontre pas F . Le groupe dérivé de $S^*(E \bmod F)$ étant noté $\mathcal{H}^*(E \bmod F)$, on a le

Théorème.— On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}^*(E \bmod F)$ sur le groupe de cohomologie compacte $\mathcal{H}^*(E-F)$ de l'espace $E' = E-F$.