

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Opérateurs d'homotopie

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 7, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A7_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1948-1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS D'HOMOTOPIE.

(Exposés faits par H. CARTAN, les 10 et 17.1.1949).

1.- Définition.

Soit G un groupe gradué à dérivation (exposé 2, paragraphe 4), r ($r = \pm 1$) le degré de l'opérateur de dérivation d . Un opérateur d'homotopie dans G est un endomorphisme h du groupe abélien G , tel qu'il existe un endomorphisme k , de degré $-r$ (i.e. : $\theta_{n-r} k = k \theta_n$) satisfaisant à la relation

$$(1) \quad e - h = dk + kd.$$

(e désigne l'automorphisme identique de G . On omet le o dans la notation du composé de deux endomorphismes). La relation (1) signifie que, pour tout élément α de G , on a

$$\alpha - h(\alpha) = d(k(\alpha)) + k(d\alpha).$$

Si on part d'un endomorphisme k de degré $-r$, (1) définit un endomorphisme h , qu'on appelle l'opérateur d'homotopie associé à k .

Un opérateur d'homotopie est un endomorphisme permis. En effet, il est de degré 0 : $\theta_n h = h \theta_n$; de plus, on a bien $hd = dh$, comme on le voit en comparant les deux membres de (1) avec d , successivement à gauche et à droite.

2.- Propriétés fondamentales d'un opérateur d'homotopie.

Théorème 1.— Si h est un opérateur d'homotopie dans G , l'endomorphisme $\bar{h}$ du groupe dérivé $H(G)$, défini par h , est l'automorphisme identique de $H(G)$.

En effet, si α est un cycle de G ($d\alpha = 0$), alors $h(\alpha)$ est un cycle homologue à α , puisque $\alpha - h(\alpha) = d(k(\alpha))$.

Soit maintenant h un projecteur de G ; si on pose $F = h(G)$, on a $h = fg$, où g est un homomorphisme de G sur F , et f l'homomorphisme canonique de F dans G .

Théorème 2.— Si le projecteur h est un opérateur d'homotopie, les homomorphismes $\bar{g} : H(G) \rightarrow H(F)$ et $\bar{f} : H(F) \rightarrow H(G)$, définis par g et f respectivement, sont des isomorphismes sur, réciproques l'un de l'autre.

Démonstration : le composé $\bar{g} \bar{f}$ est associé à gf , qui est l'automorphisme identique de F ; c'est donc l'automorphisme identique de $H(F)$. Quant à $\bar{f} \bar{g}$, il est associé à $fg = h$; puisque h est opérateur d'homotopie, $\bar{h}$ est l'automorphisme identique, d'après le théorème 1.

3.- Opérateurs d'homotopie dans un sous-groupe, dans un groupe quotient.

Soit un couple d'homomorphismes h, k satisfaisant à (1), k étant de degré $-r$. Si un sous-groupe permis F du groupe G est stable pour k , il est stable pour h , d'après (1) ; les restrictions de h et k à F satisfont à (1), et par suite la restriction de h est un opérateur d'homotopie dans F .

Dans les mêmes hypothèses, k et h définissent des endomorphismes du groupe quotient G/F ; donc h définit un opérateur d'homotopie dans le groupe G/F .

4.- Opérateurs d'homotopie et dualité.

Soit G un groupe gradué à dérivation, et γ un groupe abélien. $G^* = \text{Hom}(G, \gamma)$ est un groupe gradué à dérivation, dont l'opérateur de dérivation d^* est de degré $-r$. Soit un couple d'endomorphismes h, k de G satisfaisant à (1), k étant de degré $-r$. Soient h^* et k^* les endomorphismes transposés, qui sont des endomorphismes de G^* . L'endomorphisme k^* est de degré $+r$, et, en transposant la relation (1), on obtient

$$e^* - h^* = d^* k^* + k^* d^*,$$

ce qui prouve que h^* est un opérateur d'homotopie dans G^* .

Supposons en particulier que h soit un projecteur de G . Désignons comme ci-dessus par g l'homomorphisme correspondant de G sur $F = h(G)$, par f l'homomorphisme canonique de F dans G . On sait (exposé 4, paragraphe 1) que g^* applique biunivoquement $\text{Hom}(F, \gamma) = F^*$ dans $\text{Hom}(G, \gamma) = G^*$, ce qui identifie F^* à un sous-groupe de G^* . L'opérateur $h^* = g^* f^*$ est opérateur d'homotopie dans G^* , et c'est un projecteur qui applique G^* sur F^* . Il en résulte (théorème 2) que les homomorphismes $H(G^*) \rightarrow H(F^*)$ et $H(F^*) \rightarrow H(G^*)$, définis par f^* et g^* respectivement, sont des isomorphismes sur, réciproques l'un de l'autre.

5.- Composé de deux opérateurs d'homotopie.

Soit, sur G , un couple d'endomorphismes h_1, k_1 satisfaisant à $e - h_1 = dk_1 + k_1 d$, et, sur le même groupe G , un couple d'endomorphismes

h_2, k_2 satisfaisant à $e - h_2 = dk_2 + k_2d$ (k_1 et k_2 de degré $-r$). Alors l'endomorphisme composé h_2h_1 est un opérateur d'homotopie, associé à l'endomorphisme $k_1 + k_2h_1$ (qui est bien de degré $-r$). En effet

$$e - h_2h_1 = (e - h_1) + (e - h_2)h_1 = dk_1 + k_1d + dk_2h_1 + k_2dh_1,$$

et, puisque $dh_1 = h_1d$, donc $k_2dh_1 = k_2h_1d$, le dernier membre est bien égal à $d(k_1 + k_2h_1) + (k_1 + k_2h_1)d$.

Remarque : la conclusion reste valable si l'on suppose seulement que h_2 et k_2 sont définis sur le sous-groupe stable $h_1(G)$, et appliquent $h_1(G)$ dans G , tout en satisfaisant, dans $h_1(G)$, à $e - h_2 = dk_2 + k_2d$.

Conséquence : soit, dans G , un opérateur d'homotopie h associé à k . Alors le n -ième itéré h^n est un opérateur d'homotopie, associé à l'endomorphisme $k(e + h + \dots + h^{n-1})$.

6.- Exemple : opérateur conique.

Plaçons-nous dans le groupe $S(E)$ des chaînes singulières de l'espace numérique $E = \mathbb{R}^n$. A chaque simplexe singulier x (de dimension p), associons le "cône" ayant pour "sommet" l'origine 0 et pour "base" le simplexe x ; ce sera, par définition, le simplexe singulier y , de dimension $p+1$, défini par :

$$\begin{aligned} y(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) &= 0 \quad \text{si } \lambda_0 = 1 \\ &= (1 - \lambda_0)x(\lambda_1/(1 - \lambda_0), \dots, \lambda_{p+1}/(1 - \lambda_0)) \quad \text{si } \lambda_0 \neq 1 \end{aligned}$$

(rappelons que les variables λ_i sont ≥ 0 et leur somme égale à un). Dans la formule précédente, la multiplication par le scalaire $(1 - \lambda_0)$ s'entend au sens de l'homothétie dans l'espace $\mathbb{R}^n$, par rapport à l'origine 0 .

Désignons par $k(x)$ le cône défini par x ; on obtient ainsi un endomorphisme k , de degré $+1$, du groupe $S(E)$. L'opérateur d'homotopie h associé à k étant défini par la formule (1) du paragr. 1, on vérifie aisément que $h(x)$ est nul pour tout simplexe singulier x de dimension ≥ 1 ; si x est un point (simplexe singulier de dimension 0), $h(x)$ est le point 0 (simplexe de dimension 0). Ainsi h est un projecteur qui applique $S(E)$ sur le sous-groupe formé des multiples entiers de l'unique simplexe de dimension 0, constitué par l'origine. Ceci entraîne que le groupe d'homologie singulière et les groupes de cohomologie singulière de l'espace $\mathbb{R}^n$ sont triviaux (dans le sens de l'exposé 6, paragraphe 1). Le même résultat vaut pour tout espace E homéomorphe à

R^n , par exemple pour une boule ouverte. Il vaut aussi pour une boule fermée, car l'opérateur conique k défini plus haut vaut pour tout sous-espace convexe de R^n , 0 étant alors un point quelconque de ce sous-espace.

Généralisation : soit E un espace topologique homotope à un point, c'est-à-dire dans lequel existe une application continue $M \rightarrow \varphi(M, t)$ de $E \times I$ dans E (I désignant le segment $[0, 1]$ de la droite numérique), telle que $\varphi(M, 1) = M$, $\varphi(M, 0) = A$ (point indépendant du point M). Nous définissons un opérateur k , de degré $+1$, dans le groupe $S(E)$, en associant à chaque simplexe singulier x , de dimension p , le simplexe singulier y , de dimension $p+1$, défini par

$$y(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) = A \quad \text{si } \lambda_0 = 1$$

$$= \varphi(x(\lambda_1/t, \dots, \lambda_{p+1}/t), t) \quad \text{si } \lambda_0 \neq 1 \quad \left(\text{on a posé } t = 1 - \lambda_0 \right).$$

L'opérateur d'homotopie h associé à k transforme en zéro toute chaîne sing. de dimension $p \geq 1$, et transforme tout point M (simplexe de dim. 0) en le point A . Donc le groupe d'homologie singulière et les groupes de cohomologie singulière d'un espace homotope à un point sont triviaux. Ce sont les mêmes que ceux d'un espace réduit à un point.

7.- Autre exemple : opérateur conique dans l'anneau des formes différentielles extérieures de R^n

Parmi les formes différentielles extérieures de R^n , à coefficients continus, on distingue celles ω qui ont une "différentielle extérieure" $d\omega$ à coefficients continus (il n'est pas nécessaire, pour cela, que les coefficients de ω soient continûment différentiables). Elles forment un anneau gradué à dérivation (cf. exposé 4, paragraphe 8), soit A .

L'existence et la définition de $d\omega$ peuvent être données en utilisant l'intégration d'une forme ω (de degré p) sur un "simplexe singulier différentiable" de dimension p , c'est-à-dire un simplexe singulier $x(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ tel que x soit fonction continûment différentiable des variables λ_i . Une forme ω , de degré p , appartient à A s'il existe une forme $\bar{\omega}$, de degré $p+1$, telle que l'on ait

$$\int_x \bar{\omega} = \int_{\partial x} \omega$$

pour tout simplexe sing. diff. x de dimension $p+1$. Si une telle forme $\bar{\omega}$ existe (pour une ω donnée), elle est unique, et on la note alors $d\omega$.

Ainsi $d\omega$ est définie pour toute ω de A , et d'ailleurs $d\omega$ appartient à A , et $d(d\omega) = 0$.

Soit x un simplexe singulier différentiable de dimension $p-1$; le cône $k(x)$, de dimension p , n'est pas, en général, un simplexe différentiable (il y a une singularité au sommet du cône), mais cela n'empêche pas de prendre l'intégrale $\int_{k(x)} \omega$ pour toute forme différenc. ω de degré p . (Il y a là une petite difficulté qu'on pourrait éviter en considérant, au lieu d'images continûment différentiables de simplexes euclidiens, des images cont. différentiables de cubes euclidiens). Or on montre qu'il existe une forme $k^*(\omega)$ et une seule telle que l'on ait

$$\int_{f(x)} \omega = \int_x k^*(\omega)$$

quel que soit le simplexe différentiable x de dimension $p-1$. Le calcul montre que si $\omega = a(\xi)d\xi_1 \dots d\xi_p$ (où $\xi_1, \dots, \xi_n$ désignant les coordonnées d'un point ξ de R^n), on a

$$k^*(\omega) = b(\xi) \left(\sum_i (-1)^{i-1} \xi_i d\xi_1 \dots \widehat{d\xi_i} \dots d\xi_p \right), \text{ avec}$$

$$b(\xi) = \int_0^1 a(t\xi) t^{p-1} dt \quad (t\xi \text{ désigne l'homothétique du}$$

point ξ de R^n par rapport à l'origine dans le rapport t). De plus, si $\omega \in A$, alors $k^*(\omega) \in A$, et l'opérateur d'homotopie h^* associé à k^* , défini par

$$h^*(\omega) = \omega - dk^*(\omega) - k^*d(\omega),$$

est nul si le degré p de ω est ≥ 1 ; pour $p = 0$, ω est une fonction contin. différentiable f , et alors $h^*(\omega)$ est la fonction constante égale à la valeur de f à l'origine.

Pour prouver ces affirmations, plaçons-nous par exemple dans le cas d'une forme ω de degré $p \geq 1$, et soit x un simplexe sing. différenc. de dimension p . L'opérateur conique k satisfait à $x = \partial k(x) + k\partial(x)$, d'où

$$\int_{k\partial x} \omega = \int_x \omega - \int_{\partial kx} \omega$$

c'est-à-dire

$$\int_{\partial x} k^*(\omega) = \int_x \omega - \int_x k^*d(\omega)$$

Ceci prouve bien que $k^*(\omega)$ possède une différentielle extérieure égale

à $\omega - k^*d(\omega)$.

En résumé, l'opérateur k^* montre que le groupe dérivé du groupe à dérivation A est trivial. En particulier, si une forme différentielle ω , dans R^n , est telle que $d\omega = 0$, ω est la différentielle extérieure d'une forme différentielle, à savoir la forme $k^*(\omega)$.

L'opérateur k^* opère aussi dans le groupe des formes différentielles de tout ensemble ouvert convexe de R^n , contenant l'origine. De plus, soit B le sous-groupe stable des formes de A qui sont nulles dans un voisinage ouvert de l'origine O (voisinage qui dépend de la forme considérée) ; B est non seulement stable pour d , mais pour k^* ; donc k^* opère dans le groupe quotient A/B , groupe qu'on peut appeler le groupe des formes différentielles à l'origine. Le groupe dérivé de ce groupe est donc trivial ; c'est là un fait qui jouera un rôle capital dans la démonstration du "théorème de DE RHAM" relatif à la cohomologie des variétés différentiables.

8.- Opérateurs d'homotopie dans le groupe des chaînes d'un complexe simplicial.

Soit E un ensemble abstrait ; désignons par la même lettre E le complexe simple qu'il définit (cf. exposé 6, paragraphe 1). Un sommet b de E définit un endomorphisme k , de degré $+1$, du groupe $C(E)$ des chaînes de E ; on définit k en associant, à chaque simplexe ordonné $(a_0, \dots, a_p)$, le simplexe ordonné $(b, a_0, \dots, a_p)$. L'opérateur d'homotopie h associé à k se détermine immédiatement : $h(x)$ est nul pour tout simplexe ordonné de dimension ≥ 1 , et, si x est un simplexe de dimension 0 (sommet de E) , $h(x)$ est le sommet b . Donc h est un projecteur de $C(E)$ sur le sous-groupe formé des multiples entiers de l'unique simplexe (b) de dim. 0 . Par suite le groupe d'homologie de E et ses groupes de cohomologie sont triviaux.

Application : dans le groupe des cochaînes d'Alexander $\check{C}(E)$ d'un espace topologique E (cf. exposé 6, paragraphe 3), chaque point b de l'espace définit le sous-groupe des cochaînes dont le "support" ne contient pas b . Le groupe quotient s'appelle le groupe des cochaînes d'Alexander au point b . Comme le sous-groupe par lequel on a fait le quotient est stable pour l'opérateur k^* défini par b dans $C^*(E)$, et par suite dans $\check{C}(E)$, on voit que le groupe dérivé du groupe des cochaînes au point b (groupe de cohomologie au point b) est trivial.

Soit maintenant K une structure de complexe simplicial sur l'ensemble E . Le groupe des chaînes $C(K)$ s'identifie à un sous-groupe de $C(E)$, stable pour l'opérateur d (nous notons provisoirement d l'opérateur "bord" ∂ , pour des

raisons typographiques) ; mais, en général, $C(K)$ n'est pas stable pour l'opérateur k défini plus haut.

Toutefois, soit u un endomorphisme de $C(E)$ tel que, pour toute partie finie L de E , le sous-groupe $C(L)$ soit stable pour u ; un tel endomorphisme prendra le nom d'endomorphisme simplicial du groupe $C(E)$. Alors, pour toute structure de complexe simplicial K sur E , le groupe $C(K)$ sera stable pour u , et u opérera également sur les groupes de chaînes relatives ; le transposé u^* opérera dans tous les groupes de cochaînes, et aussi (lorsque E est un espace topologique) dans le groupe des cochaînes d'Alexander. Cette définition étant posée, nous allons établir le

Théorème 3.— Soit, dans le groupe $C(E)$, un endomorphisme simplicial u qui soit aussi un endom. permis pour la structure de groupe gradué à dérivation. Si en outre u laisse invariant chaque simplexe de dimension 0, il existe un endomorphisme simplicial v , de degré $+1$, tel que

$$(2) \quad e - u = vd + dv \quad (e \text{ désigne toujours l'autom. identique}).$$

Il en résultera que, si K et K' sont deux sous-complexes de E tels que $K' \subset K$, u opère comme opérateur d'homotopie dans le groupe $C(K \bmod K')$, et u^* comme opérateur d'homotopie dans $C^*(K \bmod K')$. De même, si E est muni d'une structure topologique, u^* opère comme opérateur d'homotopie dans le groupe des cochaînes d'Alexander.

Démonstration : introduisons les notations suivantes. Pour tout simplexe ordonné α de E , soit L_α l'ensemble des éléments de α (qui est une partie finie de E) ; soit k_α l'opérateur (de degré $+1$) défini dans $C(L_\alpha)$ par le "premier sommet" de α . Rappelons que, pour toute chaîne β de $C(L)$, de dimension $p \geq 1$, on a

$$(3) \quad \beta = k_\alpha d(\beta) + dk_\alpha(\beta) .$$

On va définir, par récurrence sur l'entier p , la valeur de $v(\alpha)$ pour les chaînes α de dimension p , et cela de manière que :

condition (p') : pour toute partie finie L de E , v applique $C_p(L)$ dans $C_{p+1}(L)$;

condition (p'') : pour toute chaîne α de dimension p , on ait

$$(4) \quad \alpha - u(\alpha) = vd(\alpha) + dv(\alpha) \quad (\text{il suffira d'exprimer cette relation lorsque } \alpha \text{ est un simplexe ordonné de dimension } p).$$

Une fois $v(\alpha)$ défini pour tous les degrés p , et les deux conditions

satisfaites, on aura obtenu un endomorphisme simplicial v satisfaisant à (2), et le théorème sera démontré.

Commençons par la dimension 0. Posons $v(\alpha) = 0$ pour toute chaîne α de dimension 0 ; les conditions (0') et (0'') sont bien satisfaites. Supposons $v(\alpha)$ déjà défini pour les α de dimension $\leq p-1$, et soit α un simplexe ordonné de dimension p ; alors $vd(\alpha)$ est déjà défini. La chaîne de dimension p

$$\beta = \alpha - u(\alpha) - vd(\alpha)$$

appartient à $C(L_\alpha)$ parce que u est un endom. simplicial et que v satisfait à la condition ((p-1)') . De plus $d\beta$ est nul, car la condition ((p-1)'') appliquée à la chaîne $d\alpha$ donne $d\alpha - ud(\alpha) = dvd(\alpha)$, et d'autre part $ud(\alpha) = du(\alpha)$ puisque u est un endom. permis, par hypothèse. Appliquons alors (3) à la chaîne β et à l'endomorphisme k_α de $C(L_\alpha)$: il vient $\beta = dk_\alpha(\beta)$. Nous poserons

$$v(\alpha) = k_\alpha(\beta) = k_\alpha(\alpha - u(\alpha) - vd(\alpha)) .$$

On a $v(\alpha) \in C(L_\alpha)$, ce qui prouve la condition (p') ; et la relation $\beta = dk_\alpha(\beta)$ donne la relation (4) de (p''). Ceci achève la démonstration du théorème 3.

9.- Applications à l'homologie et à la cohomologie simpliciales.

Rappelons (cf. exposé 2, paragraphe 1) que le groupe des "chaînes orientées" $c(K)$ a été défini comme un quotient du groupe des "chaînes ordonnées" $C(K)$, pour toute structure de complexe simplicial K sur un ensemble E . Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que l'homomorphisme canonique de $H(K)$ (ou de $H(K \bmod K')$) dans $h(K)$ (ou $h(K \bmod K')$) est un isomorphisme sur.

Pour cela, nous allons définir dans le groupe $C(E)$ des chaînes "ordonnées" de E un projecteur u qui soit un endomorphisme permis, qui soit un endom. simplicial (au sens du numéro précédent), et dont le noyau Γ soit précisément le sous-groupe de $C(E)$ défini exposé 2, paragraphe 1, tel que $c(E)$ soit $C(E)/\Gamma$. Alors l'image de u s'identifiera au groupe $c(E)$, et comme u sera opérateur d'homotopie d'après le théorème 3 (car u laissera invariantes les chaînes de dimension 0), l'isomorphisme de $H(K)$ sur $h(K)$ résultera du théorème 2 (paragraphe 2 de cet exposé).

Rappelons que Γ est le sous-groupe engendré par :

- 1°) les simplexes ordonnés à sommets non tous distincts ;
- 2°) les chaînes de la forme $\alpha - \xi_\sigma \sigma(\alpha)$, où α est un simplexe ordonné

à sommets distincts (de dimension $p \geq 1$), et σ une permutation de l'ensemble de ses sommets.

Pour définir le projecteur u , fixons un ordre sur l'ensemble E , qui fasse de E un ensemble totalement ordonné; appelons désormais cet ordre l'ordre "canonique". Si α est un simplexe ordonné à sommets non tous distincts, on posera $u(\alpha) = 0$. Si α est un simplexe ordonné à sommets distincts, soit σ la permutation qui range les sommets de α dans l'ordre "canonique"; on posera $u(\alpha) = \varepsilon_{\sigma} \alpha$. On vérifie aisément que u est un endom. permis, et il est clair que u est un endom. simplicial (au sens du paragraphe 8). C'est bien un projecteur dont le noyau est Γ .

Nous obtenons ainsi l'isomorphisme des groupes d'homologie "ordonnée" et "orientée" pour les complexes $K \bmod K'$, et, par transposition, des groupes de cohomologie fournis respectivement par toutes les cochaînes et par les cochaînes alternées. D'une façon précise, le projecteur u permet d'identifier $c(E)$ à un sous-groupe de $C(E)$, autrement dit, définit un isomorphisme u_1 de $c(E)$ dans $C(E)$. Le transposé u_1^* applique $C^*(E)$ sur le sous-groupe $c^*(E)$ des cochaînes alternées; comme endomorphisme de $C^*(E)$, u_1^* est un projecteur, et un opérateur d'homotopie.

u_1^* définit aussi un projecteur dans le groupe $\check{C}(E)$ des cochaînes d'Alexander d'un espace topologique E : il projette $\check{C}(E)$ sur le sous-groupe des "cochaînes d'Alexander alternées"; le groupe dérivé de ce sous-groupe s'identifie donc au groupe de cohomologie de Čech-Alexander de l'espace E .

Le projecteur u , ainsi que l'endomorphisme v qui lui est attaché (paragraphe 8) se prolongent évidemment au groupe des "chaînes infinies" de E ; on ne change donc pas le "groupe d'homologie de deuxième espèce" d'un complexe simplicial K , en substituant aux chaînes infinies "ordonnées" les chaînes infinies "orientées". Remarque analogue pour le groupe de cohomologie des "cochaînes finies": on ne le change pas en se limitant aux cochaînes finies alternées.

Remarque sur la structure multiplicative des cochaînes.— Si α' et β' sont deux cochaînes alternées, leur produit (défini dans l'exposé 4, paragraphe 8) n'est pas, en général, une cochaîne alternée. Mais si on a totalement ordonné l'ensemble E , on vient de définir un projecteur u_1^* de $C^*(E)$ sur $c^*(E)$; on définit une multiplication dans le groupe $c^*(E)$ des cochaînes alternées en posant

$$\alpha' \cdot \beta' = u_1^*(\alpha' \beta') \quad .$$

Cette multiplication dépend de l'ordre choisi sur E : c'est la multiplication d'Alexander-Whitney. Si α' et β' sont des cocycles pour une structure de complexe simplicial K sur E , $u_1^*(\alpha' \beta')$ est un cocycle de la même classe de cohomologie que $\alpha' \beta'$; donc, quand on passe à l'anneau de cohomologie, la multiplication d'Alexander-Whitney redonne la multiplication de cet anneau, multiplication qui, elle, est indépendante de l'ordre choisi. Remarque analogue pour la multiplication des cochaînes alternées d'Alexander d'un espace topologique.
