

TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

CHARLES EHRESMANN

Prolongements des catégories différentiables

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. n° 9, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A9_0

© Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann (Secrétariat mathématique, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENTS DES CATEGORIES DIFFERENTIABLES *

par Charles EHRESMANN

Soit \mathcal{C}^r une catégorie d'applications r fois différentiables d'un ouvert d'un espace affine localement convexe séparé vers un autre vérifiant les conditions suivantes:

1) \mathcal{C}^r est une sous-catégorie inductive, saturée par induction et stable par produits finis, de la catégorie de toutes les applications continues d'un ouvert d'un espace affine localement convexe dans un autre.

2) Si $F \in \mathcal{C}^r$ et si la différentielle de F en x est un isomorphisme, il existe un voisinage U de x tel que la restriction de F à U soit un isomorphisme sur $F(U)$ (Théorème des fonctions implicites).

3) La classe des applications r fois différentiables entre ouverts d'espaces numériques est contenue dans \mathcal{C}^r .

Nous ne précisons pas ici la notion d'application r fois différentiable. Mais en particulier \mathcal{C}^r peut être la catégorie des applications r fois différentiables entre ouverts d'un espace numérique, ou entre ouverts d'un espace de Banach, r fois différentiable signifiant r fois différentiable au sens de Fréchet.

Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ la catégorie obtenue par élargissement de \mathcal{C}^r au-dessus de la catégorie $\tilde{\mathcal{J}}$ des applications continues entre espaces topologiques. Un objet de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ est une variété r fois différentiable, c'est-à-dire un atlas complet V compatible avec le pseudo-groupe formé par les éléments inversibles de \mathcal{C}^r , et tel que les buts des cartes de V forment un recouvrement d'un ensemble, noté $\delta(V)$. La topologie sur $\delta(V)$ sous-jacente à V , ayant pour ouverts les buts des cartes de V , est représentée par $\tau(V)$. Les morphismes de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sont les applications r fois différentiables entre variétés r fois

* Texte d'une conférence préparée (mais non donnée effectivement) pour le Colloque international de Géométrie différentielle globale (Bucarest, Juin 1964).

différentiables entre variétés r fois différentiables. Les applications source et but dans $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sont notées α et β .

Nous supposons donné, pour tout entier r , une catégorie \mathcal{C}^r de sorte que l'on ait $\mathcal{C}^r \subset \mathcal{C}^k$, si $k < r$. L'expression « r fois différentiable» signifie appartenant à $\tilde{\mathcal{C}}^r$.

Soit $J^{\lambda, r}$ la classe quotient de la classe des couples (F, x) , où $F \in \tilde{\mathcal{C}}^r$ et $x \in \alpha(F)$, par la relation d'équivalence ρ_λ :

$$(F, x) \sim (F', x) \quad \text{si } \alpha(F) \text{ et } \alpha(F') \text{ ont même germe (de variété } r \text{ fois différentiable) en } x, \text{ si } \beta(F) \text{ et } \beta(F') \text{ ont même germe en } F(x) \text{ et s'il existe un voisinage } U \text{ de } x \text{ tel que } F \text{ et } F' \text{ aient même restriction à } U.$$

L'élément $(F, x) \text{ mod } \rho_\lambda$ est appelé *jet local* de F en x , et noté $j_x^\lambda F$. Soit aussi $J^{\lambda, r}$ la catégorie obtenue en munissant $J^{\lambda, r}$ de la loi de composition :

$$j_x^\lambda F' \cdot j_x^\lambda F = j_x^\lambda (F' F)$$

si $\alpha(F')$ et $\beta(F)$ ont même germe en $F(x) = x'$.

La catégorie $J^{\lambda, r}$ admet une catégorie quotient $J^{k, r}$ relativement à la relation d'équivalence ρ_k :

$$j_x^\lambda F \sim j_x^\lambda F' \quad \text{s'il existe } g \in V \text{ et } g' \in V', \text{ où } V = \alpha(F), V' = \beta(F), \text{ tels que } x \in \beta(g), F(x) \in \beta(g') \text{ et que la différentielle homogène d'ordre } k' \text{ de } (g'^{-1} F g - g'^{-1} F' g) \text{ en } u = g^{-1}(x) \text{ soit nulle si } k' \leq k.$$

$(j_x^\lambda F) \text{ mod } \rho_k$ est désigné par $j_x^k F$ et appelé *jet d'ordre k de F en x* . Par suite on a : $j_x^k F' \cdot j_x^k F = j_x^k (F' F)$ si $\alpha(F')$ et $\beta(F)$ ont le même germe en $x' = F(x)$. La classe des unités est identifiée à la classe des germes de variétés r fois différentiables; les applications source et but dans $J^{k, r}$ sont notées α^r et β^r . Si V et V' sont deux variétés r fois différentiables, la sous-classe $J^{k, r}(V', V)$ des $X \in J^{k, r}$ tels que $\alpha^r(X)$ soit un germe de V et $\beta^r(X)$ un germe de V' est canoniquement munie d'une structure de variété $r-k$ fois différentiable, sous-jacente à sa structure d'espace fibré de base $V \times V'$. La classe de ces structures $r-k$ fois différentiables est une classe compatible au-dessus de $\tilde{\mathcal{J}}$ et détermine une variété $r-k$ fois différentiable non séparée $A^{k, r}$ telle que $J^{k, r} = \delta(A^{k, r})$. Soit $\Pi^{k, r}$ le groupoïde des éléments inversibles de $J^{k, r}$.

$J^{\lambda, r}$ opère sur $J^{k, r}$ relativement à la loi de composition :

$$(j_x^\lambda F', j_x^k F) \rightarrow j_x^k (F' F) \quad \text{si } \beta^r(j_x^k F) = \alpha(j_x^\lambda F').$$

De plus on définit une loi de composition entre $\tilde{\mathcal{C}}^r$ et $J^{k, r}$ en posant $F'(j_x^k F) = j_x^k (F' F)$ si $\beta^r(j_x^k F)$ est le germe de $\alpha(F')$ en $F(x)$.

Si $(V', F, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$, nous désignerons par $T_x F$ l'application : $X \rightarrow FX$ de $T_x V$ dans $T_y V'$, où $x \in \delta(V)$, $y = F(x)$ et $T_x V$ est l'espace tangent à V en x (considéré comme l'ensemble des $X \in J^{1,r}(V, R)$ tels que $\alpha^r(X)$ soit le germe de R en 0 et que $\beta^r(X)$ soit le germe de V en x).

Soit $S(\mathcal{C}^r)$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ formée des surjections régulières, c'est-à-dire des applications r fois différentiables (V', F, V) telles que, pour tout $x \in \delta(V)$, le noyau de $T_x F$ admette un supplémentaire topologique M' dans $T_x V$ et que $T_x F$ définisse un isomorphisme de M' sur $T_y V'$, où $y = F(x)$.

Nous appelons *catégorie r fois différentiable* une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}^r((S(\tilde{\mathcal{C}}^r), S(\tilde{\mathcal{C}}^r)), \tilde{\mathcal{C}}^r)$ -structurée, c'est-à-dire un couple (C^*, A) d'une catégorie C^* et d'une variété r fois différentiable A telle que $\delta(A)$ soit la classe C sous-jacente à C^* , satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Soient α et β les applications source et but dans C^* et soit C_0 la classe des unités de C^* ; il existe une variété r fois différentiable A_0 telle que $\delta(A_0) = C_0$, que l'injection canonique de C_0 dans C définisse une application r fois différentiable (A, ι, A_0) et que α et β définissent des surjections régulières de A dans A_0 .

2) Soit $A * A$ la sous-variété propre de $A \times A$ produit fibré de (A_0, α, A) et de (A_0, β, A) dans $\tilde{\mathcal{C}}^r$. La loi de composition κ de C^* définit une application r fois différentiable de $A * A$ sur A .

Sauf indication contraire, toutes les variétés A utilisées dans la suite sont supposées séparées (c'est-à-dire $\tau(A)$ est une topologie séparée).

THEOREME. Soit (C^*, A) une catégorie r fois différentiable; alors A_0 est une sous-variété propre fermée de A . Le groupoïde C_0^γ des éléments inversibles de C^* forme un ouvert pour $\tau(A)$ et l'application $b \rightarrow b^{-1}$ définit un automorphisme de la sous-variété déterminée par C_0^γ .

On dira que (C^*, A) est une *catégorie r fois régulièrement différentiable* si (C^*, A) est une catégorie r fois différentiable vérifiant la condition supplémentaire :

3) La sous-classe $C_0 \wedge C_0$ de $C_0 \times C_0$ formée des couples (e', e) tels que $\text{Hom}(e', e) \neq \emptyset$ définit une sous-variété r fois différentiable $A_0 \wedge A_0$ de $A_0 \times A_0$ et l'application $[\beta, \alpha] : f \rightarrow (\beta(f), \alpha(f))$ définit une surjection régulière de A sur $A_0 \wedge A_0$.

Si on suppose de plus $C_0 \wedge C_0$ ouvert pour $\tau(A_0 \times A_0)$, la catégorie (C^*, A) est dite *localement triviale*.

Un exemple important de catégorie $r-k$ fois différentiable (non séparée) est celui de la catégorie localement triviale $(J^{k,r}, A^{k,r})$, où $k < r$, appelée la *catégorie des jets d'ordre k d'applications r fois différentiables*. $A_0^{k,r}$ est la variété $r-k$ fois différentiable sous-jacente à $A_0^{0,r}$, laquelle est une variété r fois différentiable «uni-

verselle» définie sur la classe des germes de variétés r fois différentiables. Toute variété $V \in \tilde{\mathcal{C}}^r$ admet la bijection canonique $x \rightarrow \hat{x}$, où \hat{x} est le germe de V en x , sur la sous-variété de $A_0^{k,r}$ définie par la classe \hat{V} des germes de V .

Si $X_i \in J^{k,r}$, $i = 1, 2$, et $\beta^r(X_1) = \beta^r(X_2)$, on dit, en accord avec la théorie générale, que $((X_1, X'_1), (X_2, X'_2))$ est un produit fibré naturalisé si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $X'_i \in J^{k,r}$ et $X_1 \cdot X'_1 = X_2 \cdot X'_2$;
- 2) Si $X''_i \in J^{k,r}$, $i = 1, 2$ et si $X_1 \cdot X''_1 = X_2 \cdot X''_2$, alors il existe un et un seul $\bar{X} \in J^{k,r}$ tel que $X'_i \cdot \bar{X} = X''_i$.

Dans ce cas, $\alpha^r(X'_i)$ est appelé produit fibré de (X_1, X_2) dans $J^{k,r}$. En particulier un tel produit fibré naturalisé est défini si $X_i = j_{x_i}^k f_i$, $\beta^r(X_1) = \beta^r(X_2)$ et $f_i \in S(\tilde{\mathcal{C}}^r)$.

Soit (C^*, A) une catégorie r fois différentiable, soit $\hat{A} \cdot J^{k,r}$ la sous-classe de $J^{k,r}$ formée des jets X d'ordre k tels que $\beta^r(X)$ soit un germe de A . Soit $\hat{A} \cdot J^{k,r} \cdot \hat{x}$ la classe des $X \in \hat{A} \cdot J^{k,r}$ tels que $\alpha^r(X) = \hat{x}$.

Soient $a = (A_0, \alpha, A)$ et $b = (A_0, \beta, A)$. Si $z = (y_1, y_2) \in C^* * C^*$, les jets $j_{y_1}^k a$ et $j_{y_2}^k b$ admettent un produit fibré naturalisé :

$$((j_{y_1}^k a, \tilde{a}_{y_1}), (j_{y_2}^k b, \tilde{b}_{y_2})) \quad \text{tel que } \alpha^r(\tilde{b}_{y_2}) = \hat{z}$$

Si $X_i \in \hat{A} \cdot J^{k,r} \cdot \hat{x}$ et $aX_2 = bX_1$, il existe un et un seul $Z \in J^{k,r}$ tel que si $\hat{y}_i = \beta^r(X_i)$,

$$\text{on ait : } \alpha^r(Z) = \hat{x}, \quad \beta^r(Z) = \hat{z}, \quad \tilde{b}_{y_2} \cdot Z = X_2, \quad \tilde{a}_{y_1} \cdot Z = X_1.$$

$$\text{Posons : } \quad X_2 \circ X_1 = (A, \kappa, A * A) \quad Z \in \hat{A} \cdot J^{k,r} \cdot \hat{x}.$$

THEOREME. $\hat{A} \cdot J^{k,r}$, muni de la loi de composition \circ («prolongement de κ »), est une catégorie admettant $J^{k,r}$ pour catégorie d'opérateurs à droite relativement à la loi de composition :

$$(X, Y) \rightarrow X \cdot Y \quad \text{si, et seulement si, } \alpha^r(X) = \beta^r(Y).$$

$\hat{A} \cdot J^{k,r} \cdot \hat{x}$ définit une sous-variété propre de $A^{k,r}$ et une catégorie $r-k$ fois différentiable.

Supposons $X_i \in \hat{A} \cdot J^{k,r}$ tels qu'il existe un produit fibré naturalisé : $((aX_2, Y_2), (bX_1, Y_1))$. Soit $X_2 \diamond X_1$ la sous-classe de $J^{k,r}$ formée des éléments $(X_2 \cdot Y_2 \circ X_1 \cdot Y_1) \cdot G$, où $G \in \Pi^{k,r}$. La loi de composition multiforme \diamond a les propriétés suivantes («pseudo-catégorie») :

- 1) Si $X \in \hat{A} \cdot J^{k,r}$, $\beta^r(X) = \hat{y}$, $e = \alpha(y)$, $e' = \beta(y)$, on a :

$$X \diamond j_e^k a = j_{e'}^k b \diamond X = X \cdot \Pi^{k,r}.$$

- 2) Si $X_3 \diamond X_2$ et $X_2 \diamond X_1$ sont définis, on a :

$$X_3 \blacklozenge (X_2 \blacklozenge X_1) = (X_3 \blacklozenge X_2) \blacklozenge X_1.$$

Soit C^k la sous-classe de $\hat{A}.J^{k,r}$ formée des $X \in \hat{A}.J^{k,r}.\hat{A}_0$ tels que $\alpha X = \alpha^r(X)$. Si $X_i \in C^k$ et si $\alpha^r(X_2) = \beta^r(X_1)$, il existe un $Z \in X_2 \blacklozenge X_1$ tel que $\alpha^r(Z) = \alpha^r(X_1)$, à savoir $Z = (X_2 \cdot bX_1) \circ X_1$, que nous noterons $X_2 \bullet X_1$; on a $Z \in C^k$.

THEOREME. $(C^{k\bullet}, A^k)$ est une catégorie $r-k$ fois différentiable, où A^k est une structure de sous-variété propre de $A^{k,r}$. Si (C^\bullet, A) est régulièrement différentiable, $(C^{k\bullet}, A^k)$ est régulièrement différentiable. De plus $C^{k\bullet}$ s'identifie à la sous-catégorie de la catégorie produit croisé (dual) de $\hat{A}.J^{k,r}.\hat{A}_0$ et $\hat{A}_0.J^{k,r}.\hat{A}_0$ formée des triplets $(\beta^r(bX), bX, X)$.

Nous appellerons $(C^{k\bullet}, A^k)$ le prolongement d'ordre k de (C^\bullet, A) .

La source de $X \in C^{k\bullet}$ est $\alpha^r(X)$, son but $\beta^r(bX)$. Pour que X soit inversible, il faut et il suffit que bX soit inversible dans $J^{k,r}$ et que $\beta^r(X) = \hat{z}$, où $z \in C_\gamma$. L'application $X \rightarrow bX$ définit un foncteur $r-k$ fois différentiable de $(C^{k\bullet}, A^k)$ vers la catégorie $r-k$ fois différentiable définie par $\hat{A}_0.J^{k,r}.\hat{A}_0$. L'application $j_C^{k',k}: j_x^k f \rightarrow j_x^{k'} f$, où $k' < k$, définit un foncteur $r-k$ fois différentiable, appelé foncteur canonique, de $(C^{k\bullet}, A^k)$ sur $(C^{k'\bullet}, A^{k'})$.

Puisque $(C^{k\bullet}, A^k)$ est une catégorie $r-k$ fois différentiable, on peut définir le prolongement d'ordre k' de $(C^{k\bullet}, A^k)$, pour tout $k' \leq r-k$; c'est une catégorie $r-k-k'$ fois différentiable. En particulier, on définit par récurrence $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$, prolongement non holonome d'ordre k de (C^\bullet, A) , en posant: $(\tilde{C}^0\bullet, \tilde{A}^0) = (C^\bullet, A)$ et:

$$(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k) = ((\tilde{C}^{k-1}\bullet)^1, (\tilde{A}^{k-1})^1).$$

PROPOSITION. $(C^{k\bullet}, A^k)$ s'identifie à une sous-catégorie différentiable de $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$.

Le composé des foncteurs canoniques

$$(\tilde{C}^i\bullet, \tilde{A}^i) \leftarrow (\tilde{C}^{i+1}\bullet, \tilde{A}^{i+1}) \leftarrow \dots \leftarrow (\tilde{C}^{k-1}\bullet, \tilde{A}^{k-1}) \leftarrow (\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$$

est un foncteur $(r-k)$ fois différentiable $j_C^{i,k}$.

Soit $\bar{\varphi} = (A, \varphi, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$. Soit V^k la classe des $X \in \hat{V}.J^{k,r}.\hat{A}$ tels que $\bar{\varphi}X \in C^k$. La classe $\bar{\varphi}V^k$ est appelée le prolongement d'ordre k de l'ensemble différentiable paramétré $(\varphi(\delta(V)), \bar{\varphi})$. Par récurrence, on définit le prolongement non holonome d'ordre k de $(\varphi(\delta(V)), \bar{\varphi})$.

Soit $\bar{\varphi} = (V', \varphi, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$, où V est une sous-variété de A telle que $\delta(V)$ soit ouvert pour $\tau(A)$. Soit $O \in V'$ et $w = \bar{\varphi}^{-1}(O)$; le couple $(w, j_w^\lambda A)$, où $j_w^\lambda A$ est le germe (jet local) de A autour de w , s'appelle variété élémentaire extraite de A . Soit W une variété extraite de A , c'est-à-dire une classe complète de variétés élémentaires extraites de A . On appelle prolongement d'ordre k de W la classe W^k des $X \in C^k$

tels qu'il existe une variété élémentaire extraite $(w, j_w^\lambda A)$ définie par $\bar{\varphi}$, où $w = \bar{\varphi}^{-1}(O)$, et que $\bar{\varphi}X$ soit le jet de l'application constante sur O . On définit d'une manière analogue le prolongement non holonome d'ordre k de W , noté \tilde{W}^k .

PROPOSITION. La classe des $X \in \tilde{C}^{k+1}$ tels que $j_C^{k-1, k} X = z$, où $\beta^r(X) = \hat{z}$, définit une sous-catégorie $r-k-1$ fois différentiable de $(\tilde{C}^{k+1 \bullet}, \tilde{A}^{k+1})$, est appelée prolongement semi-holonome d'ordre 1 de $(\tilde{C}^{k \bullet}, \tilde{A}^k)$.

Par récurrence, on définit, en partant de $(C^{1 \bullet}, A^1)$, le prolongement semi-holonome $(\bar{C}^{k \bullet}, \bar{A}^k)$ d'ordre k de (C^\bullet, A) , qui est une sous-catégorie $r-k$ fois différentiable de $(\tilde{C}^{k \bullet}, \tilde{A}^k)$ et qui admet pour sous-catégorie $r-k$ fois différentiable le prolongement ("holonome") $(C^{k \bullet}, A^k)$. Posons : $\bar{j}_C^{i, k} = (\bar{C}^{i \bullet}, j_C^{i, k}, \bar{C}^{k \bullet})$.

La construction précédente peut s'appliquer à la catégorie r fois différentiable (non séparée) $(J^{0, r}, A^{0, r})$; on obtient de cette façon les catégories $r-k$ fois différentiables (non séparées) des jets non holonomes et semi-holonomes d'ordre k , associées à \tilde{C}^r , notées respectivement $(\tilde{J}^{k, r}, \tilde{A}^{k, r})$ et $(\bar{J}^{k, r}, \bar{A}^{k, r})$. En particulier, si $k > 1$, on a :

$$\tilde{C}^k \subset \tilde{J}^{k, r} \quad \text{et} \quad \bar{C}^k \subset \bar{J}^{k, r}.$$

Soit V une variété r fois différentiable et $E = \delta(V)$. Soit (C^\bullet, A) une catégorie r fois différentiable. On dira que $((C^\bullet, A), V, \kappa')$ est une espèce de structures r fois différentiable, ou que (C^\bullet, A) est une catégorie r fois différentiable d'opérateurs sur V , relativement à κ' , si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) (C^\bullet, E, κ') est une espèce de structures; soit $C^\bullet * E$ la classe des couples composables (i.e. tels que $\kappa'(f, z)$ soit défini) et soit p l'application canonique de E sur C_0^\bullet telle que $p(z) = e$ si $(z, e) \in C^\bullet * E$ et $e \in C_0^\bullet$.

2) (A_0, p, V) est une surjection régulière.

3) Soit $A * V$ la sous-variété r fois différentiable de $A \times V$ produit fibré de (A_0, α, A) et de (A_0, p, V) ; alors κ' définit une application r fois différentiable de $A * V$ dans V .

La catégorie des hypermorphisms associée à (C^\bullet, E, κ') est désignée par $(C^\bullet * E)^\bullet$.

THEOREME. Soit $((C^\bullet, A), V, \kappa')$ une espèce de structures r fois différentiable et $E = \delta(V)$. Si, pour tout $f \in C$, l'application $z \rightarrow \kappa'(f, z)$ définit une surjection régulière de la sous-variété $\bar{p}^{-1}(\alpha(f))$ de V dans $\bar{p}^{-1}(\beta(f))$ et si (C^\bullet, A) est régulièrement différentiable, alors $((C^\bullet * E)^\bullet, A * V)$ est une catégorie r fois régulièrement différentiable.

L'application $z \rightarrow (p(z), z)$ définit un isomorphisme r fois différentiable de V

sur $(A * V)_o$.

Soit $((C^r, A), V, \kappa^r)$ une espèce de structures r fois différentiable vérifiant les conditions du théorème précédent. Soit $((C^r * E)^r, A * V)$ la catégorie r fois différentiable des hypermorphisms correspondante. Soit $z \in E$ et $X \in C^k$ tels que $\alpha^r(X) = \beta^r(p\hat{z})$, où \hat{z} désigne le germe de V en z . Soit $[Xp, \hat{z}]$ le jet de source \hat{z} , de but le germe de $A * V$ en (f, z) , où $\hat{f} = \beta^r(X)$, tel que $p_1[Xp, \hat{z}] = Xp$ et $p_2[Xp, \hat{z}] = \hat{z}$, en désignant par p_1 et p_2 les projections canoniques de $A * V$ vers A et V respectivement. Soit

$$X\hat{z}' = (V, \kappa', A * V)[Xp, \hat{z}]$$

(jet de source \hat{z} et de but \hat{z}' , où $z' = fz$, obtenu par prolongement de κ^r). La catégorie $C^{k \bullet}$ opère sur E relativement à la loi de composition $\kappa^{k \bullet} : (X, z) \rightarrow fz$. Soit $(C^{k \bullet} * E)^{\bullet}$ la catégorie des hypermorphisms correspondante.

THEOREME. $((C^{k \bullet}, A^k), V, \kappa^{k \bullet})$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable; $((C^{k \bullet} * E)^{\bullet}, A^k * V)$ est une catégorie $r-k$ fois régulièrement différentiable et s'identifie à une sous-catégorie du prolongement d'ordre k de $((C^r * E)^r, A * V)$ par l'application $(X, z) \rightarrow [Xp, \hat{z}]$.

THEOREME. Si $\eta^r = ((C^{k \bullet} * E)^{\bullet}, A^k * V), V', \kappa''$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable, alors $\eta'' = ((C^{k \bullet}, A^k), V', \bar{\kappa}')$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable, isomorphe à η^r , où $\bar{\kappa}'$ est la loi de composition

$$(X, z') \rightarrow \kappa''((X, p'(z')), z'),$$

en désignant par p' la projection canonique de $\delta(V')$ dans $C_o^{k \bullet}$.

La \tilde{C}^r -application covariante inversible définissant l'isomorphisme est $(\eta'', (\Phi, \varphi_o), \eta^r)$, où $\Phi(X, z') = ((X, p'(z')), z')$ et $\varphi_o(z) = z$, si $z \in E$.

THEOREME. Les deux théorèmes précédents sont encore valables en y remplaçant C^k par \bar{C}^k .

Le théorème de transitivité des prolongements d'une variété r fois différentiable W est un cas particulier des théorèmes précédents lorsqu'on prend pour C^r une sous-catégorie localement triviale de $\hat{W} \cdot \bar{J}^k \cdot r \cdot \hat{W}$.

Soit (C^r, A) un groupoïde r fois différentiable et soit $\bar{C}_\gamma^{k \bullet}$ le sous-groupoïde de tous les éléments inversibles de $\bar{C}^{k \bullet}$. Supposons $k + 3 < r$ et A de dimension finie. Soit φ un foncteur 3 fois différentiable section du foncteur de $\bar{C}_\gamma^{k \bullet}$ vers $\bar{C}_\gamma^{k-1 \bullet}$ restriction de $\bar{J}_C^{k-1, k}$. Soit Φ la sous-variété de \bar{C}^k définie par $\varphi(\bar{C}^{k-1})$ (on peut considérer Φ comme un système différentiel). Alors $(\varphi(\bar{C}^{k-1})^{\bullet}, \Phi)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\bar{C}^{k \bullet}$.

THEOREME. Soit Σ la classe des applications k fois différentiables σ de A_o dans A

telles que $a.\sigma = A_o$, que $b.\sigma$ soit un automorphisme de A_o et que $j_x^k \sigma \in \Phi$ pour tout $x \in C_o$. Alors Σ est canoniquement muni d'une structure de groupe de Lie.

Ce qui précède permet d'étudier les sous-groupoïdes $r-1$ fois différentiables (C^*, A) de $(\hat{V}.\Pi^{k,r}.\hat{V}), A_V^{k,r}$, où V est une variété r fois différentiable et $A_V^{k,r}$ la sous-variété de $A^{k,r}$ définie par $\hat{V}.\Pi^{k,r}.\hat{V}$. En particulier ces résultats s'appliquent à la théorie des G -structures (cas où (C^*, A) est localement trivial) et à la théorie des connexions d'ordre supérieur.

NOTES. Les notations utilisées sont celles de :

Catégories et structures (cours multigraphié, Paris 1964) et d'une série de Notes à l'Académie des Sciences : 233, 1951, p. 598, 777, 1081; 234, 1952, p. 587, 1028, 1424; 239, 1954, p. 1762; 240, 1955, p. 397, 1755.

Voir aussi : *Sur les connexions d'ordre supérieur*, Atti V Congresso Un. Mat. It., 1956.

La notion de catégorie r fois différentiable est définie dans :

Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Géo. diff. Globale, Bruxelles, 1959, p. 137,

Catégories structurées. Ann. Ec. Norm. Sup. 1963.

Le dernier théorème se ramène au cas $k = 1$, indiqué dans une conférence au Congrès de l'Union Mat. Argentina (Cordoba, 1959) :

Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, Rev. Un. mat. Argentina, XIX, 1960. Un cas particulier du théorème est démontré dans *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini*, C.R.A.S. 246, 1958, p. 360.

Les résultats esquissés dans cet article, ainsi que leurs applications à la théorie des connexions d'ordre supérieur, ont fait l'objet de plusieurs cours et seront prochainement développés dans un livre.