SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. CERF

# Groupes abéliens discrets

*Séminaire Henri Cartan*, tome 1 (1948-1949), exp. n° 3, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A3_0>

# GROUPES ABÉLIENS DISCRETS.

(Résumé d'un exposé fait par J. CERF, le 29.11.1948).

Un groupe abélien sera toujours noté additivement, et considéré comme module sur l'anneau $Z$ des entiers. Les notions de sous-groupe et de sous-module se confondent ; en particulier, les sous-groupes du groupe additif de $Z$ sont les idéaux de l'anneau $Z$ .

I.- Notions et propriétés valables pour tous les modules (Cf. BOURBAKI, Alg., chap. II).

Sous-groupe, groupe quotient. Somme directe de sous-groupes (en nombre fini ou infini). Paire de sous-groupes supplémentaires de $G$ : dont $G$ est somme directe. Un sous-groupe $H$ de $G$ est facteur direct si $H$ possède un supplémentaire. Notion de "projecteur" dans un groupe $G$ : endomorphisme $f$ tel que $fof = f$ . Paire de projecteurs attachés à une décomposition de $G$ en 2 sous-groupes supplémentaires ; réciproque : tout projecteur $f$ définit 2 sous-groupes supplémentaires, à savoir le noyau de $f$ et l'image de $f$ .

Combinaisons linéaires (finies). Famille libre (finie ou infinie) d'éléments de $G$ . Base de $G$ (s'il en existe) : famille libre engendrant $G$ ; coordonnées relatives à une base (ce sont des entiers).

Un groupe abélien est libre s'il possède une base. Pour un groupe abélien quelconque $G$ , tout système de générateurs de $G$ définit un groupe libre (dont la base est en correspondance biunivoque avec $G$ ) et $G$ est isomorphe à un groupe quotient de ce groupe libre.

Si $G$ a une base finie de $n$ éléments, toute autre base de $G$ a $n$ éléments. (Cette propriété s'étend aux modules libres sur un anneau commutatif quelconque ayant un élément unité). D'où : rang d'un groupe libre (de base finie).

Sous-groupe de torsion d'un groupe abélien $G$ : ensemble des $x$ de $G$ tels qu'il existe un entier $n \neq 0$ avec $nx = 0$ (élément d'ordre fini). Un groupe est dit "sans torsion" si son sous-groupe de torsion est réduit à $0$ . Tout groupe libre est sans torsion ; la réciproque est inexacte (ex. : groupe des nombres rationnels). Pour un groupe quelconque $G$ : le quotient de $G$ par son sous-groupe de torsion est sans torsion (cette propriété se généralise à un module sur un anneau d'intégrité).

II.- Propriétés plus particulières tenant au fait que l'anneau des entiers est un anneau principal (i.e: tout idéal est principal).

1.- Un groupe monogène G (engendré par un seul élément) est isomorphe au quotient du groupe (anneau) Z par un sous-groupe (idéal) H de Z . Si H est nul, G est isomorphe à Z ; sinon, H a la forme nZ (multiples de l'entier $n \neq 0$ ), et G est isomorphe au groupe des entiers modulo n ( $n \neq 1$ si G n'est pas réduit à 0 ) ; groupe cyclique d'ordre n .

Annulateur d'un groupe G : l'idéal des entiers p tels que $px = 0$ pour tout x de G se compose des multiples d'un entier $n \geqslant 0$ (annulateur de G ) ; si G est sans torsion, $n = 0$ (réciproque inexacte).

2.- Sous-groupes d'un groupe libre.

Théorème 1.- Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.

La démonstration utilise l'axiome de choix lorsque la base du groupe libre G est infinie. Bien-ordonnons l'ensemble I des indices de la base $(e_i)$ de G . Notons $G_i$ le sous-groupe engendré par les $e_j$ pour $j \leqslant i$ , et $G'_i$ le sous-groupe engendré par les $e_j$ pour $j < i$ . Posons $H_i = H \cap G_i$ , $H'_i = H \cap G'_i$ . Le groupe $H_i/H'_i$ est isomorphe au groupe des coeff. de $e_i$ dans l'expression des éléments de $H_i$ à l'aide de la base. Ce groupe est donc nul ou isomorphe à Z . S'il est isomorphe à Z , choisissons un élément $h_i$ de $H_i$ dont l'image dans $H_i/H'_i$ engendre $H_i/H'_i$ ; si au contraire $H_i = H'_i$ , prenons $h_i = 0$ . On montre que H est somme directe des sous-groupes engendrés par les $h_i$ ; autrement dit, l'ensemble des $h_i \neq 0$ est une base de H .

Remarque : si G est libre de rang fini n , tout sous-groupe H de G est libre, de rang $\leqslant n$ (le rang peut être n sans que H soit identique à G ).

Corollaire : si H est facteur direct d'un groupe libre G , le groupe quotient G/H est libre (puisqu'il s'identifie à un sous-groupe de G ). Rappelons la réciproque (qui, elle, est valable pour tout module sur un anneau commutatif avec élément unité) : si G/H est libre, H est facteur direct de G (prendre une base d'un sous-groupe supplémentaire de H ).

3.- Contenu d'un élément d'un groupe libre : c'est le p.g.c.d. des coordonnées relatives à une base : ce p.g.c.d. est indépendant de la base. Pour toute décomposition directe de G en 2 sous-groupes (supplémentaires) $G_1$ et $G_2$ , le contenu d'un élément x de G est le p.g.c.d. des contenus de ses composantes suivant $G_1$ et $G_2$ .

Pour que le quotient de $G$ libre par le sous-groupe $H$ engendré par un $x$ de $G$ soit sans torsion, il faut et il suffit que le contenu de $x$ soit égal à un (évident). Mais il y a plus :

Lemme.- Si le contenu d'un élément $x$ d'un groupe libre $G$ est égal à un, le sous-groupe $H$ engendré par $x$ est facteur direct de $G$ (et par suite il existe une base de $G$ dont $x$ fasse partie).

En effet, soit $x = \sum_i n_i e_i$ l'expression de $x$ à l'aide d'une base $(e_i)$ de $G$. Puisque les entiers $n_i$ (nuls sauf un nombre fini) sont premiers entre eux, il existe des entiers $a_i$ tels que $\sum a_i n_i = 1$. A chaque $y = \sum \eta_i e_i$ associons l'élément $(\sum a_i \eta_i)x$ de $H$. Ceci définit un projecteur de $G$ sur $H$, et par suite $H$ est facteur direct de $G$.

4.- Position d'un sous-groupe de rang fini dans un groupe libre.

Soit $H$ un sous-groupe quelconque d'un groupe libre $G$. L'ensemble des contenus des éléments de $H$ possède au moins un élément minimal $n_1$, dans le sens suivant : si le contenu d'un élément de $H$ divise $n_1$, il est égal à $n_1$. On verra tout à l'heure que ceci implique que $n_1$ divise (au sens large) le contenu de tout élément de $H$.

Prenons un élément $h_1$ de $H$, de contenu $n_1$ ; on a $h_1 = n_1 e_1$, où $e_1 \in G$, et il existe un projecteur $f$ de $G$ sur le sous-groupe $G_1$ engendré par $e_1$. Je dis que $f$ applique $H$ sur le sous-groupe $H_1 = H \cap G_1$ engendré par $h_1$. En effet, $f(H)$ est un sous-groupe de $G_1$, donc est engendré par un élément $ne_1$, et comme $f(H)$ contient $H_1$, $n$ divise $n_1$. Soit $x$ un élément de $H$ tel que $f(x) = ne_1$ ; le contenu de $x$ divise celui de sa composante $f(x)$ dans $G_1$, donc divise $n$, et a fortiori divise $n_1$. Mais puisque $n_1$ est un contenu minimal, ceci implique que $n = n_1$ ; ainsi $f(H) = H_1$.

Le projecteur $f$ définit une décomposition de $G$ suivant $G_1$ et le noyau $G'$ de $f$ ; dans cette décomposition, $H$ est décomposé suivant $H_1$ et $H' = H \cap G'$. Je dis que le contenu de tout élément de $H'$ est un multiple (au sens large) de $n_1$. En effet, si $x$ est dans $H'$, le contenu de $x+n_1e_1$ (qui est dans $H$) divise le contenu de $x$ et divise $n_1$ ; d'après la propriété minimale de $n_1$, il est égal à $n_1$, ce qui prouve que $n_1$ divise le contenu de $x$.

Si maintenant $H$ est supposé de rang fini $r$, il vient aussitôt, par récurrence sur $r$ :

Théorème 2.- Si $H$ est un sous-groupe de rang fini $r$ d'un groupe libre

$G$, il existe un facteur direct $K$ de $G$, une base finie $(e_1,\ldots,e_r)$ de $K$, et une suite d'entiers $n_1,\ldots,n_r$ (dont chacun divise le suivant), tels que les éléments $n_i e_i$ constituent une base de $H$.

Une telle décomposition de $G$ (relative à $H$) n'est pas unique ; mais il résultera du théorème 4 ci-dessous que la suite des entiers $n_1,\ldots,n_r$ est déterminée sans ambigüité par le groupe $G$ et son sous-groupe $H$ de rang $r$. On l'appelle la suite des diviseurs élémentaires du couple $(G,H)$.

Corollaire : si $G$ est libre et si $H$ est un sous-groupe de rang fini tel que $G/H$ soit sans torsion, $H$ est facteur direct et $G/H$ est libre (généralisation du lemme du n° 3).

5.- Structure des groupes abéliens de type fini (i.e: engendrés par un nombre fini d'éléments).

Un tel groupe $M$ est quotient d'un groupe libre $G$ de rang fini $p$, par un sous-groupe $H$ de rang $r \leq p$. Le théorème 2 montre que $M$ est somme directe de $r$ groupes $Z/e_iZ$ et de $p-r$ groupes isomorphes à $Z$. Parmi les groupes $Z/e_iZ$, ceux pour lesquels $e_i = 1$ sont réduits à $0$ ; on peut les laisser de côté. D'où :

Théorème 3.- Tout groupe abélien $M$ de type fini est somme directe d'un groupe libre de rang fini et de groupes cycliques (en nombre fini) dont les ordres $e_i \neq 1$ sont tels que chacun d'eux divise le suivant.

Une telle décomposition d'un groupe $M$ sera dite canonique. Il existe en général plusieurs décompositions canoniques d'un groupe donné $M$. Cependant la somme directe des sous-groupes cycliques d'une décomposition est évidemment le sous-groupe de torsion $T$ de $M$ ; quant au groupe libre de la décomposition, il est isomorphe au groupe quotient $M/T$ ; son rang s'appelle parfois le nombre de Betti du groupe $M$ ; c'est un invariant du groupe $M$.

Corollaires.- Tout groupe sans torsion, engendré par un nombre fini d'éléments, est libre. Dans un groupe de type fini, le sous-groupe de torsion est facteur direct, le quotient est libre.

Théorème 4.- Pour toute décomposition canonique d'un groupe abélien $M$ de type fini, le nombre des sous-groupes cycliques et leurs ordres sont toujours les mêmes.

Les ordres des groupes cycliques s'appellent les "coefficients de torsion" de $M$ ; avec le nombre de Betti de $M$, ils déterminent entièrement le groupe $M$ (à une isomorphie près).

Une démonstration simple du théorème 4 fait appel à la notion d'algèbre extérioure d'un module (Voir BOURBAKI, Alg., chap. III). Elle se généraliserait à des modules sur un anneau commutatif quelconque (avec élément unité). En voici le principe dans le cas des groupes abéliens. Pour tout groupe abélien en $M$, on désigne par $E^n(M)$ le sous-groupe de l'algèbre extérieure $E(M)$ formé des éléments de degré $n$ ; $E^1(M)$ est identifié à $M$. Supposons alors que $M$ soit somme directe de $p$ groupes monogènes isomorphes respectivement à des $Z/e_iZ$, où la suite des entiers $e_i \neq 1$ (dont les derniers peuvent être nuls) est telle que chacun d'eux divise le suivant. Alors $E^n(M)$ est nul pour $n > p$, non nul pour $n \leqslant p$ ; de plus, chaque $e_i$ est l'annulateur du groupe $E^{p-i+1}(M)$ ; en particulier, le dernier des $e_i$ (qui peut être nul) est l'annulateur de $M$ lui-même.

6.- Application à la topologie algébrique.

Si on a un complexe simplicial fini $K$, le groupe des chaînes orientées (exposé 2) est un groupe libre de rang fini. Il en est donc de même du sous-groupe des cycles ; par suite le groupe d'homologie de $K$ est de type fini. Pour chaque dimension $n$, on peut donc parler du nombre de Betti de $K$ pour la dimension $n$, et des coefficients de torsion de $K$ pour la dimension $n$. La connaissance des nombres de Betti et des coefficients de torsion détermine les groupes d'homologie de toutes dimensions de $K$.