

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. DIXMIER

Homologie et cohomologie singulières

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 5, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A5_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1948-1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE SINGULIÈRES.

(Exposé fait par DIXMIER, le 20.12.1948,
complété par H. CARTAN).

Changement de notation : dans un complexe simplicial K où l'on considère un sous-complexe L , le groupe des chaînes relatives $C(K/L)$ (exposé 2, paragraphe 6) sera désormais noté $C(K \bmod L)$ pour éviter des confusions ; le groupe d'homologie correspondant sera noté $H(K \bmod L)$. De même pour les cochaînes et la cohomologie relatives (exposé 4, paragraphe 5) : on écrira $C^*(K \bmod L)$ et $H^*(K \bmod L)$.

1.- Chaînes singulières, homologie singulière.

Rappelons (exposé 1, paragraphe 1) qu'un simplexe euclidien de dim. p a été canoniquement identifié à un sous-espace d'un cube de dim. $p+1$, à savoir le sous-espace des systèmes de nombres réels $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ tels que $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$; c'est un espace topologique muni également d'une structure linéaire-affine. Un tel simplexe est "ordonné" par la relation d'ordre des indices $0, \dots, p$ des variables $\lambda_0, \dots, \lambda_p$.

Soit alors E un espace topologique quelconque.

Un simplexe singulier (ou "simplexe continu") de dimension p de l'espace E est, par définition, une application continue (non nécessairement biunivoque) d'un simplexe euclidien ordonné, de dimension p , dans l'espace E . C'est donc une fonction continue x , à valeurs dans E , de $p+1$ variables $\lambda_i \geq 0$ telles que $\sum_i \lambda_i = 1$. L'égalité de deux simplexes singuliers de même dimension se définit par l'identité des fonctions. Un simplexe singulier de dimension 0 s'identifie à un point de l'espace E . On appelle support d'un simplexe singulier x l'ensemble des valeurs de la fonction $x(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$: c'est un sous-ensemble compact de E .

Soit x un simplexe singulier de dimension $p \geq 1$, et i un entier tel que $0 \leq i \leq p$. La restriction de la fonction $x(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ aux systèmes (λ_j) tels que $\lambda_i = 0$ est une fonction des p variables $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p$ prises dans cet ordre ; c'est donc un simplexe singulier de dim. $p-1$, que nous noterons x^i . Le support de x^i est contenu dans le support de x .

Soit, pour chaque entier $p \geq 0$, $S_p(E)$ le groupe libre ayant pour base

l'ensemble des simplexes singuliers de dim. p de l'espace E ; les éléments de $S_p(E)$ s'appellent chaînes singulières (de dim. p) de l'espace E ; ce sont les combinaisons linéaires finies, à coefficients entiers, de simplexes singuliers (de dim. p) de E . Le groupe $S(E)$, somme directe des $S_p(E)$, est un groupe gradué. On y définit un opérateur de dérivation ∂ , appelé bord, de la manière suivante : si x est un simplexe singulier de dim. 0 (point de E), on pose $\partial x = 0$; si x est un simplexe singulier de dim. $p \geq 1$, on pose

$$\partial x = \sum_{i=0}^p (-1)^i x^i .$$

L'endomorphisme ∂ est de degré -1 , et il satisfait bien à $\partial\partial = 0$.

Le support d'une chaîne singulière est, par définition, la réunion des supports de ceux de ses simplexes dont le coefficient n'est pas nul. C'est un ensemble compact. Si x est une chaîne singulière, le support de ∂x est contenu dans le support de x .

Muni de sa graduation et de l'endomorphisme ∂ , le groupe $S(E)$ est un groupe gradué à dérivation, auquel on peut appliquer les notions de l'exposé 2 (paragraphe 4). On obtient ainsi le groupe d'homologie singulière de l'espace E , noté $H(E)$. C'est un groupe gradué ; le groupe d'homologie singulière pour la dimension p se note $H_p(E)$.

Interprétation de $H_0(E)$: c'est le quotient du groupe libre ayant pour base l'ensemble des points de E , par le sous-groupe des bords des simplexes singuliers de dimension 1. Or appelons composante connexe d'un point M de E l'ensemble des points P de E qui peuvent être joints à M par un "arc", c'est-à-dire tels qu'il existe un simplexe singulier de dim. 1 dont le bord soit la différence entre le point P et le point M . L'ensemble des composantes connexes des points de E constitue une partition de E , et le groupe d'homologie $H_0(E)$, pour la dimension 0, s'identifie au groupe libre ayant pour base l'ensemble des composantes connexes de E . Ainsi l'homologie pour la dimension 0 est liée aux propriétés de connexion (par arcs) de l'espace E .

Soit K un complexe simplicial localement fini, et $\tilde{K}$ l'espace topologique (localement compact) qu'il définit (exposé 1). On définira plus tard un isomorphisme (canonique) de $H(K)$ (groupe d'homologie simpliciale du complexe K) sur $H(\tilde{K})$ (groupe d'homologie singulière de l'espace $\tilde{K}$). Il en résultera que $H(K)$ est un invariant topologique de l'espace $\tilde{K}$.

2.- Cochaines singulières, cohomologie singulière.

Soit γ un groupe abélien donné une fois pour toutes (cf. exposé 4).

Le groupe $\text{Hom}(S(E), \gamma)$ sera noté $S^*(E, \gamma)$, ou simplement $S^*(E)$ si aucune ambiguïté n'est à craindre. On l'appelle le groupe des cochaînes singulières de l'espace E (à valeurs dans γ). Il s'identifie au groupe des fonctions de simplexes singuliers, à valeurs dans γ . D'après l'exposé 4, paragraphe 2, $S^*(E)$ est un groupe gradué à dérivation ; l'opérateur de dérivation δ , transposé de ∂ , s'appelle cobord. Une cochaîne de degré p (fonction f des simplexes singuliers de dimension p) a son cobord δf qui est une fonction des simplexes sing. de dim. $p+1$ donnée par la formule

$$\delta f(x) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f(x^i) .$$

Le groupe dérivé de $S^*(E, \gamma)$ s'appelle groupe de cohomologie singulière de l'espace E (relativement à γ) et se note $H^*(E, \gamma)$; sa composante homogène de degré p se note $H^p(E, \gamma)$: groupe de cohomologie singulière de E pour la dimension p .

Les cochaînes de degré 0 s'identifient aux fonctions d'un point de E , à valeurs dans γ . Les cocycles de degré 0 sont les fonctions constantes sur chaque composante connexe de E . Tout cobord de degré 0 étant nul, le groupe de cohomologie pour la dimension 0 s'identifie au groupe des fonctions (à valeurs dans γ) constantes sur chaque composante connexe de E .

Si K est un complexe simplicial localement fini, on définira plus tard un isomorphisme canonique $H^*(\tilde{K}) \rightarrow H^*(K)$ du groupe de cohomologie singulière de l'espace $\tilde{K}$ sur le groupe de cohomologie simpliciale du complexe K .

Ce qui a été dit (exposé 4, paragraphe 4) sur l'accouplement entre homologie et cohomologie vaut pour l'homologie et la cohomologie singulières.

3.- Structure multiplicative.

Comme pour les cochaînes d'un complexe simplicial (exposé 4, paragraphe 8), on peut définir dans l'ensemble des cochaînes une multiplication, lorsque γ est un anneau. Il suffit de définir le produit d'une cochaîne singulière de degré p et d'une cochaîne singulière de degré q , qui sera une cochaîne singulière de degré $p+q$. Pour cela, associons à chaque simplexe singulier x de dimension $p+q$, le simplexe singulier x' , de dim. p , obtenu par restriction de la fonction $x(\lambda_0, \dots, \lambda_{p+q})$ aux systèmes (λ_i) tels que $\lambda_i = 0$ pour $i > p$; et le simplexe singulier x'' , de dim. q , obtenu par restriction de la fonction x aux systèmes (λ_i) tels que $\lambda_i = 0$ pour $i < p$. Cela étant, si f est une cochaîne de degré p et g une cochaîne de degré q , leur produit sera la

cochaîne h , fonction des simplexes sing. de dim. $p+q$, définie par

$$h(x) = f(x') g(x''),$$

le produit du second membre s'entendant au sens de la multiplication dans l'anneau γ .

Tout ce qui a été dit (exposé 4, paragraphe 8) peut se répéter ici : $S^*(E, \gamma)$ devient un anneau gradué à dérivation, qui satisfait notamment à

$$\delta(fg) = (\delta f)g + \bar{f}(\delta g) \quad (\text{notations de l'exposé 4, paragraphe 8}).$$

Donc $H^*(E, \gamma)$ est muni d'une structure d'anneau gradué : anneau de cohomologie singulière de l'espace E , relativement à l'anneau γ .

On verra que si K est un complexe simplicial localement fini, l'isomorphisme $H^*(\tilde{K}) \rightarrow H^*(K)$ est aussi un isomorphisme pour la structure multiplicative.

4. Effet d'une application continue.

Soient E et E' deux espaces topologiques, φ une application continue de E dans E' . Si x est un simplexe singulier de l'espace E , l'application composée $\varphi \circ x$ est un simplexe singulier de l'espace E' . L'application $x \rightarrow \varphi \circ x$ de l'ensemble des simplexes singuliers de E dans l'ensemble des simplexes singuliers de E' définit, par linéarité, un homomorphisme f de $S(E)$ dans $S(E')$. C'est un homom. permis, car $\varphi \circ (x^i) = (\varphi \circ x)^i$. On en déduit un homom. $\bar{f}$ du groupe d'homologie singulière $H(E)$ dans le groupe d'homologie singulière $H(E')$. Propriété évidente de transitivité, dans le cas de 3 espaces E, E', E'' , d'une application continue φ de E dans E' , d'une applic. continue ψ de E' dans E'' , et de l'application composée $\psi \circ \varphi$ de E dans E'' .

L'homomorphisme transposé f^* de $S^*(E')$ dans $S^*(E)$ est un homom. permis, et c'est un homom. d'anneau. Il définit un homom. $\bar{f}^*$ de l'anneau de cohomologie singulière $H^*(E')$ dans l'anneau de cohomologie singulière $H^*(E)$. On a le diagramme de compatibilité relatif à l'accouplement

$$\begin{array}{ccc} H(E) & \longrightarrow & H(E') \\ \parallel & & \parallel \\ H^*(E) & \longleftarrow & H^*(E') \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \gamma & & \gamma \end{array}$$

5.- Homologie et cohomologie relatives.

Soit F un sous-espace de l'espace topologique E ; F pourra notamment être fermé, ou ouvert. Le groupe des chaînes singulières $S(F)$ s'identifie à un sous-groupe (permis) de $S(E)$: le sous-groupe des chaînes sing. de E dont le support est contenu dans F . Le groupe quotient $S(E)/S(F)$ se notera $S(E \bmod F)$ et s'appellera le groupe des chaînes singulières de E modulo F . C'est un groupe gradué à dérivation. Son groupe dérivé se notera $H(E \bmod F)$ et s'appellera groupe d'homologie singulière de E modulo F .

Le groupe $\text{Hom}(S(E \bmod F), \gamma)$, noté $S^*(E \bmod F, \gamma)$, s'identifie à un sous-groupe permis de $S^*(E, \gamma)$: le sous-groupe des cochaînes singulières de E qui s'annulent sur les simplexes singuliers dont le support est contenu dans F . En outre, puisque $S(F)$ est facteur direct de $S(E)$, on peut identifier $S^*(F, \gamma)$ au quotient de $S^*(E, \gamma)$ par $S^*(E \bmod F, \gamma)$. On aura donc (cf. exposé 2, paragraphe 7, et exposé 4, paragraphe 5) les deux suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_p(F) & \rightarrow & H_p(E) & \rightarrow & H_p(E \bmod F) \rightarrow H_{p-1}(F) \rightarrow \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \dots & \leftarrow & H^p(F) & \leftarrow & H^p(E) & \leftarrow & H^p(E \bmod F) \leftarrow H^{p-1}(F) \leftarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \gamma & & \gamma & & \gamma & & \gamma \end{array}$$

avec les compatibilités d'accouplement qu'indique ce diagramme.

En ce qui concerne les structures multiplicatives (si γ est un anneau), $S^*(E \bmod F)$ est un sous-anneau, et même un idéal de $S^*(E)$; $S^*(F)$ s'identifie à l'anneau quotient. Deux des trois homom. de la suite exacte des groupes de cohomologie sont des homomorphismes d'anneau.

Remarque.— $H(E \bmod F)$ et $H^*(E \bmod F)$ ne sont pas, en général, des invariants topologiques de l'espace différence $E-F$. Par exemple, envisageons le cas où F est le complémentaire d'un point M de E . Les groupes $H(E \bmod F)$ et $H^*(E \bmod F)$ expriment alors non des propriétés d'un espace réduit à un point M , mais des propriétés locales de l'espace ambiant E au voisinage du point M ; on les appelle parfois groupe d'homologie (resp. de cohomologie) de E au point M . Lorsque E est une variété de dimension n , on verra plus tard que $H_p(E \bmod F)$ est nul pour tout p , sauf pour $p = n$ (auquel cas il est isomorphe au groupe additif des entiers).

Si on a deux espaces E et E' , et une application continue φ de E dans E' , qui applique un sous-espace F de E dans un sous-espace F' de E' , on en déduit des homomorphismes de $H(E)$ dans $H(E')$, $H(F)$ dans $H(F')$, et $H(E \bmod F)$ dans $H(E' \bmod F')$. Ces homom. donnent lieu au diagramme de

compatibilités

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_p(F) & \rightarrow & H_p(E) & \rightarrow & H_p(E \bmod F) \rightarrow H_{p-1}(F) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H_p(F') & \rightarrow & H_p(E') & \rightarrow & H_p(E' \bmod F') \rightarrow H_{p-1}(F') \rightarrow \dots \end{array}$$

On a des homomorphismes analogues et un diagramme analogue pour les groupes (resp. anneaux) de cohomologie.

6.- Homologie et cohomologie singulières de deuxième espèce.

Supposons désormais que l'espace E soit localement compact. On va définir d'autres groupes d'homologie et de cohomologie, qui se réduiront aux précédents lorsque E est un espace compact.

Le groupe $S_p(E)$ était le groupe des combinaisons linéaires formelles, à coefficients entiers tous nuls sauf un nombre fini, de tous les simplexes singuliers (de dim. p) de l'espace E . C'est un sous-groupe du groupe $S_p(E)$ que voici : une combinaison linéaire à coeff. entiers des simplexes singuliers (de dim. p) de E appartient à $S_p(E)$ si, pour tout compact F de E , les coefficients des simplexes singuliers dont le support rencontre F sont nuls sauf un nombre fini. Le support d'une chaîne singulière de deuxième espèce (élément de $S_p(E)$) est, par définition, la réunion des supports des simplexes singuliers dont le coefficient est $\neq 0$; c'est un ensemble fermé.

On prendra garde que $S_p(E)$ n'est pas, en général, un groupe libre.

La somme directe $S(E)$ des $S_p(E)$ constitue le groupe des chaînes singulières de deuxième espèce de E ; l'opérateur bord γ est défini de manière évidente, et fait de $S(E)$ un groupe gradué à dérivation. Son groupe dérivé (qui est gradué) se notera $\mathcal{H}(E)$, et s'appellera le groupe d'homologie singulière de deuxième espèce de l'espace localement compact E .

$S_p(E)$ s'identifie canoniquement à la limite projective ("inverse limit") des groupes $S_p(E \bmod U)$, où U parcourt l'ensemble des complémentaires de parties compactes de E .

Si $U_1 \supset U_2$, on a en effet un homomorphisme canonique φ_{12} de $S_p(E \bmod U_2)$ dans $S_p(E \bmod U_1)$; par définition, un élément de la limite projective des $S_p(E \bmod U_i)$ est un système d'éléments $\alpha_i \in S_p(E \bmod U_i)$ tels que, pour $U_i \supset U_j$, on ait $\varphi_{ji}(\alpha_j) = \alpha_i$.

De la même manière, si U_1 et U_2 sont des complémentaires de parties compactes, et si $U_1 \supset U_2$, $S^*(E \bmod U_1, \gamma)$ s'identifie à un sous-groupe de

$S^*(E \bmod U_2, \gamma)$. La "limite inductive" ("direct limit") de ces groupes se notera $S^*(E, \gamma)$; les $S^*(E \bmod U_i, \gamma)$ s'identifient à des sous-groupes de $S^*(E, \gamma)$, qui en est la réunion. D'ailleurs $S^*(E, \gamma)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe $S^*(E, \gamma)$ de toutes les cochaînes : une cochaîne f appartient à $S^*(E, \gamma)$ s'il existe un compact F de E tel que F s'annule sur tout simplexe dont le support ne rencontre pas F .

$S^*(E, \gamma)$ est muni d'une structure de groupe gradué à dérivation et même d'anneau gradué à dérivation, si γ est un anneau. Son groupe dérivé $\mathcal{H}^*(E, \gamma)$ s'appellera le groupe de cohomologie singulière de deuxième espèce de l'espace E (resp. l'anneau de cohom. sing. de deuxième espèce de E); on l'appelle aussi le groupe de cohomologie compacte de E ; on verra plus tard pourquoi.

On a un accouplement évident entre $S(E)$ et $S^*(E, \gamma)$, donc entre les groupes d'homologie et de cohomologie de deuxième espèce : $\mathcal{H}(E)$ et $\mathcal{H}^*(E, \gamma)$.

On verra que, si K est un complexe simplicial localement fini, $\mathcal{H}^*(\tilde{K}, \gamma)$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie des "cochaînes finies" du complexe K (cf. exposé 4, paragraphe 7), ou groupe de cohomologie compacte de K ; l'isomorphisme est d'ailleurs un isomorphisme pour la structure d'anneaux. Quant au groupe $\mathcal{H}(\tilde{K})$, il est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie que l'on obtiendrait à l'aide des "chaînes infinies" du complexe K ; le groupe d'homologie des chaînes infinies de K est donc un invariant topologique de l'espace localement compact $\tilde{K}$.

On verra aussi que si K est un complexe simplicial fini, et L un sous-complexe de K , le groupe d'homologie relative $H(K \bmod L)$ est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie singulière de deuxième espèce de l'espace loc. compact $\tilde{K} - \tilde{L}$. De même, le groupe de cohomologie simpliciale $H^*(K \bmod L, \gamma)$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie compacte $\mathcal{H}^*(\tilde{K} - \tilde{L}, \gamma)$. Ceci prouvera que $H(K \bmod L)$ et $H^*(K \bmod L)$ sont des invariants topologiques de l'espace localement compact $\tilde{K} - \tilde{L}$, lorsque K est un complexe fini et L un sous-complexe de K . Ceci permettra aussi de déterminer, par exemple, les groupes d'homologie singulière de deuxième espèce d'une boule ouverte de dimension n : ils sont nuls pour toute dimension p , sauf pour $p = n$.

Soient E et E' deux espaces localement compacts. Une application continue de E dans E' sera dite propre si l'image réciproque de toute partie compacte de E' est une partie compacte de E . Toute application continue propre de E dans E' définit un homomorphisme permis de $S(E)$ dans $S(E')$, d'où

un homomorphisme de $\mathcal{H}(E)$ dans $\mathcal{H}(E')$. On obtient aussi un homomorphisme permis de $S^*(E')$ dans $S^*(E)$, d'où un homomorphisme de $\mathcal{H}^*(E')$ dans $\mathcal{H}^*(E)$.

Si F est un sous-espace fermé de E , le groupe $\mathcal{S}(F)$ s'identifie au sous-groupe (permis) de $\mathcal{S}(E)$ formé des éléments dont le support est contenu dans F (il n'en serait pas de même, en général, si F était ouvert dans E , tout au moins lorsque E est non compact). On en déduit des groupes d'homologie et de cohomologie relatifs de deuxième espèce : $\mathcal{H}(E \bmod F)$ et $\mathcal{H}^*(E \bmod F, \gamma)$, ainsi que des suites exactes d'homomorphismes, à la manière habituelle.
