

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. P. SERRE

H. CARTAN

Produits tensoriels

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 11, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A11_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1948-1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRODUITS TENSORIELS.

(Exposés de J.P. SERRE et H. CARTAN,
les 28.2 et 15.3.1949).

La première partie (1^{er} exposé) se rapporte à la théorie générale des produits tensoriels de A -modules (voir détails dans BOURBAKI, Alg., Ch. III, paragraphe 1) ; la deuxième partie (2^e exposé), à la théorie plus particulière des A -modules gradués à dérivation.

1.- Définition du produit tensoriel.

A désigne un anneau commutatif donné une fois pour toutes, ayant un élément unité. Lorsque A est l'anneau des entiers, la notion de A -module se confond avec celle de groupe abélien.

Le produit tensoriel $F \otimes G$ de deux A -modules F et G est un A -module, muni d'une application bilinéaire $(x,y) \rightarrow x \otimes y$ de $F \times G$ dans $F \otimes G$, telle que

- 1) l'image de $F \times G$ par cette application engendre $F \otimes G$ (comme A -module) ;
- 2) pour toute application A -bilinéaire f de $F \times G$ dans un A -module quelconque K , il existe une application A -linéaire g (et une seule) de $F \otimes G$ dans K , telle que $f(x,y) = g(x \otimes y)$ identiquement.

Ce produit tensoriel $F \otimes G$ existe et est unique à une isomorphie près. Tout élément de $F \otimes G$ s'écrit (de plusieurs manières) comme somme finie $\sum x_i \otimes y_i$; la bilinéarité s'exprime par

$(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$, $(\alpha x) \otimes y = \alpha(x \otimes y)$ pour $\alpha \in A$,
et deux autres relations analogues.

L'existence du produit tensoriel peut être prouvée ainsi : soit L le module des combinaisons linéaires formelles (finies à coefficients dans A) des éléments (x,y) de l'ensemble produit $F \times G$; soit R le sous-module engendré par les éléments de la forme

$$(I) \quad \begin{aligned} (x+x',y) - (x,y) - (x',y) & , & (\alpha x,y) - \alpha(x,y) \\ (x,y+y') - (x,y) - (x,y') & , & (x,\alpha y) - \alpha(x,y) \end{aligned}$$

Le module quotient L/R , muni de l'application $(x,y) \rightarrow$ classe de (x,y) dans L/R , répond à la question. De là on déduit

Proposition 1.— Si une somme $\sum x_i \otimes y_i$ est nulle ($x_i \in F$, $y_i \in G$), il existe deux sous-modules F_1 et G_1 , à un nombre fini de générateurs, contenant respectivement les x_i et les y_i , et tels que la somme $\sum x_i \otimes y_i$ soit nulle dans $F_1 \otimes G_1$. (Car si $\sum (x_i, y_i) \in R$, $\sum (x_i, y_i)$ est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments du type (I)).

2.- Premières propriétés du produit tensoriel.

Isomorphisme canonique de $A \otimes F$ sur F : il est défini par $\varphi(\alpha \otimes x) = \alpha x$; l'isomorphisme réciproque ψ est défini par $\psi(x) = 1 \otimes x$.

On a de même un isomorphisme canonique de $F \otimes A$ sur F . Cas particulier : isomorphisme de $A \otimes A$ sur A .

Commutativité : isomorphisme canonique φ de $F \otimes G$ sur $G \otimes F$, défini par

$$\varphi(x \otimes y) = y \otimes x .$$

Associativité : isomorphisme canonique φ de $(F \otimes G) \otimes K$ sur $F \otimes (G \otimes K)$ défini par

$$\varphi((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z) .$$

3.- Produit tensoriel d'homomorphismes (i.e: applications A -linéaires).

Soient $F \xrightarrow{f} F'$, $G \xrightarrow{g} G'$ deux homomorphismes ; l'homomorphisme $f \otimes g$ est, par définition, l'homomorphisme h de $F \otimes G$ dans $F' \otimes G'$ défini par

$$h(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) .$$

On a $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \otimes g = \alpha_1 \cdot (f_1 \otimes g) + \alpha_2 \cdot (f_2 \otimes g)$.

De plus, transitivité : si $F \xrightarrow{f} F' \xrightarrow{f'} F''$, et $G \xrightarrow{g} G' \xrightarrow{g'} G''$, alors l'homomorphisme $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ de $F \otimes G$ dans $F'' \otimes G''$ est identique au composé $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$. Conséquence : si f et g sont des projecteurs de F et G respectivement, $f \otimes g$ est un projecteur de $F \otimes G$.

Si f et g sont des homomorphismes sur, $f \otimes g$ est un homomorphisme sur, (voir théorème 1 ci-dessous). Par contre, si f et g sont biunivoques, $f \otimes g$ n'est pas nécessairement biunivoque (à ce sujet, voir théorèmes 2 et 4 ci-dessous).

Soient F' un sous-module de F ; φ l'homomorphisme canonique de F' dans F , ψ l'homomorphisme canonique de F sur le module quotient F/F' ; g l'automorphisme identique d'un module G . Alors les homomorphismes

$$\varphi \otimes g : F' \otimes G \rightarrow F \otimes G$$

$$\varphi \otimes g : F \otimes G \rightarrow (F/F') \otimes G$$

prennent le nom de canoniques.

On remarquera l'analogie avec les homomorphismes canoniques définis dans l'exposé 4 (paragraphe 1) :

$$\text{Hom}(F', G) \leftarrow \text{Hom}(F, G) \leftarrow \text{Hom}(F/F', G) .$$

On avait alors prouvé que la suite

$$\text{Hom}(F', G) \leftarrow \text{Hom}(F, G) \leftarrow \text{Hom}(F/F', G) \leftarrow 0$$

est exacte. Il y a ici une proposition analogue :

Théorème 1.— La suite d'homomorphismes canoniques

$$F' \otimes G \rightarrow F \otimes G \rightarrow (F/F') \otimes G \rightarrow 0$$

une suite exacte.

Cet énoncé affirme deux choses : 1) l'application $F \otimes G \rightarrow (F/F') \otimes G$ est sur : ceci résulte du fait que $F \rightarrow F/F'$ et l'automorphisme identique de G sont des homomorphismes sur. 2) le noyau de $F \otimes G \rightarrow (F/F') \otimes G$ est identique à l'image canonique, dans $F \otimes G$, de $F' \otimes G$. Ceci va résulter, plus généralement, de la

Proposition 2.— Si F' est un sous-module de F , et G' un sous-module de G , le noyau de l'homomorphisme canonique $F \otimes G \rightarrow (F/F') \otimes (G/G')$ est engendré par les images canoniques de $F' \otimes G$ et $F \otimes G'$.

Soit en effet φ cet homomorphisme canonique, et K le sous-module de $F \otimes G$ engendré par les images canoniques de $F' \otimes G$ et $F \otimes G'$. On définit un homomorphisme ψ de $(F/F') \otimes (G/G')$ dans $(F \otimes G)/K$ de la manière suivante : si $\hat{x} \in F/F'$, ^{et $\hat{y} \in G/G'$} on choisit un élément $x \in F$ dont l'image canonique soit $\hat{x}$, un élément $y \in G$ dont l'image canonique soit $\hat{y}$, puis on prend, dans $(F \otimes G)/K$, l'image de $x \otimes y \in F \otimes G$; cet élément ne dépend pas du choix de x et de y , et définit l'homomorphisme ψ cherché. En composant φ et ψ , on constate que $\psi \circ \varphi$ est l'homomorphisme canonique de $F \otimes G$ sur son quotient $(F \otimes G)/K$. Donc tout élément du noyau de φ est dans K . La réciproque est évidente.

Application : Soit $\mathbb{Z}$ le groupe additif des entiers, $\mathbb{Z}_n$ le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n . Pour tout groupe abélien G , on a un isomorphisme canonique du produit tensoriel (au sens des groupes abéliens) $\mathbb{Z}_n \otimes G$ sur le groupe quotient G/nG . — On a un isomorphisme du produit tensoriel $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$ sur

le quotient de Z par le sous-groupe $pZ+qZ$, qui n'est autre que nZ , où n est le p.g.c.d. de p et q ; ainsi $Z_p \otimes Z_q$ est canoniquement isomorphe à Z_n .

4.- Accouplement.

Soient F un A -module, F' un sous-module de F ; G_1 et G_2 deux A -modules; supposons donné un accouplement $G_1 \times G_2 \rightarrow \Gamma$ (Γ étant un A -module), ou ce qui revient au même, un homomorphisme de $G_1 \otimes G_2$ dans Γ . Alors on a le diagramme de compatibilités

$$\begin{array}{ccccccc}
 F' \otimes G_1 & \longrightarrow & F \otimes G_1 & \longrightarrow & (F/F') \otimes G_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 \text{Hom}(F', G_2) & \longleftarrow & \text{Hom}(F, G_2) & \longleftarrow & \text{Hom}(F/F', G_2) & \longleftarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \Gamma & \longleftrightarrow & \Gamma & \longleftrightarrow & \Gamma & &
 \end{array}$$

(les deux premières lignes horizontales donnent lieu à des suites exactes).

5.- Produit tensoriel de sommes directes.

Théorème 2.— Pour que l'homomorphisme canonique $F' \otimes G \rightarrow F \otimes G$ (où F' désigne un sous-module de F) soit biunivoque, il suffit que F' soit facteur direct de F .

En effet, soient f l'application canonique de F' dans F , p un projecteur de F sur F' ; alors $p \circ f$ est l'automorphisme identique de F' . En faisant le produit tensoriel de f , p avec l'automorphisme identique de G , on obtient des automorphismes $F' \otimes G \rightarrow F \otimes G \rightarrow F' \otimes G$, dont le composé est l'automorphisme identique de $F' \otimes G$. Donc $F' \otimes G \rightarrow F \otimes G$ est biunivoque (et de plus $F \otimes G \rightarrow F' \otimes G$ est un projecteur). Dans ce cas, on identifie toujours $F' \otimes G$ à un sous-module de $F \otimes G$.

Remarque : la condition du théorème 2 est toujours remplie dans le cas des espaces vectoriels sur un corps commutatif.

Supposons maintenant que F soit somme directe de sous-modules F_i (en nombre fini ou infini). D'après le théorème 2, les $F_i \otimes G$ s'identifient à des sous-modules de $F \otimes G$. Je dis que $F \otimes G$ est somme directe des $F_i \otimes G$. En effet :

- 1) $F \otimes G$ est somme des $F_i \otimes G$, car tout élément de $F \otimes G$ est somme finie d'éléments de la forme $x \otimes y$, où x est une somme finie $\sum x_i$ ($x_i \in F_i$)
- 2) les projecteurs p_i de F sur les F_i définissent des projecteurs p'_i de $F \otimes G$ sur les $F_i \otimes G$, et puisque $p_i p_j = 0$ pour $i \neq j$, on a $p'_i p'_j = 0$,

ce qui signifie que la somme des $F_i \otimes G$ est directe.

Application : si F est un module libre de base (f_i) , tout élément de $F \otimes G$ s'écrit d'une seule manière comme somme finie $\sum f_i \otimes g_i$ (où $g_i \in G$); le module $F \otimes G$ est isomorphe au module des combinaisons linéaires formelles (finies) d'éléments (f_i) à coefficients dans G .

En supposant que G soit aussi décomposé en somme directe, on obtient :

Théorème 3.— Si F est somme directe de sous-modules F_i et G somme directe de sous-modules G_j , les $F_i \otimes G_j$ s'identifient à des sous-modules de $F \otimes G$, qui en est la somme directe.

Application : si F est un module libre de base (f_i) , G un module libre de base (g_j) , les $f_i \otimes g_j$ forment une base de $F \otimes G$, qui est donc libre.

Produit tensoriel de modules gradués : si F et G sont gradués (F étant somme directe de sous-modules F_p et G somme directe de sous-modules G_q), $F \otimes G$ est somme directe des sous-modules $F_p \otimes G_q$, donc est bigradué. On obtient une graduation sur $F \otimes G = K$ en définissant le sous-module K_n des éléments homogènes de degré n comme étant $\sum_{p+q=n} F_p \otimes G_q$; $p+q$ s'appelle le degré total d'un élément de $F_p \otimes G_q$.

6.- Cas particulier des groupes abéliens.

Outre le théorème 2 ci-dessus, on a d'autres conditions suffisantes pour que $F' \otimes G \rightarrow F \otimes G$ soit biunivoque (F' sous-module de F).

Théorème 4.— Si l'un des groupes G et F/F' est sans torsion, l'homomorphisme $F' \otimes G \rightarrow F \otimes G$ est biunivoque.

Démonstration : 1er cas : supposons d'abord que F et G aient un nombre fini de générateurs. Si F/F' est sans torsion, F/F' est libre, donc F' est facteur direct de F , et on applique le théorème 2. Si G est sans torsion, G est libre; si (g_i) est une base de G , un élément de $F' \otimes G$ s'écrit d'une seule manière $\sum f_i \otimes g_i$, où $f_i \in F'$; l'image canonique de cet élément dans $F \otimes G$ ne peut être nulle que si les f_i sont nuls. C.Q.F.D.

2e cas : cas général. Soient f'_i des éléments de F' en nombre fini, et g_i des éléments de G (même ensemble d'indices). On veut montrer que si $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F \otimes G$, alors $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F' \otimes G$. Or si $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F \otimes G$, il existe (proposition 1) des sous-modules F_1 et G_1 à un nombre fini de générateurs, contenant les f'_i et les

g_i respectivement, tels que $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F_1 \otimes G_1$. D'après ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, l'homomorphisme $(F' \cap F_1) \otimes G_1 \rightarrow F_1 \otimes G_1$ est biunivoque ; donc $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $(F' \cap F_1) \otimes G_1$, et a fortiori dans $F' \otimes G$. C.Q.F.D.

7.- Produit tensoriel de modules gradués à dérivation.

Soit G un module gradué à dérivation (par exemple, un groupe gradué à dérivation), et g un module quelconque (par exemple, un groupe abélien quelconque). Les projecteurs p_n de la graduation de G définissent des projecteurs dans $G \otimes g$, qui devient un module gradué. On supposera que G est somme directe des $G_n = p_n(G)$; alors $G \otimes g$ est somme directe des $G_n \otimes g$.

$G \otimes g$ étant ainsi gradué, on considère l'endomorphisme $d \otimes 1$ de $G \otimes g$, où d désigne l'opérateur de dérivation de G , et 1 l'automorphisme identique de g . Cet endomorphisme, que nous désignerons encore par d , définit, avec la graduation, une structure de module gradué à dérivation sur $G \otimes g$; on a

$$d(x \otimes \alpha) = (dx) \otimes \alpha \quad (x \in G, \alpha \in g).$$

Exemple : G est le groupe des chaînes (à coefficients entiers) d'un complexe simplicial, ou des chaînes singulières d'un espace topologique. Dans les deux cas, G est un groupe libre, et $G \otimes g$ s'identifie au groupe des combinaisons linéaires formelles de simplexes à coefficients dans le groupe g (chaînes "à coefficients dans g "). C'est un groupe à dérivation.

Dans le cas général, on a un module dérivé $H(G \otimes g)$, qui est gradué. Par exemple : le groupe d'homologie (simpliciale ou singulière) à coefficients dans un groupe g . Problème : étudier les relations entre $H(G \otimes g)$, $H(G)$ et g . On reviendra tout à l'heure sur ce problème, au moins dans le cas des groupes abéliens, et dans celui des espaces vectoriels sur un corps.

Soient maintenant G et G' deux groupes (ou, plus généralement modules) gradués à dérivation (N.B. : désormais, pour fixer les idées, on parlera de groupes, sauf mention du contraire). Soient d et d' leurs opérateurs de dérivation, supposés du même degré r ($r = \pm 1$). $G \otimes G'$ est bigradué, et aussi gradué (ci-dessus, fin du paragraphe 5). Dans $G \otimes G'$, on a deux opérateurs $d \otimes 1$ et $1 \otimes d'$, que, par abus de langage, nous noterons d et d' . Vis-à-vis de la graduation de $G \otimes G'$, ils sont de degré r ; et comme $dd = 0$, $d'd' = 0$, on a deux structures de groupe gradué à dérivation sur $G \otimes G'$.

Mais c'est à une troisième structure que nous nous intéresserons. Nous

appellerons d et d' des opérateurs de dérivation "partielle" sur $G \otimes G'$. Avant de définir une "dérivation totale", observons que $d+d'$ n'est pas de carré nul, puisque $dd' = d'd$. Mais définissons, sur $G \otimes G'$, l'opérateur $\bar{d}'$ par

$$\bar{d}'(x \otimes y) = \bar{x} \otimes (d'y) \quad (\text{où } \bar{x} = (-1)^p x \text{ si } x \text{ de degré } p);$$

on a $d\bar{d}' + \bar{d}'d = 0$, donc $(d+\bar{d}')(d+\bar{d}') = 0$. L'opérateur $d+\bar{d}' = D$ est un opérateur de dérivation, de degré r . Sauf mention du contraire, quand on parlera de $G \otimes G'$ comme groupe gradué à dérivation, on le supposera muni de D .

Quand tous les éléments de G' sont de degré 0, on retrouve la définition donnée d'abord de $G \otimes g$.

Exemple : étant donnés deux complexes simpliciaux, les "cellules" du complexe-produit forment la base d'un groupe de "chaînes", isomorphe au produit tensoriel des groupes de chaînes des deux complexes ; et D est l'opérateur "bord" de ce groupe de chaînes.

Dans tous les cas, le nouveau groupe à dérivation $G \otimes G'$ a un groupe dérivé $H(G \otimes G')$. On s'occupera plus loin des relations entre $H(G)$, $H(G')$ et $H(G \otimes G')$.

8.- Quelques propriétés du produit tensoriel de deux groupes gradués à dérivation.

Isomorphisme canonique de $G \otimes G'$ sur $G' \otimes G$: ce n'est pas tout à fait celui défini ci-dessus (paragraphe 2), à cause de la structure graduée. L'isomorphisme canonique est ici défini par

$$x \otimes y \rightarrow (-1)^{pq} y \otimes x \quad \text{pour } x \text{ de degré } p \text{ et } y \text{ de degré } q.$$

Si tous les éléments sont de degré 0, on retrouve l'ancienne définition. On vérifie que c'est un isomorphisme permis, vis-à-vis de l'opérateur de dérivation "totale". On en déduit donc un isomorphisme $H(G \otimes G') \rightarrow H(G' \otimes G)$.

Associativité : rien à changer à ce qui a été dit à la fin du paragraphe 2 ; on obtient un isomorphisme permis de $G \otimes (G' \otimes G'')$ sur $(G \otimes G') \otimes G''$; d'où un isomorphisme (canonique) de leurs groupes dérivés.

Produit tensoriel d'homomorphismes permis : soient deux homomorphismes permis

$G \xrightarrow{\varphi} F$ et $G' \xrightarrow{\psi} F'$; le produit tensoriel Φ de φ et ψ est un homomorphisme permis de $G \otimes G'$ dans $F \otimes F'$ (1° il conserve le degré total ; 2° $D\Phi = \Phi D$, la vérification étant aisée). D'où un homomorphisme

$$H(G \otimes G') \rightarrow H(F \otimes F').$$

Opérateur d'homotopie : Proposition 3.- Si h est un opérateur d'homotopie dans G , alors $h \otimes 1$ (où 1 désigne l'automorphisme identique de G') est un opérateur d'homotopie dans $G \otimes G'$.

Plus précisément, supposons h associé à un endomorphisme k , de degré $-r$

$$x - h(x) = dk(x) + kd(x) \text{ pour tout } x \in G ;$$

alors $h \otimes 1$ est associé à $k \otimes 1$ (qui est bien de degré $-r$), car

$$D(k(x) \otimes y) + (k \otimes 1) \cdot D(x \otimes y) = dk(x) \otimes y + \overline{k(x)} \otimes (d'y) + kd(x) \otimes y + k(\overline{x}) \otimes (d'y)$$

et puisque $\overline{k(x)} + \overline{k(x)} = 0$, le second membre se réduit à

$$dk(x) \otimes y + kd(x) \otimes y = x \otimes y - h(x) \otimes y .$$

C.Q.F.D.

9.- Application canonique $H(G) \otimes H(G') \rightarrow H(G \otimes G')$.

Ceci vaut aussi bien pour des A -modules que pour des groupes abéliens. Partons de l'application bilinéaire canonique de $G \otimes G'$ dans $G \otimes G'$. La formule qui donne $D(\overline{x} \otimes y) = (dx) \otimes y + \overline{x} \otimes (d'y)$ montre que si x et y sont des cycles (i.e: $dx = 0$ et $d'y = 0$), $x \otimes y$ est un cycle de $G \otimes G'$; de plus, si x est un "bord" ($x = dz$), et y un cycle, $x \otimes y$ est un "bord" (égal à $D(z \otimes y)$); de même, si x est un cycle et y un bord, $x \otimes y$ est un bord. Par passage au quotient, l'application $(x, y) \rightarrow x \otimes y$ définit donc une application bilinéaire (dite canonique) de $H(G) \otimes H(G')$ dans $H(G \otimes G')$, à laquelle est canoniquement associée une application linéaire :

$$H(G) \otimes H(G') \rightarrow H(G \otimes G') .$$

Si G est une algèbre à dérivation, la multiplication de G définit une application bilinéaire de $G \times G$ dans G , donc une application linéaire de $G \otimes G$ dans G ; et la formule donnant le d d'un produit (exposé 4, paragraphe 8, formule (2)) montre que $G \otimes G \rightarrow G$ est un homomorphisme permis. D'après ce qu'on vient de voir, on en déduit une application $H(G) \otimes H(G) \rightarrow H(G)$, c'est-à-dire une multiplication dans $H(G)$. Ce n'est pas autre chose que la multiplication dans l'algèbre dérivée $H(G)$, telle qu'elle a été définie (exposé 4, paragraphe 8).

10.- Etude de $H(G \otimes G')$

Nous supposons désormais que nous sommes dans l'un des cas suivants :

- cas (a) : G et G' sont des groupes (abéliens) gradués à dérivation, et G est sans torsion ;

- cas (b) : G et G' sont des espaces vectoriels (sur un même corps), gradués à dérivation.

Théorème 5.- Dans ces hypothèses, l'homomorphisme canonique

$$H(G) \otimes H(G') \rightarrow H(G \otimes G')$$

défini au paragraphe 9, est biunivoque (ce qui permet d'identifier $H(G) \otimes H(G')$ à un sous-groupe (resp. sous-espace vectoriel) de $H(G \otimes G')$). De plus, le quotient $H(G \otimes G')/H(G) \otimes H(G')$ est canoniquement isomorphe au noyau de l'application canonique

$$B(G) \otimes H(G') \rightarrow Z(G) \otimes H(G') ,$$

où $Z(G)$ désigne (comme d'habitude) le groupe (resp. espace vectoriel) des "cycles", et $B(G)$ le sous-groupe des "bords".

On peut montrer que ce noyau ne dépend que de $H(G)$ et $H(G')$, et même ne dépend que des sous-groupes de torsion de $H(G)$ et $H(G')$.

Corollaire : dans le cas d'espaces vectoriels, le noyau est évidemment nul; d'où un isomorphisme canonique de $H(G) \otimes H(G')$ sur $H(G \otimes G')$. - Dans le cas (a), nous tirerons plus des conséquences particulières du théorème.

Démonstration du théorème 5.-

Lemme : si l'opérateur d de G est nul, et si l'on est dans l'un des cas (a) ou (b), alors $Z(G \otimes G')$ s'identifie à $G \otimes Z(G')$, $H(G \otimes G')$ s'identifie à $G \otimes H(G')$.

Tout d'abord l'homomorphisme canonique $G \otimes Z(G') \rightarrow G \otimes G'$ est biunivoque puisque G est sans torsion (théorème 4) ou qu'il s'agit d'espaces vectoriels (théorème 2). Ainsi $G \otimes Z(G')$ est identifié à un sous-groupe de $G \otimes G'$. Montrons que c'est exactement le sous-groupe $Z(G \otimes G')$. Or ce dernier est le noyau de l'homomorphisme $\overline{d}$ de $G \otimes G'$ dans $G \otimes G'$, qui est composé de l'homomorphisme $G \otimes G' \rightarrow G \otimes B(G')$ (défini par $\overline{d}$) et de l'homomorphisme canonique $G \otimes B(G') \rightarrow G \otimes G'$. Mais ce dernier est biunivoque à cause de l'hypothèse faite sur G ; donc $Z(G \otimes G')$ est le noyau de l'homomorphisme de $G \otimes G'$ sur $G \otimes B(G')$, noyau qui, d'après le théorème 1 (ou la proposition 2) est l'image, dans $G \otimes G'$, du produit tensoriel de G par le noyau de l'homomorphisme $G' \rightarrow B(G')$, c'est-à-dire précisément $G \otimes Z(G')$.

Ainsi $Z(G \otimes G') = G \otimes Z(G')$. Il est évident que $B(G \otimes G') = G \otimes B(G')$; le quotient $H(G \otimes G') = Z(G \otimes G')/B(G \otimes G')$ s'identifie alors à $G \otimes (Z(G')/B(G'))$ d'après le théorème 1, c'est-à-dire à $G \otimes H(G')$. Ce qui établit le lemme.

Passons à la démonstration dans le cas général où d n'est plus supposé nul. L'application canonique $Z(G) \otimes G' \rightarrow G \otimes G'$ est biunivoque, car le quotient $G/Z(G) \approx B(G)$ est sans torsion dans le cas (a) (on applique le théorème 4). $Z(G) \otimes G'$ sera désormais identifié à un sous-groupe (resp. sous-espace vectoriel) de $G \otimes G'$; et c'est un sous-groupe stable pour l'opérateur de

dérivation totale D , qui du reste se réduit à $\bar{d}'$ sur $Z(G) \otimes G'$. L'homomorphisme d identifie le quotient $(G/Z(G)) \otimes G'$ à $B(G) \otimes G'$. On a une suite exacte d'homomorphismes pour les groupes dérivés (cf. exposé 2, paragraphe 7)

$$\begin{array}{ccc} H(Z(G) \otimes G') & \xrightarrow{\varphi} & H(G \otimes G') \\ \delta \swarrow & & \searrow \psi \\ & H(B(G) \otimes G') & \end{array}$$

où φ est de degré 0, ψ de degré r (à cause de l'identification qui a été faite de $(G/Z(G)) \otimes G'$ à $B(G) \otimes G'$), et δ de degré 0 (même raison).

Je dis : δ est l'homomorphisme qui provient, par passage aux quotients, de l'homomorphisme canonique $B(G) \otimes G' \rightarrow Z(G) \otimes G'$ ($B(G)$ étant considéré comme sous-groupe de $Z(G)$).

Pour le montrer, remontons à la définition de δ (exposé 2, paragraphe 7) : on veut définir $\delta(\bar{\alpha})$, $\bar{\alpha}$ étant un élément de $H(B(G) \otimes G')$. Pour cela, on prend un $\alpha \in Z(B(G) \otimes G')$ tel que $\bar{\alpha}$ soit la classe de α ; ici, en vertu du lemme, α est dans $B(G) \otimes Z(G')$. Puis on choisit un $\beta \in G \otimes G'$ qui donne naissance à α par l'application d de $G \otimes G'$ dans $B(G) \otimes G'$; ici, on pourra prendre β dans $G \otimes Z(G')$. Alors, on doit prendre $D\beta$, qui sera un "cycle" de $Z(G) \otimes G'$, cycle dont la classe d'homologie est l'élément de $H(Z(G) \otimes G')$ qu'on veut définir, à savoir $\delta(\bar{\alpha})$. Ici, $D\beta$ est égal à $d\beta$, donc à α , qu'on considère non plus comme élément de $B(G) \otimes G'$, mais comme élément de $Z(G) \otimes G'$. Et ceci établit ce qui avait été affirmé.

Appliquons à nouveau le lemme : $H(Z(G) \otimes G')$ et $H(B(G) \otimes G')$ s'identifient respectivement à $Z(G) \otimes H(G')$ et $B(G) \otimes H(G')$, de sorte que la suite exacte devient

$$\begin{array}{ccc} Z(G) \otimes H(G') & \xrightarrow{\varphi} & H(G \otimes G') \\ \delta \swarrow & & \searrow \psi \\ & B(G) \otimes H(G') & \end{array}$$

Cette fois, δ est devenu l'homomorphisme canonique ($B(G)$ étant sous-groupe de $Z(G)$). Puisque la suite est exacte, l'image de φ identifie un sous-groupe de $H(G \otimes G')$ au quotient de $Z(G) \otimes H(G')$ par l'image de $B(G) \otimes H(G')$, quotient qui s'identifie lui-même (théorème 1) à $H(G) \otimes H(G')$. De plus, l'application biunivoque de $H(G) \otimes H(G')$ dans $H(G \otimes G')$ qu'on obtient ainsi est la même que celle définie au paragraphe 9. Quant au quotient de $H(G \otimes G')$ par l'image de φ (identifiée, on vient de le voir, à $H(G) \otimes H(G')$), la suite exacte l'identifie au noyau de $B(G) \otimes H(G') \rightarrow Z(G) \otimes H(G')$. Et ceci achève la démonstration.

11.- Conséquences du théorème 5.

On peut d'abord préciser ce qui concerne les degrés, en tenant compte des degrés des homomorphismes de la suite exacte. On voit que :

$$\sum_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(G') \text{ s'identifie à un sous-groupe de } H_n(G \otimes G')$$

(dans le cas des espaces vectoriels, $\sum_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(G')$ s'identifie à $H_n(G \otimes G')$ tout entier) ;

le quotient est isomorphe (canoniquement) à la somme directe des noyaux des homomorphismes

$$B_p(G) \otimes H_q(G') \rightarrow Z_p(G) \otimes H_q(G')$$

pour tous les couples (p, q) tels que $p+q=n+r$, $(r = \pm 1)$.

Si (G étant un groupe sans torsion) $H(G)$ ou $H(G')$ est sans torsion, alors l'homomorphisme canonique $H(G) \otimes H(G') \rightarrow H(G \otimes G')$ est un isomorphisme sur. (En effet, le noyau de $B(G) \otimes H(G') \rightarrow Z(G) \otimes H(G')$ est nul, d'après le théorème 4).

Si (G étant sans torsion) l'un des groupes $H(G)$ et $H(G')$ est "trivial" (c'est-à-dire, s'il s'agit par exemple de $H(G)$: si $H_p(G) = 0$ pour tout $p \neq 0$, et $H_0(G)$ isomorphe au groupe additif des entiers), alors on a un isomorphisme canonique de $H_n(G \otimes G')$ sur $H_n(G')$ (resp. sur $H_n(G)$).

Si (G étant sans torsion) l'un au moins des groupes $H(G)$ et $H(G')$ est nul, alors $H(G \otimes G')$ est nul.

Complément au théorème 5.— Supposons que G et G' soient deux groupes libres ; alors $H(G) \otimes H(G')$ est facteur direct de $H(G \otimes G')$ (et par suite le groupe $H(G \otimes G')$ est bien déterminé, à une isomorphie près, par la connaissance des groupes $H(G)$ et $H(G')$). — Démonstration : soient p et p' des projecteurs de G et G' sur $Z(G)$ et $Z(G')$ respectivement ; $p \otimes p'$ est un projecteur de $G \otimes G'$ sur $Z(G) \otimes Z(G')$; par passage aux quotients, on en déduit un projecteur de $H(G \otimes G')$ sur $H(G) \otimes H(G')$.

12.- Produit tensoriel d'algèbres graduées.

Soit G une algèbre graduée à dérivation (sur un anneau commutatif A donné une fois pour toutes). La multiplication de G définit, on l'a vu, un homomorphisme permis $G \otimes G \rightarrow G$; il applique $G_p \otimes G_q$ dans G_{p+q} . Sur le produit tensoriel $G \otimes G'$ de deux telles algèbres (produit tensoriel qui est un A -module gradué à dérivation), on définit une structure multiplicative :

le produit de $x \otimes x'$ et $y \otimes y'$ sera $(-1)^{p'q}(xy) \otimes (x'y')$, p' désignant le degré de x' supposé homogène, et q le degré de y supposé homogène. Cette multiplication peut aussi être obtenue comme suit : on définit une application linéaire de $(G \otimes G') \otimes (G \otimes G')$ dans $G \otimes G'$, en identifiant le premier module à $G \otimes (G' \otimes G) \otimes G'$, puis l'appliquant dans $G \otimes (G \otimes G') \otimes G'$ grâce à l'isomorphisme canonique de $G' \otimes G$ sur $G \otimes G'$ (paragraphe 8) ; cela fait, $G \otimes (G \otimes G') \otimes G'$ étant identifié à $(G \otimes G) \otimes (G' \otimes G')$, on a l'homomorphisme de ce module dans $G \otimes G'$, provenant des homomorphismes $G \otimes G \rightarrow G$ et $G' \otimes G' \rightarrow G'$ définis par les structures multiplicatives de G et de G' .

Ceci permet de montrer facilement : l'isomorphisme $G \otimes G' \rightarrow G' \otimes G$ (défini au paragraphe 8) est aussi un isomorphisme pour les structures multiplicatives.

Si G et G' sont des algèbres associatives, il en est de même de $G \otimes G'$.

Si $G \rightarrow F$ et $G' \rightarrow F'$ sont des homomorphismes d'algèbres, leur produit tensoriel est un homomorphisme d'algèbres.

Si G et G' sont des algèbres graduées à dérivation, $G \otimes G'$ est aussi une algèbre graduée à dérivation : ce qui veut dire que la loi de multiplication définit un homomorphisme permis de $(G \otimes G') \otimes (G \otimes G')$ dans $G \otimes G'$; c'est ce qui résulte aussitôt de la définition de cet homomorphisme donnée plus haut.

Dans ce cas, on a donc une structure multiplicative sur $H(G \otimes G')$, qui devient une algèbre graduée. De plus : l'homomorphisme (défini au paragraphe 9) de $H(G) \otimes H(G')$ dans $H(G \otimes G')$ est ici un homomorphisme d'algèbres ; cela résulte du fait que l'application $Z(G) \otimes Z(G') \rightarrow Z(G \otimes G')$ est ici un homomorphisme d'algèbres.
