

SÉMINAIRE A. GROTHENDIECK

PIERRE CARTIER

Les groupes $\text{Ext}^s(A, B)$

Séminaire A. Grothendieck, tome 1 (1957), exp. n° 3, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SG_1957__1__A3_0

© Séminaire A. Grothendieck
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire A. Grothendieck » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES GROUPES $\text{Ext}^s(A, B)$

(Exposé de Pierre CARTIER, le 10.5.57)

1.- Les classes d'homotopie.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne ; rappelons qu'on appelle complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$ un objet formé d'une suite $(F^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et d'une suite $(d_F^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour chaque n , d_F^n est un morphisme $F^n \rightarrow F^{n+1}$ et où $d_F^{n+1} d_F^n = 0$ pour tout n . Les complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$ forment une catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{C})$: un morphisme d'un complexe F dans un complexe G est une suite $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour chaque n , f^n est un morphisme de F^n dans G^n et où $d_G^n f^n = f^{n+1} d_F^n$ pour tout n . Plus généralement, introduisons, pour tout entier s , le groupe $\text{Hom}^s(F, G)$ composé des suites (f^n) où, pour chaque n , f^n est un morphisme de F^n dans G^{n+s} et où $d_G^{n+s} f^n = (-1)^s f^{n+1} d_F^n$ pour tout n ; on a donc $\text{Hom}^0(F, G) = \text{Hom}(F, G)$. Soient F_1, F_2, F_3 des complexes ; si $f = (f^n) \in \text{Hom}^s(F_1, F_2)$, $f' = (f'^n) \in \text{Hom}^t(F_2, F_3)$, on vérifie tout de suite que la suite $f'f = (f'^{n+s} f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $\text{Hom}^{s+t}(F_1, F_3)$; l'application $(f, f') \rightarrow f'f$ est bilinéaire. De plus, si F_4 est un quatrième complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $f'' \in \text{Hom}^u(F_3, F_4)$, on a $f''(f'f) = (f''f')f$.

Soient F et G des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$; soit $(k^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite telle que $k^n \in \text{Hom}(F^n, G^{n+s-1})$. Si on pose $f^n = d_G^{n+s-1} k^n + (-1)^{s-1} k^{n+1} d_F^n$, on vérifie tout de suite que $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $\text{Hom}^s(F, G)$; les éléments de $\text{Hom}^s(F, G)$ que l'on peut obtenir de cette manière sont dits être homotopes à 0 ; ils forment un groupe $\text{Hom}_0^s(F, G)$; deux éléments f, g de $\text{Hom}^s(F, G)$ sont dits homotopes si $f - g \in \text{Hom}_0^s(F, G)$; le groupe $\text{Hom}^s(F, G) / \text{Hom}_0^s(F, G)$ sera appelé le groupe des classes d'homotopie de degré s et sera désigné par $\underline{H}^s(F, G)$. Si F_1, F_2, F_3 sont des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}^s(F_1, F_2)$, $f' \in \text{Hom}^t(F_2, F_3)$, on vérifie tout de suite que $f'f$ est homotope à 0 si l'un

au moins des éléments $\bar{f}$ ou $\bar{f}'$ est homotope à 0 ; on en déduit une application bilinéaire $(\bar{f}, \bar{f}') \rightarrow \bar{f} \cdot \bar{f}'$ de $\underline{H}^s(F_1, F_2) \times \underline{H}^t(F_2, F_3)$ dans $\underline{H}^{s+t}(F_1, F_3)$; si F_4 est un quatrième complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $\bar{f}'' \in \underline{H}^u(F_3, F_4)$, on a $\bar{f}''(\bar{f} \cdot \bar{f}') = (\bar{f}'' \bar{f}') \cdot \bar{f}$.

Soient F et G des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $f = (f^n)$ un élément de $\text{Hom}^s(F, G)$; il est clair que f^n induit un morphisme du noyau de d_F^n dans le noyau de d_G^{n+s} et également un morphisme de l'image de d_F^{n-1} dans l'image de d_G^{n+s-1} ; f^n définit donc par passage aux quotients un morphisme f_*^n de $H^n(F)$ dans $H^{n+s}(G)$; nous posons $f_* = (f_*^n)_{n \in \mathbb{Z}}$. L'application $f \rightarrow f_*$ est un homomorphisme du groupe $\text{Hom}^s(F, G)$ dans le groupe $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(H^n(F), H^{n+s}(G))$. On vérifie immédiatement que la condition $f \in \text{Hom}_0^s(F, G)$ entraîne $f_* = 0$; on en déduit un homomorphisme $\bar{f} \rightarrow \bar{f}_*$ de $\underline{H}^s(F, G)$ dans le groupe $\prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(H^n(F), H^{n+s}(G))$. Si F_1, F_2, F_3 sont des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$, $\bar{f} \in \underline{H}^s(F_1, F_2)$, $\bar{f}' \in \underline{H}^t(F_2, F_3)$, $\bar{f}_* = (f_*^n)$, $\bar{f}'_* = (f'^n_*)$, on a $(\bar{f} \cdot \bar{f}')_* = (f_*^{n+s} f'^n_*)$.

Rappelons qu'on appelle résolution d'un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$ un couple formé d'un complexe $F = (F^n)$ et d'un morphisme $\xi : A \rightarrow F^0$ (l'augmentation) qui possèdent les propriétés suivantes : on a $F^n = 0$ pour $n < 0$; la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\xi} F^0 \xrightarrow{d_F^0} F^1$$

est exacte. Une résolution est dite exacte si on a $H^n(F) = 0$ pour tout $n > 0$; elle est dite injective si les F^n sont des objets injectifs de $\mathcal{C}$.

Soient A un objet de $\mathcal{C}$ et $G = (G^n)$ un complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$; pour tout n , désignons par $\tilde{d}^n$ l'homomorphisme $u \rightarrow d_G^n u$ de $\text{Hom}(A, G^n)$ dans $\text{Hom}(A, G^{n+1})$. On a $\tilde{d}^{n+1} \tilde{d}^n = 0$; la suite $(\text{Hom}(A, G^n))$, munie des opérateurs $\tilde{d}^n$, est donc un complexe de groupes abéliens que nous noterons $\text{Hom}(A, G)$. Soient maintenant (F, ξ) une résolution de A et s un entier ; si $f = (f^n) \in \text{Hom}^s(F, G)$, $f^0 \xi$ est un élément de $\text{Hom}(A, G^s)$; c'est un cycle, car on a $d_G^{s+1} f^0 \xi = (-1)^s f^1 d_F^0 \xi = 0$. Si $f \in \text{Hom}_0^s(F, G)$, $f^0 \xi$ est un bord dans $\text{Hom}(A, G^s)$; en effet, il existe alors des morphismes $k^0 : F^0 \rightarrow G^{s-1}$ et $k^1 : F^1 \rightarrow G^s$ tels que $f^0 = d_G^{s-1} k^0 + (-1)^s k^1 d_F^0$, d'où $f^0 \xi = d_G^{s-1} k^0 \xi$. On en déduit l'existence d'un homomorphisme φ^s de $\underline{H}^s(F, G)$ dans $H^s(\text{Hom}(A, G))$ qui applique la classe d'homotopie d'un élément $(f^n) \in \text{Hom}^s(F, G)$ sur la classe de cohomologie de $f^0 \xi$.

THÉOREME 1.- Soient (F, ε) une résolution exacte d'un objet A de $\mathcal{C}$ et $G = (G^n)$ un complexe tel que les G^n soient tous des objets injectifs de $\mathcal{C}$. Alors, pour tout s , l'homomorphisme φ^s de $H_{\mathcal{W}}^s(F, G)$ dans $H^s(\text{Hom}(A, G))$ défini ci-dessus est un isomorphisme.

Montrons d'abord que φ^s est injectif. Soit $f = (f^n)$ un élément de $\text{Hom}^s(F, G)$ tel que $f^0 \varepsilon$ soit un bord dans $\text{Hom}(A, G^s)$. Déterminons inductivement des éléments $k^n \in \text{Hom}(F^n, G^{n+s-1})$ comme suit : on pose $k^n = 0$ pour $n < 0$; pour $n = 0$, il résulte de l'hypothèse faite que $f^0 \varepsilon$ est de la forme $d_G^{s-1} z$, où z est un morphisme de A dans G^{s-1} ; comme ε est un monomorphisme et G^{s-1} injectif, on peut écrire $z = k^0 \varepsilon$ avec un $k^0 \in \text{Hom}(F^0, G^{s-1})$. Comme le noyau de d_F^0 est l'image de ε , la formule $(f^0 - d_G^{s-1} k^0) \varepsilon = 0$ montre que le noyau de $f^0 - d_G^{s-1} k^0$ contient celui de d_F^0 . Soit maintenant $n \geq 0$; supposons déjà déterminé un élément $k^n \in \text{Hom}(F^n, G^{n+s-1})$ tel que le noyau de $f^n - d_G^{n+s-1} k^n$ contienne celui de d_F^n . Alors il résulte du fait que G^{n+s} est injectif qu'il existe un morphisme $k^{n+1} : F^{n+1} \rightarrow G^{n+s}$ tel que $(-1)^s (f^n - d_G^{n+s-1} k^n) = k^{n+1} d_F^n$. On a $(f^{n+1} - d_G^{n+s} k^{n+1}) d_F^n = (-1)^s d_G^{n+s} (f^n - (f^n - d_G^{n+s-1} k^n)) = 0$ puisque $f^{n+1} d_F^n = (-1)^s d_G^{n+s} f^n$ et $d_G^{n+s} d_G^{n+s-1} = 0$. Le noyau de $f^{n+1} - d_G^{n+s} k^{n+1}$ contient donc l'image de d_F^n , qui est le noyau de d_F^{n+1} puisque $H^{n+1}(F) = 0$. Comme on a $f^n = d_G^{n+s-1} k^n + (-1)^s k^{n+1} d_F^n$ pour tout n , on a $f \in \text{Hom}_0^s(F, G)$, ce qui montre que φ^s est injectif.

Donnons nous maintenant un cycle u quelconque dans $\text{Hom}(A, G^s)$. Nous allons construire inductivement une suite (f^n) , où $f^n \in \text{Hom}(F^n, G^{n+s})$. Nous posons $f^n = 0$ pour $n < 0$. Puisque ε est un monomorphisme et G^s injectif, on peut écrire $u = f^0 \varepsilon$, avec un $f^0 \in \text{Hom}(F^0, G^s)$. On a $d_G^s f^0 \varepsilon = d_G^s u = 0$; le noyau de $d_G^s f^0$ contient donc l'image de ε , qui est le noyau de d_F^0 . Supposons maintenant que $n \geq 0$ et qu'on ait déjà construit un élément $f^n \in \text{Hom}(F^n, G^{n+s})$ tel que le noyau de $d_G^{n+s} f^n$ contienne celui de d_F^n . Comme G^{n+s+1} est injectif, il y a un élément $f^{n+1} \in \text{Hom}(F^{n+1}, G^{n+s+1})$ tel que $d_G^{n+s} f^n = (-1)^s f^{n+1} d_F^n$; on a $d_G^{n+s+1} f^{n+1} d_F^n = 0$ puisque $d_G^{n+s+1} d_G^{n+s} = 0$; le noyau de $d_G^{n+s+1} f^{n+1}$ contient donc l'image de d_F^n , qui est le noyau de d_F^{n+1} puisque $H^{n+1}(F) = 0$. La suite (f^n) ainsi construite est un élément de $\text{Hom}^s(F, G)$, et on a $f^0 \varepsilon = u$; ceci montre que φ^s est surjectif. Le théorème 1 est donc établi.

Supposons maintenant qu'il y ait un morphisme η d'un objet B de la catégorie dans G^0 tel que (G, η) soit une résolution de B . Nous allons alors établir un isomorphisme de $H^0(\text{Hom}(A, G))$ sur $\text{Hom}(A, B)$. Comme η est un monomorphisme, $v \rightarrow \eta v$ est un isomorphisme ψ de $\text{Hom}(A, B)$ sur un sous-groupe de $\text{Hom}(A, G^0)$; comme l'image de η est le noyau de d_G^0 , l'image de ψ est le noyau de $\tilde{d}^0$, c'est-à-dire le groupe $H^0(\text{Hom}(A, G))$ puisque $d_G^{-1} = 0$. On a donc le

COROLLAIRE au théorème 1.— Soient A et B des objets de $\mathcal{C}$, (F, ξ) une résolution exacte de A et (G, η) une résolution injective de B . Il y a alors un isomorphisme Θ de $H^0(F, G)$ sur $\text{Hom}(A, B)$ qui applique la classe d'homotopie d'un élément $f = (f^n)$ de $\text{Hom}(F, G)$ sur l'élément v de $\text{Hom}(A, B)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\xi} & F^0 \\ v \downarrow & & \downarrow f^0 \\ B & \xrightarrow{\eta} & G^0 \end{array}$$

soit commutatif.

2.- Les groupes $\text{Ext}^s(A, B)$.

Nous supposons à partir de maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante : tout objet de $\mathcal{C}$ admet un monomorphisme dans un objet injectif. Dans ces conditions, tout objet A de $\mathcal{C}$ admet au moins une résolution exacte et injective. Nous poserons

$$R(A) = \xi_R \quad (R \text{ est une résolution exacte et injective de } A) \quad (1).$$

De plus, nous ferons les conventions de notations suivantes : si F est une résolution d'un objet A , nous désignerons par ξ_F l'augmentation de la résolution F et nous désignerons par $(F^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le complexe qui intervient dans la définition de F . Si F et G sont des résolutions d'objets A et B , nous désignerons par $H_{\text{ww}}^s(F, G)$, $\text{Hom}^s(F, G)$ les groupes $H_{\text{ww}}^s((F^n), (G^n))$, $\text{Hom}^s((F^n), (G^n))$, par $\text{Hom}(A, G)$ le complexe $\text{Hom}(A, (G^n))$ et par φ_B^s l'homomorphisme de $H_{\text{ww}}^s(F, G)$ dans $\text{Hom}(A, G)$ qui a été défini avant l'énoncé du théorème 1. Nous désignerons par ξ_A l'augmentation de $R(A)$ et par d_A^n ses opérateurs différentiels.

Si A, B sont des objets de $\mathcal{C}$ et s un entier, nous poserons

(1) Le symbole ξ est le symbole de choix universel de Hilbert-Bernays : Pour toute relation $U \{x\}$ comportant une variable x , l'objet $\xi_x(U \{x\}) = y$ est tel que l'on ait le théorème :
 $"U \{y\}$ équivaut à "il existe x tel que $U \{x\}$ " " .

$$\text{Ext}^s(A, B) = H_{\infty}^s(R(A), R(B)) .$$

3-05

Nous désignerons par $\bar{\theta}$ ou $\bar{\theta}_{A,B}$ l'isomorphisme de $\text{Ext}^0(A, B)$ sur $\text{Hom}(A, B)$ défini dans le corollaire au théorème 1.

Si A_1, A_2, A_3 sont des objets de $\mathcal{C}$, il y a un accouplement $(u_1, u_2) \rightarrow u_2 u_1$ des groupes $\text{Ext}^p(A_1, A_2)$ et $\text{Ext}^q(A_2, A_3)$ à valeurs dans $\text{Ext}^{p+q}(A_1, A_3)$; de plus, si A_4 est un quatrième objet et si $u_1 \in \text{Ext}^p(A_1, A_2)$, $u_2 \in \text{Ext}^q(A_2, A_3)$, $u_3 \in \text{Ext}^r(A_3, A_4)$, on a $u_3(u_2 u_1) = (u_3 u_2) u_1$.

L'application φ_B^s est un isomorphisme de $\text{Ext}^s(A, B)$ sur $H^s(\text{Hom}(A, R(B)))$. Soit maintenant f un morphisme de B dans un nouvel objet B' ; soit $\bar{f}$ l'élément de $\text{Ext}^0(B, B')$ tel que $\bar{\theta}(\bar{f}) = f$, et soit (f^n) un représentant de $\bar{f}$ dans $\text{Hom}^0(R(B), R(B'))$; on a donc $f^0 \varepsilon_B = \varepsilon_{B, f}$; l'application $\alpha \rightarrow f^n \alpha$ est un homomorphisme de $\text{Hom}(A, R^n(B))$ dans $\text{Hom}(A, R^n(B'))$, et la suite de ces applications est un morphisme du complexe $\text{Hom}(A, R(B))$ dans le complexe $\text{Hom}(A, R(B'))$; ce morphisme définit un morphisme f_* de $H^s(\text{Hom}(A, R(B)))$ dans $H^s(\text{Hom}(A, R(B')))$. On a $f_* (\varphi_B^s(u)) = \varphi_{B'}^s(\bar{\theta}(f)u)$ pour tout $u \in \text{Ext}^s(A, B)$.

Représentons en effet u par un élément $(u^n) \in \text{Hom}^s(R(A), R(B))$; $\varphi_B^s(u)$ est alors la classe de cohomologie de $u^0 \varepsilon_A$ et son image par f_* est la classe de cohomologie de $f^0 u^0 \varepsilon_A$. Par ailleurs $\bar{\theta}(f)u$ est représenté par l'élément $(f^n u^n)$ de $\text{Hom}^s(R(A), R(B'))$ et $\varphi_{B'}^s(\bar{\theta}(f)u)$ est par suite la classe de cohomologie de $f^0 u^0 \varepsilon_A$, ce qui démontre notre assertion.

Pour un objet fixe A , si on fait correspondre à tout objet B de $\mathcal{C}$ le groupe $\text{Ext}^s(A, B)$ et à tout morphisme f de B dans un objet B' l'application $u \rightarrow \bar{\theta}^{-1}(f)u$ de $\text{Ext}^s(A, B)$ dans $\text{Ext}^s(A, B')$, on obtient un foncteur covariant sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens (en vertu des relations d'associativité pour les accouplements); ce que nous venons de dire établit que les φ_B^s définissent un isomorphisme de ce foncteur sur le s -ième dérivé du foncteur $\text{Hom}(A, *)$. On verrait de la même manière que, pour B fixe, il y a un foncteur contrevariant sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens qui associe à tout objet A le groupe $\text{Ext}^s(A, B)$ et à tout morphisme $f: A \rightarrow A'$ l'homomorphisme $u \rightarrow u \bar{\theta}^{-1}(f)$ de $\text{Ext}^s(A', B)$ dans $\text{Ext}^s(A, B)$.

A toute résolution exacte F d'un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$ on peut associer un élément j_F de $H_{\infty}^0(F, R(A))$, à savoir l'élément dont l'image par l'isomorphisme $\bar{\theta}$ du corollaire au théorème 1 est le morphisme identique de A . Il est clair que, si $v \in \text{Ext}^s(A, B)$, où B est un objet de $\mathcal{C}$, on a $\varphi_B^s(v j_F) = \varphi_B^s(v)$. Soient maintenant G une résolution exacte de B et u un

élément de $H_{\mathcal{W}}^S(F, G)$; il y alors un élément $E(u)$ et un seul de $\text{Ext}^S(A, B)$ tel que $E(u)j_F = j_G u$, à savoir l'élément défini par la condition que $\varphi_B^S(E(u)) = \varphi_B^S(j_G u)$; on obtient ainsi un homomorphisme E de $H_{\mathcal{W}}^S(F, G)$ dans $\text{Ext}^S(A, B)$. Il résulte immédiatement de la définition que l'on a $E(u_2 u_1) = E(u_2)E(u_1)$ si $u_1 \in H_{\mathcal{W}}^S(F_1, F_2), u_2 \in H_{\mathcal{W}}^t(F_2, F_3)$, F_1, F_2 et F_3 étant des résolutions exactes d'objets de la catégorie.

3.- L'interprétation de Yoneda.

Si A, B sont des objets de $\mathcal{C}$, nous désignerons par $S_{\mathcal{W}}^s(B, A)$ (s étant un entier > 0) la classe dont les éléments sont les résolutions exactes S de B telles que l'on ait $S^s = A$, $S^n = 0$ pour $n > s$. Soit S un élément de cette classe, et soit F une résolution de A dans $\mathcal{C}$; si on pose $G^n = S^n$ si $n < s$, $G^n = F^{n-s}$ si $n \geq s$, $\varepsilon_G = \varepsilon_S$, $d_G^n = d_S^n$ si $n < s-1$, $d_G^{s-1} = \varepsilon_F d_S^{s-1}$, $d_G^n = d_F^{n-s}$ si $n \geq s$, on obtient une résolution de B , que nous désignerons par SF ; si F est exacte, il en est de même de SF . Si A, A', B sont des objets de $\mathcal{C}$, $S \in S_{\mathcal{W}}^s(B, A)$ et $T \in S_{\mathcal{W}}^t(A, A')$, ST est un élément de $S_{\mathcal{W}}^{s+t}(B, A')$ et on a $(ST)F' = S(TF')$ pour toute résolution F' de A' .

Soit S un élément de $S_{\mathcal{W}}^s(B, A)$; j_S est alors un élément de $H_{\mathcal{W}}^0(S, R(B))$; choisissons en un représentant (j_S^n) ; alors j_S^s est un cycle de $\text{Hom}(A, R^s(B))$ puisque $S^{s+1} = 0$, et sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix du représentant (j_S^n) de j_S ; car, si $(j_S'^n)$ est un autre représentant de j_S , il y a des morphismes $k^n : S^n \rightarrow R^{n-1}(B)$ tels que l'on ait $j_S'^n = j_S^n + d_B^{n-1} k^n + k^{n+1} d_S^n$, d'où $j_S'^s = j_S^s + d_B^{s-1} k^s$. La classe de cohomologie de j_S^s est l'image par φ_B^S d'un élément de $\text{Ext}^S(A, B)$, que nous désignerons par $e(S)$. On peut obtenir un représentant de $e(S)$ de la manière suivante : soit $(j_{SR(A)}^n)$ un représentant de $j_{SR(A)}$; on peut alors supposer que $j_S^n = j_{SR(A)}^n$ pour $n < s$; si on pose $e^n = (-1)^{ns} j_{SR(A)}^{n+s}$ si $n \geq 0$, $e^n = 0$ si $n < 0$, (e^n) appartient à $\text{Hom}^S(R(A), R(B))$ et on a $e^0 \varepsilon_A d_S^{s-1} = j_{SR(A)}^s d_{SR(A)}^{s-1} = d_B^{s-1} j_{SR(A)}^{s-1} = d_B^{s-1} j_S^{s-1} = j_S^s d_S^{s-1}$, ce qui montre (puisque d_S^{s-1} est surjectif) que l'on a $j_S^s = e^0 \varepsilon_A$; on en conclut que (e^n) est un représentant de $e(S)$.

Soit maintenant T un élément de $S_{\mathcal{W}}^t(A, A')$, A' étant un nouvel objet de $\mathcal{C}$. Choisissons des représentants $(j_{TR(A')}^n)$ de $j_{TR(A')}$ et $(j_{SR(A)}^n)$ de

$j_{SR(A)}$; il est alors clair que, si l'on pose $j^n = j_{SR(A)}^n$ pour $n \leq s-1$ et $j^n = j_{SR(A)}^n j_{TR(A')}^{n-s}$ pour $n \geq s$, la suite (j^n) est un représentant de la classe $j_{STR(A')}$. Il en résulte immédiatement que l'on a

$$e(ST) = (-1)^{st} e(S)e(T) .$$

Soit maintenant f un morphisme de A dans un objet A' de la catégorie, et soit S' un élément de $\underline{S}_S(B, A')$. Formons le produit $S'^{s-1} \times A$, et désignons par $\pi_{S'}$, π_A ses projections sur ses deux facteurs ; soit d_S^{s-1} le noyau du morphisme $d_{S'}^{s-1} \pi_{S'} - f \pi_A$ de $S'^{s-1} \times A$ dans A' et soit d_S^{s-1} le morphisme de S'^{s-1} dans A induit par π_A . Ce morphisme est surjectif parce que $d_{S'}^{s-1}$ l'est. Si $s > 1$, nous poserons $S^n = S'^n$ si $n \neq s-1, s$, $S^s = A$, $\xi_S = \xi_{S'}$; le morphisme u de $S^{s-2} = S'^{s-2}$ dans $S'^{s-1} \times A$ tel que $\pi_{S'} u = d_{S'}^{s-2}$, $\pi_A u = 0$ a son image dans S'^{s-1} et définit par suite un morphisme d_S^{s-2} de S^{s-2} dans S'^{s-1} ; nous poserons $d_S^n = d_{S'}^n$ si $n < s-2$, $d_S^n = 0$ si $n \geq s$; on vérifie alors que $(\xi_S, (S^n)) = S$ est un élément de $\underline{S}_S(B, A)$; nous désignerons cet élément par $S'f$. Si $s = 1$, nous poserons $S^n = 0$ si $n \neq 0, 1$, $S^1 = A$; nous désignerons par ξ_S le morphisme de B dans S^0 induit par le morphisme u de B dans $S'^0 \times A$ tel que $\pi_{S'} u = \xi_{S'}$, $\pi_A u = 0$, et nous poserons $d_S^n = 0$ si $n < 0$ ou $n \geq 1$; ici encore $(\xi_S, (S^n))$ est un élément de $\underline{S}_1(B, A)$ que nous noterons $S'f$. Posons $f^s = f$; désignons par f^n le morphisme identique de S^n dans S'^n si $n \neq s-1, s$ et par f^{s-1} le morphisme de S'^{s-1} dans S'^{s-1} induit par $\pi_{S'}$; (f^n) est alors un élément de $\text{Hom}^0(S, S')$ et on a $f^s = f$, $f^0 \xi_S = \xi_{S'}$.

D'une manière générale, si $S \in \underline{S}_S(B, A)$, $S' \in \underline{S}_S(B', A')$, et si μ est un morphisme du complexe S dans le complexe S' , nous poserons $\mu_A = \mu^s \in \text{Hom}(A, A')$ et nous désignerons par μ_B le morphisme de B dans B' tel que $\mu^0 \xi_S = \xi_{S'}$, μ_B ; nous dirons que μ_B et μ_A sont les morphismes initial et terminal du morphisme μ . Nous identifierons dans ce qui suit les éléments de $\text{Ext}^0(A, B)$ avec les éléments de $\text{Hom}(A, B)$ qui leur correspondent par l'isomorphisme du corollaire au théorème 1 ; on a alors

$$\mu_B e(S) = e(S') \mu_A .$$

Soit en effet h l'élément de $H^0_{\mathbb{W}}(S, R(B'))$ dont l'image par l'isomorphisme du corollaire au théorème 1 est μ_B ; il est clair que $h = \mu_B j_S$ (μ_B étant considéré comme élément de $\text{Ext}^0(B, B')$). Si donc (t_B^n) est un représentant de μ_B , et (j_S^n) un représentant de j_S , $(t_B^n j_S^n)$ est un représentant de h . Par ailleurs, j_S, μ est aussi un représentant de h ; si (j_S^n) est un représentant de j_S , (j_S^n, μ^n) est un représentant de h . Comme les éléments $(t_B^n j_S^n)$ et (j_S^n, μ^n) de $\text{Hom}^0(S, R(B'))$ sont homotopes et comme $S^{s+1} = 0$, les cycles $t_B^s j_S^s$ et $j_S^s, \mu^s = j_S^s, \mu_A$ de $\text{Hom}(A, R^s(B'))$ sont dans la même classe de cohomologie ; or la classe de cohomologie du premier est l'image de $\mu_B e(S)$ par φ_B^s , alors que celle du second est l'image de $e(S') \mu_A$, ce qui démontre notre formule. Il en résulte que l'on a

$$e(S'f) = e(S')f$$

si $S' \in S_{\mathbb{W}S}(B, A')$, $f \in \text{Hom}(A, A')$.

Si B est un objet quelconque de $\mathcal{C}$ et s un entier > 0 , désignons par S_B^s l'image de d_B^{s-1} ; posons $S_B^n = R^n(B)$ si $n < s$, $S_B^n = 0$ si $n \geq s$; désignons par d_S^{s-1} le morphisme de $R^{s-1}(B)$ dans S_B^s défini par d_B^{s-1} ; posons $d_S^n = d_B^n$ si $n < s-1$, $d_S^n = 0$ si $n \geq s$; posons enfin $\xi_S = \xi_B$; on obtient ainsi un élément $S_B \in S_{\mathbb{W}S}(B, S_B^s)$. Soit h un cocycle quelconque de $\text{Hom}(A, R^s(B))$; comme $H^s(R(B)) = 0$, h définit un morphisme $\bar{h}$ de A dans S_B^s ; il est clair que $e(S_B^s \bar{h})$ est l'élément de $\text{Ext}^s(A, B)$ dont l'image par φ_B^s est la classe de cohomologie de h ; on en conclut que tout élément de $\text{Ext}^s(A, B)$ peut se mettre sous la forme $e(S)$, avec un élément S convenable de $S_{\mathbb{W}S}(B, A)$.

Soient maintenant S un élément de $S_{\mathbb{W}S}(B, A)$ et g un morphisme de B dans un objet B' . Formons le produit $B' \times S^0$ de B' et de S^0 , et désignons par $\pi_{B'}$ et π_S ses projections sur ses deux facteurs. Soit λ le morphisme de B dans $B' \times S^0$ tel que $\pi_{B'} \lambda = g$, $\pi_S \lambda = \xi_B$, et soit S'^0 le conoyau de λ . Soit J le morphisme de B' dans $B' \times S^0$ tel que $\pi_{B'} J$ soit le morphisme identique de B' et $\pi_S J = 0$; désignant par ω le morphisme canonique de $B' \times S^0$ sur S'^0 , nous poserons $\xi_{S'} = \omega J$; ce morphisme de B' dans S'^0 est injectif comme il résulte tout de suite de ce que ξ_B est injectif.

Par ailleurs, $d_S^0 \pi_S$ est un morphisme de $B' \times S^0$ dans S^1 dont le noyau contient l'image de λ ; il se met donc sous la forme $d_{S'}^0 \omega$, où $d_{S'}^0$ est un morphisme de S'^0 dans S^1 . Comme l'image de ξ_S est le noyau de d_S^0 , on voit facilement que l'image de $\xi_{S'}$ est le noyau de $d_{S'}^0$. Par ailleurs, l'image de d_S^0 est évidemment la même que celle de $d_{S'}^0$; c'est donc le noyau de $d_{S'}^1$. Nous poserons $S'^n = S^n$ si $n \neq 0$, $d_{S'}^{-1} = 0$, $d_{S'}^n = d_S^n$ si $n \neq -1, 0$; $(\xi_{S'}, (S'^n))$ est alors un élément de $\underline{S}_S(B', A)$, que nous désignerons par gS . Soit J_S le morphisme de S^0 dans $B' \times S^0$ tel que $\pi_{B'} J_S = 0$ et que $\pi_S J_S$ soit le morphisme identique de S^0 ; posons $g^0 = \omega J_S$ et, si $n \neq 0$, désignons par g^n le morphisme identique de S^n . Alors la suite (g^n) appartient à $\text{Hom}^0(S, S')$, et on a $g^0 \xi_S = \xi_{S'} g$; il en résulte que l'on a

$$e(gS) = ge(S) .$$

Le foncteur $\text{Ext}^S(A, B)$ est additif. Des propriétés des foncteurs additifs résulte que si $A, B, A', B' \in \mathcal{C}$ on peut identifier $\text{Ext}^S(A \times A', B \times B')$ au groupe

$$\text{Ext}^S(A, B) \times \text{Ext}^S(A', B) \times \text{Ext}^S(A, B') \times \text{Ext}^S(A', B')$$

Nous allons appliquer ceci dans le cas où $A = A'$, $B = B'$ pour déterminer l'élément $e(S) + e(S')$ quand S et S' sont des éléments de $\underline{S}_S(B, A)$. Posons $S'' = S_n \times S'_n$; désignons par π_n et π'_n les projections de S'' sur ses deux facteurs ; soit $d_{S''}^n$ le morphisme de S''^n dans S''^{n+1} défini par les conditions $\pi_{n+1} d_{S''}^n = d_S^n \pi_n$, $\pi'_{n+1} d_{S''}^n = d_{S'}^n \pi'_n$; soient π_B et π'_B les projections de $B \times B$ sur ses deux facteurs et soit $\xi_{S''}$ le morphisme de $B \times B$ dans S''^0 défini par les conditions $\pi_0 \xi_{S''} = \xi_S \pi_B$, $\pi'_0 \xi_{S''} = \xi_{S'} \pi'_B$; alors $(\xi_{S''}, (S''^n))$ est un élément S'' de $\underline{S}_S(B \times B, A \times A)$ que nous désignerons par $S \times S'$. Désignons aussi par π_A , π'_A les projections de $A \times A$ sur ses deux facteurs, par J_A et J'_A (resp. J_B et J'_B) les deux injections canoniques de A (resp. B) dans $A \times A$ (resp. $B \times B$), considéré comme somme directe de A (resp. B) avec lui-même. Posons $\delta_A = J_A + J'_A$, $\omega_B = \pi_B + \pi'_B$; ceci étant, on a

$$e(S) + e(S') = e((\omega_B(S \times S')) \delta_A) .$$

En effet, la considération du morphisme (π_n) de $S \times S'$ dans S fournit la relation $\pi_B e(S \times S') = e(S) \pi_A$, d'où, puisque $\pi_A J_A$ est l'identité,

$\pi_B e(S \times S') J_A = e(S)$; on voit de même que $\pi_B' e(S \times S') J_A' = e(S')$. Par ailleurs, on a $\pi_B e(S \times S') J_A' = 0$, $\pi_B' e(S \times S') J_A = 0$; on a donc $\omega_B e(S \times S') \delta_A = e(S) + e(S')$, ce qui démontre notre formule.

On peut exprimer de la manière suivante la condition pour que l'on ait $e(S) = e(S')$, S et S' étant des éléments de $\underline{S}_S(B, A)$. Un morphisme d'un élément de $\underline{S}_S(B, A)$ dans un autre objet de cette classe est appelé un quasi-isomorphisme si ses morphismes initial et terminal sont tous deux des morphismes identiques. Appelons voisins deux éléments S_1, S_2 de $\underline{S}_S(B, A)$ si ou bien il existe un quasi-isomorphisme de S_1 dans S_2 ou bien il existe un quasi-isomorphisme de S_2 dans S_1 ; appelons quasi-isomorphes deux éléments qui peuvent être joints par une chaîne d'éléments de $\underline{S}_S(B, A)$ dans laquelle chaque terme, sauf le dernier, est voisin du suivant. Il est clair que, si S et S' sont quasi-isomorphes, on a $e(S) = e(S')$. La réciproque est vraie. Supposons en effet que $e(S) = e(S')$; soit h un élément de $\text{Hom}(A, R^S(B))$ qui soit un représentant de la classe de cohomologie $\varphi_B^S(e(S))$; on voit alors facilement en s'appuyant sur les constructions faites ci-dessus qu'il existe des quasi-isomorphismes de S et de S' dans le complexe $S_B h$, ce qui montre que S et S' sont quasi-isomorphes.

La condition que nous venons d'obtenir pour que l'on ait $e(S) = e(S')$ peut se formuler sans faire appel à l'existence d'éléments injectifs dans la catégorie ; il en est de même des règles que nous avons données pour composer les éléments $e(S)$ soit entre eux soit avec les morphismes des objets de la catégorie, et de la définition que nous avons donnée de l'addition des $e(S)$. M. YONEDA a montré que l'on peut construire la théorie des groupes $\text{Ext}^S(A, B)$ dans une catégorie abélienne qui contient des produits finis mais dans laquelle il n'est pas nécessairement vrai que tout objet puisse se plonger dans un injectif ; la seule différence est que les $\text{Ext}^S(A, B)$ qu'il obtient ne sont pas nécessairement des ensembles ; mais toutes les règles formelles continuent à s'appliquer.

4.- Le cas $s = 1$.

Les éléments de $\text{Ext}^1(A, B)$ sont les suites exactes de la forme $0 \rightarrow B \rightarrow S^0 \rightarrow A \rightarrow 0$; si S, S' sont deux éléments de $\underline{S}_1(B, A)$, et si μ est un quasi-isomorphisme de S dans S' , μ^0 est un isomorphisme de S^0 sur S'^0 comme il résulte tout de suite du lemme des 5 . Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & S^0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & S'^0 & \longrightarrow & A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

définissent le même élément de $\text{Ext}^1(A, B)$ est qu'il existe un isomorphisme de S^0 sur S'^0 qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & S^0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & S'^0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

(où les flèches verticales sous A et B sont les morphismes identiques de ces objets).

L'élément neutre de $\text{Ext}^1(A, B)$ est représenté par la suite exacte

$$S_0 : \begin{array}{ccccccc} & & J_B & & \pi_A & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \times B & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

où J_B est l'injection canonique de B dans $A \times B$, considéré comme somme directe de A et B , et π_A la projection de $A \times B$ sur A . Soit en effet (j_0^n) un représentant de j_{S_0} ; désignons par J_A l'injection canonique de A dans $A \times B$ et posons $k = j_0^0 J_A$; on a alors $d_B^0 k = j_0^1$, ce qui montre que j_0^1 est bord d'un élément de $\text{Hom}(A, R^0(B))$, donc que $e(S_0) = 0$

5.- La suite exacte des Ext .

Soit A un objet de $\mathcal{C}$. Du fait que le foncteur $\text{Ext}^s(A, *)$ est isomorphe au s -ième dérivé du foncteur $\text{Hom}(A, *)$, à toute suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & \beta_1 & & \beta_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

il correspond une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^0(A, B_1) & \longrightarrow & \text{Ext}^0(A, B_2) & \longrightarrow & \text{Ext}^0(A, B_3) \longrightarrow \text{Ext}^1(A, B_1) \\ & & & & \beta_1^n & & \beta_2^n & & \partial^n \\ \dots & \longrightarrow & \text{Ext}^n(A, B_1) & \xrightarrow{\beta_1^n} & \text{Ext}^n(A, B_2) & \xrightarrow{\beta_2^n} & \text{Ext}^n(A, B_3) & \longrightarrow & \text{Ext}^{n+1}(A, B_1) \end{array}$$

dans laquelle les homomorphismes β_1^n , β_2^n sont les transformés de β_1 , β_2 par le foncteur $\text{Ext}^n(A, *)$. On en conclut que

$$\beta_1^n(u) = \beta_1 u \quad \beta_2^n(v) = \beta_2 v.$$

Nous allons maintenant expliciter l'homomorphisme ∂^s .

Nous poserons $\varepsilon_i = \varepsilon_{B_i}$, $d_i^n = d_{B_i}^n$. Remontant aux définitions, il nous faut pour cela construire une résolution exacte et injective $R = (\varepsilon_R; (R^n))$ de B_2 qui possède les propriétés suivantes : il y a des éléments $(f^n) \in \text{Hom}^0(R(B_1), R)$ et $(g^n) \in \text{Hom}^0(R, R(B_3))$ tels que l'on ait $f^0 \varepsilon_1 = \varepsilon_R \beta_1$, $g^0 \varepsilon_R = \varepsilon_3 \beta_2$ et que, pour tout n , la suite

$$0 \rightarrow R^n(B_1) \xrightarrow{f^n} R^n \xrightarrow{g^n} R^n(B_3) \rightarrow 0$$

soit une suite exacte décomposée. Ceci fait, partant d'un élément $u \in \text{Ext}^s(A, B_3)$, on choisira un représentant $t \in \text{Hom}(A, R^s(B_3))$ de la classe de cohomologie $\varphi_{B_3}^s(u)$; on choisira un élément t' de $\text{Hom}(A, R^s)$ tel que $g^s t' = t$, d'où $g^{s+1} d_R^s t' = 0$; il y a donc un élément $t'' \in \text{Hom}(A, R^{s+1}(B_1))$ tel que l'on ait $f^{s+1} t'' = d_R^s t'$, et, comme f^{s+2} est un monomorphisme, on a $d_{B_1}^{s+1} t'' = 0$. L'élément $\partial^s(u)$ est alors l'élément de $\text{Ext}^{s+1}(A, B_1)$ dont l'image par $\varphi_{B_1}^{s+1}$ est la classe de cohomologie de t'' .

Pour construire une résolution R possédant les propriétés voulues, nous procéderons comme suit. Nous poserons $R^n = R^n(B_1) \times R^n(B_3)$; nous désignerons par g^n la projection de R^n sur $R^n(B_3)$, par f^n et h^n les injections canoniques de $R^n(B_1)$ et $R^n(B_3)$ dans R^n . Il nous faut maintenant définir l'opérateur différentiel d_R de R et son augmentation. Nous choisirons un représentant (j^n) de $j_{SR}(B_3)$, où S est la suite exacte

$$0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow 0,$$

et nous poserons $\theta^n = (-1)^n j^{n+1}$ ($n \geq 0$); on a donc $(\theta^n) \in \text{Hom}^1(R(B_3), R(B_1))$ et (θ^n) est un représentant de $e(S)$.

Nous définirons l'opérateur d_R^n par les conditions

$$d_R^n f^n = f^{n+1} d_1^n \quad d_R^n h^n = h^{n+1} d_3^n - f^{n+1} \theta^n;$$

nous définirons l'augmentation ε_R par la formule

$$\varepsilon_R = f^0 j^0 + h^0 \varepsilon_3 \beta_2;$$

on s'assure alors facilement que toutes nos conditions sont satisfaites. Ceci étant,

utilisons les mêmes notations que plus haut. On peut prendre $t' = h^s t$, d'où $d_R^s t' = h^{s+1} d_3^s t - f^{s+1} \theta^s t = -f^{s+1} \theta^s t$; on peut donc prendre $t'' = -\theta^s t$.

Il en résulte immédiatement que l'on a

$$(*) \quad \partial^s(u) = -e(S)u.$$

Les opérateurs β_1^n , β_2^n , ∂^n étant définis par les formules

$$\beta_1^n(u) = \beta_1 u \quad \beta_2^n(v) = \beta_2 v \quad \partial^n(w) = -e(S)w,$$

on peut démontrer l'exactitude de la suite des Ext sans faire appel à l'existence d'objets injectifs dans la catégorie; nous nous contenterons de rapides indications sur la méthode de démonstration. On montre d'abord que $\beta_2 \beta_1 = 0$, $e(S) \beta_2 = 0$, $\beta_1 e(S) = 0$ au moyen de la description explicite des éléments des $\text{Ext}^1(A, B)$ donnée au n° 4. On montre ensuite que, si e est un élément de $\text{Ext}^s(A, B_1)$ (resp. $\text{Ext}^s(A, B_2)$, $\text{Ext}^s(A, B_3)$) ($s > 0$) tel que $\beta_1 e = 0$ (resp. $\beta_2 e = 0$, $e(S)e = 0$), on peut mettre e sous la forme $e'e''$, où $e'' \in \text{Ext}^1(A, X)$ (X étant un objet convenable de $\mathcal{C}$) et où e' est un élément de $\text{Ext}^{s-1}(X, B_1)$ (resp. $\text{Ext}^{s-1}(X, B_2)$, $\text{Ext}^{s-1}(X, B_3)$) tel que $\beta_1 e' = 0$ (resp. $\beta_2 e' = 0$, $e(S)e' = 0$). La démonstration est basée sur le lemme suivant: considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & & & \\ & & & \downarrow h & & & \\ U_2 & \xrightarrow{u_2} & U_3 & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & & & \\ V_1 & \xrightarrow{v_1} & V_2 & \xrightarrow{v_2} & V_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les deux dernières lignes sont des suites exactes; supposons qu'il existe un morphisme $k: A \rightarrow V_2$ tel que $f_3 h = v_2 k$. On peut alors construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{x} & T & \xrightarrow{t} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow k' & & \downarrow z & & \downarrow h \\ & & & & U_2 & \xrightarrow{u_2} & U_3 \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ & & & & V_1 & \xrightarrow{v_1} & V_2 \xrightarrow{v_2} V_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lequel la première ligne est une suite exacte. [Pour ce faire, on construit

le produit $V_1 \times U_2 \times A$, dont on désigne par π_V , π_U , π_A les projections; on prend pour T l'intersection des noyaux des morphismes $u_2 \pi_U - h \pi_A$ et $k \pi_A + v_1 \pi_V - f_2 \pi_U$.] Procédant par récurrence sur s , on se ramène alors à démontrer l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, B_1) \rightarrow \text{Hom}(A, B_2) \rightarrow \text{Hom}(A, B_3) \rightarrow \text{Ext}^1(A, B_1)$$

ce qui est facile au moyen de la description donnée au n° 4 des éléments de $\text{Ext}^1(A, B_1)$.

Signalons enfin que, si on a une suite exacte

$$S_0 : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$$

on a une suite exacte infinie

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}(A_3, B) \rightarrow \text{Hom}(A_2, B) \rightarrow \text{Hom}(A_1, B) \rightarrow \text{Ext}^1(A_3, B) \\ &\dots \rightarrow \text{Ext}^n(A_3, B) \xrightarrow{\alpha_2^n} \text{Ext}^n(A_2, B) \xrightarrow{\alpha_1^n} \text{Ext}^n(A_1, B) \xrightarrow{\partial^n} \text{Ext}^{n+1}(A_3, B) \end{aligned}$$

dans laquelle les homomorphismes sont définis par

$$\alpha_2^n(u) = u \alpha_2 \quad ; \quad \alpha_1^n(v) = v \alpha_1 \quad ; \quad \partial^n(w) = w \partial(S_0) .$$
