

TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

CHARLES EHRESMANN

Catégories et structures : extraits

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann,
tome 6 (1964), exp. n° 8, p. 1-31

[<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A8_0>](http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A8_0)

© Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Topologie et géométrie différentielle. Cahiers
du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann » implique l'accord avec les conditions gé-
nérales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale
ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou im-
pression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CATEGORIES ET STRUCTURES : Extraits

par Charles EHRESMANN

Le texte suivant est formé d'extraits des chapitres 2 et 3 d'un livre provisoirement polycopié sur les catégories et les structures qui développe un cours donné à l'Institut Henri Poincaré (1963-64). Comme ce livre ne paraîtra pas avant plusieurs mois, nous en indiquons ici, afin de pouvoir ultérieurement nous y référer, un certain nombre de définitions et résultats. Ce travail est un complément aux articles [1], [2] et [3] dont nous reprenons la plupart des notations.

1. Espèces de structures dominées.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications et soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\bar{C}^*, \Phi, C^*)$ tels que $(\bar{C}, \Phi, C) \in \mathcal{M}$; soit $(\mathcal{M}, p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ le foncteur canonique défini par $p\mathcal{F} : (\bar{C}^*, \Phi, C^*) \rightarrow (\bar{C}, \Phi, C)$.

Si C^* est une catégorie et si une sous-catégorie C_1 de C^* est une catégorie d'opérateurs sur une classe S_o relativement à la loi de composition κ' , le triplet (C^*, S_o, κ') définit une espèce de structures (au-dessus de C^*); si $C_1 = C^*$, nous écrirons aussi $[C^*, S_o, \kappa']$ au lieu de (C^*, S_o, κ') . Nous désignerons par $C^* * S_o$ la classe des couples $(f, z) \in C \times S_o$ tels que $\kappa'(f, z)$ soit défini et nous poserons $\kappa'(f, z) = fz$. La catégorie des hypermorphisms associée à (C^*, S_o, κ') sera notée $(C^* * S_o)^*$. Soit $\tilde{f}$ l'application définie, lorsque $f \in C_1$, par $z \rightarrow fz$, où $(f, z) \in C^* * S_o$. Soit $\mathcal{A}(\mathcal{M})_o$ la classe des espèces de structures $\eta = (C^*, S_o, \kappa')$ telles que $C^* \in \mathcal{F}_o$ et $S_o \in \mathcal{M}_o$; soit $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ la catégorie des applications covariantes $(\bar{\eta}, (\Phi, \varphi_o), \eta)$ pour lesquelles $\eta \in \mathcal{A}(\mathcal{M})_o$ et $\bar{\eta} \in \mathcal{A}(\mathcal{M})_o$; soit p l'application :

$$((\bar{C}^*, \bar{S}_o, \bar{\kappa}'), (\Phi, \varphi_o), (C^*, S_o, \kappa')) \rightarrow (\bar{S}_o, \varphi_o, S_o)$$

de $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{M}$, qui définit un foncteur $(\mathcal{M}, p, \mathcal{A}(\mathcal{M}))$.

DEFINITION . Soit $\bar{\lambda} = (\mathbb{M}, \lambda, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}$. On dit que (C^*, F) est un couple dominant dans $(\lambda, \mathcal{L})$ une espèce de structures, ou que $((C^*, S_o, \kappa'), F)$ est une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathcal{L})$, si $\bar{F} = (\mathcal{L}, F, C_1)$ est un foncteur et si $(C^*, \bar{\lambda}, \bar{F})$ est un couple définissant l'espèce de structures (C^*, S_o, κ') ; on appelle (C^*, S_o, κ') l'espèce de structures sous (C^*, F) .

Soit $\eta = (C^*, S_o, \kappa') \in \mathcal{Q}(\mathbb{M})_o$ et soit π' l'application : $z \rightarrow e$, où $e \in C_o$ et $(e, z) \in C^* * S_o$.

PROPOSITION. Si $(\mathbb{M}, \lambda, \mathcal{L})$ est un foncteur fidèle, (η, F) est une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathcal{L})$ si, et seulement si, F est une application de $C_1 \subset C$ dans $\mathcal{L}$ vérifiant les conditions :

- 1) Si $e \in \pi'(S_o)$, on a $F(e) \in \mathcal{L}_o$ et $\lambda(F(e)) = \pi'^{-1}(e)$.
- 2) Si $f \in C$ et s'il existe $z \in S_o$ tel que $\kappa'(f, z)$ soit défini, on a :

$$F(f) = (F(e'), \tilde{f}, F(e)), \quad \text{où } e = \alpha(f), e' = \beta(f).$$

Une espèce de structures dominée dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est appelée une espèce de morphismes [1].

DEFINITION. On dira que S^* est une catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs C^* , la loi de composition étant κ' , si C^* est une catégorie d'opérateurs sur S relativement à κ' , et si S^* vérifie les conditions :

- c_1) Si $(z', z) \in S^* * S^*$ et si $(f, z'.z) \in C^* * S$, on a :

$$(f, z') \in C^* * S, (f, z) \in C^* * S \text{ et } f(z'.z) = fz'.fz.$$

- c_2) Si $z_o \in S_o$ et si $(f, z_o) \in C^* * S$, on a $fz_o \in S_o$.

Cette définition signifie [1] que $[C^*, S, \kappa']$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes (η, F) et que S^* est la catégorie somme des catégories $F(e)$, où $e \in C_o$.

Un cas important d'espèces de structures dominées est celui des espèces de structures dominées par des applications covariantes, c'est-à-dire des espèces de structures dominées dans $(p, \mathcal{Q}(\mathbb{M}))$.

Pour que (η, F) soit une espèce de structures dominée dans $(p, \mathcal{Q}(\mathbb{M}))$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- 1) $\eta = (C^*, S_o, \kappa')$ est une espèce de structures; soit π' l'application $z \rightarrow e$ de S_o dans C_o , où $(e, z) \in C^* * S_o$ et soit C_1 la sous-catégorie de C^* opérant sur S_o .

- 2) Il existe un foncteur G de C_1 vers $\mathcal{F}$ et, pour tout $e \in \pi'(S_o)$, $F(e)$ est une espèce de structures $(G(e), \pi'^{-1}(e), \bar{\kappa}'(e))$.

3) Si $f \in C_1$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, alors $F(f) = (F(e'), (G(f), \varphi_0(f)), F(e))$ est une application covariante, c'est-à-dire $\varphi_0(f)$ est une application de $\pi'(e)$ dans $\pi'(e')$ telle que, si $z \in \pi'(e)$ et $(g, z) \in G(e) * \pi'(e)$, on ait :

$$\varphi_0(f)(gz) = G(f)(g) \varphi_0(f)(z).$$

Supposons ces conditions réalisées. Pour tout $e \in (C_1)_o^*$, désignons par $\hat{F}(e)$ la catégorie $(G(e) * \pi'(e))^*$. Pour tout $f \in C_1$, posons :

$$\hat{F}(f) = (\hat{F}(\beta(f)), \hat{f}, \hat{F}(\alpha(f))), \quad \text{où } \hat{f}(g, z) = (G(f)(g), \varphi_0(f)(z)).$$

Soit Σ la catégorie somme des catégories $\hat{F}(e)$.

PROPOSITION. Σ est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs C_1^* relativement à la loi de composition $\hat{\kappa}'$:

$$(f, (g, z)) \rightarrow \hat{f}(g, z) \quad \text{si, et seulement si, } (g, z) \in \hat{F}(\alpha(f)).$$

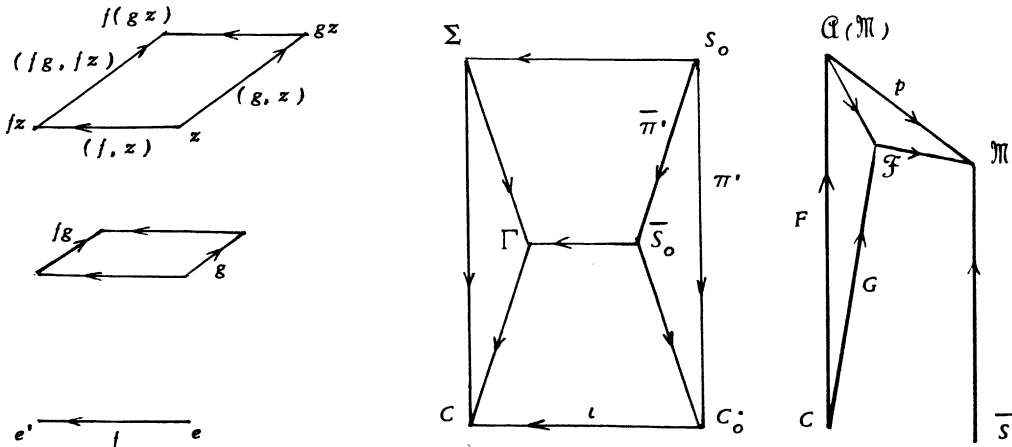
REMARQUE. Les conditions 1, 2 et 3 n'entraînent pas que (C^*, G) soit un couple dominant dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ une espèce de structures. On peut toutefois se ramener à ce cas en remplaçant $G(e)$ par la catégorie équivalente dont les éléments sont les couples (e, g) tels que $g \in G(e)$.

Supposons de plus que (C^*, G) soit un couple dominant dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ une espèce de structures μ , c'est-à-dire que (μ, G) soit une espèce de morphismes. Soit Γ la catégorie des hypermorphisms associée à l'espèce de structures μ . On sait [4a] que (Γ^*, Γ^+) est une catégorie double, la loi de composition $+$ étant définie par :

$$(f', g') + (f, g) = (f, g' \cdot g)$$

si, et seulement si, $f' = f$ et $(g', g) \in G(e) * G(e)$, où $e = \alpha(f)$.

Soit $(\bar{S}^*, S_o, \bar{\kappa}')$ l'espèce de structures somme des espèces de structures $F(e)$, où $e \in \pi'(S_o)$.



Rappelons le théorème suivant (voir [4b], p.2) qui relie la notion d'espèce de structures dominée dans $(p, \mathcal{Q}(\mathcal{M}))$ à la notion d'espèce de structures au-dessus d'une espèce de morphismes, définie dans [4b] :

THEOREME. $((\Gamma^*, \Gamma^\perp), \bar{\pi}', S_o)$ est une espèce de structures au-dessus de l'espèce de morphismes (μ, G) , où $\bar{\pi}'(z) = s$ si $\bar{\kappa}'(s, z)$ est défini. L'application :

$$((C^*, S_o, \kappa'), F) \rightarrow ((\Gamma^*, \Gamma^\perp), \bar{\pi}', S_o)$$

est une bijection de la classe des espèces de structures dominées par des applications covariantes sur la classe des espèces de structures au-dessus d'une espèce de morphismes.

CAS PARTICULIER. Soit C^* la catégorie des couples (U', U) , où U et U' sont des ouverts d'un espace topologique E et $U' \subset U$, munie de la loi de composition entre couples. Si (μ, G) est une espèce de morphismes et si $G(U, U)$ est un groupe (resp. un groupoïde) pour tout $(U, U) \in C_o^*$, alors G est un préfaisceau de groupes (resp. groupoïdes). Si de plus l'espèce de structures μ est une espèce de structures inductive complète [5], G est un faisceau de groupes (resp. groupoïdes). Supposons que $[C^*, S_o, \kappa']$ soit une espèce de structures complètes et que $([C^*, S_o, \kappa'], F)$ soit une espèce de structures dominée dans $(p, \mathcal{Q}(\mathcal{M}))$. Avec les notations des conditions 1, 2 et 3 et si G est un faisceau de groupes, pF est un faisceau d'ensembles muni du faisceau de groupes d'opérateurs G [6].

COUPLE DE CATEGORIES D'OPERATEURS.

Soit $([C^*, S_o, \kappa'], F)$ une espèce de structures dominée dans $(p, \mathcal{Q}(\mathcal{M}))$; reprenons les notations des conditions 1, 2, 3, ci-dessus; supposons que, pour tout $f \in C$, $G(f)$ soit le foncteur identité de la catégorie $\bar{C}^\perp$ et que, pour tout $e \in C_o^*$, $F(e) = [\bar{C}^\perp, \bar{\pi}'^1(e), \bar{\kappa}'(e)]$. Alors $\bar{C}^\perp$ est aussi une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à la loi de composition $\bar{\kappa}'$:

$$(g, z) \rightarrow \bar{\kappa}'(e)(g, z) \text{ si, et seulement si, } \bar{\pi}'(z) = e \text{ et } (g, z) \in \bar{C}^\perp * \bar{\pi}'^1(e).$$

Soit $\bar{\pi}'$ l'application : $z \rightarrow s$ si, et seulement si, $\bar{\kappa}'(s, z)$ est défini, de S_o sur $\bar{C}_o^\perp$; cette application est l'application somme des applications $\bar{\pi}'(e)$ correspondantes aux espèces de structures $F(e)$.

La situation précédente est équivalente à la suivante :

Soient C^* et $\bar{C}^\perp$ deux catégories, S_o une classe vérifiant les conditions suivantes :

- A) C^* est une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à κ' .
- B) $\bar{C}^\perp$ est une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à $\bar{\kappa}'$.
- C) Soient $z \in S$, $f \in C$ et $\bar{f} \in \bar{C}$. Si fz et $\bar{f}z$ sont définis, les composés $\bar{f}(fz)$ et

$f(\bar{f}z)$ sont définis et on a : $f(\bar{f}z) = \bar{f}(fz)$.

DEFINITION. Si les conditions A , B et C sont vérifiées, on dira que $(C^*, \bar{C}^+)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur S_o relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$.

Les catégories C^* et $\bar{C}^+$ jouent des rôles équivalents dans la définition précédente.

Soit $(C^*, \bar{C}^+)$ un couple de catégories d'opérateurs sur une classe Σ relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$. Soit H la classe somme de C , de $\bar{C}$ et de Σ .

PROPOSITION. H^* est une catégorie admettant C^* et la catégorie duale de $\bar{C}^+$ pour sous-catégories pleines, la loi de composition étant définie par

$$\begin{cases} (f', f) \rightarrow f' \cdot f & \text{si } (f', f) \in C^* * C^* \\ (\bar{f}', \bar{f}) \rightarrow \bar{f}' \cdot \bar{f} & \text{si } (\bar{f}', \bar{f}) \in \bar{C}^+ * \bar{C}^+ \\ (z, \bar{f}) \rightarrow \bar{f}z & \text{si } (\bar{f}, z) \in \bar{C}^+ * \Sigma \\ (f, z) \rightarrow fz & \text{si } (f, z) \in C^* * \Sigma \end{cases}$$

EXEMPLE. Soit $[C^*, S_o, \kappa']$ une espèce de structures et soit $\bar{C}^+$ la catégorie ayant pour seul élément une unité $a \in C$. Alors (C^*, a) est un couple de catégories d'opérateurs sur S_o relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$, où :

$$\bar{\kappa}'(a, z) = z \quad \text{pour tout } z \in S_o.$$

La classe H est la classe somme de C , de S_o et de a . Dans la catégorie H^* correspondante, tout élément $z \in S_o$ admet a pour unité à droite.

Soit K^* une catégorie; soient (K^*, p, C^*) et $(K^*, \bar{p}, \bar{C}^+)$ deux foncteurs. Soit Σ la classe des triplets $(e, k, \bar{e})$ tels que :

$$e \in C_o^*, \quad \bar{e} \in \bar{C}_o^+, \quad k \in K, \quad \beta(k) = p(e) \quad \text{et} \quad \alpha(k) = \bar{p}(\bar{e}).$$

C^* opère sur Σ relativement à la loi de composition κ' :

$$(f, (e, k, \bar{e})) \rightarrow (\beta(f), p(f) \cdot k, \bar{e}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(f) = e.$$

La catégorie duale $(\bar{C}^+)^*$ de $\bar{C}^+$ opère sur Σ relativement à $\bar{\kappa}'$:

$$(\bar{f}, (e, k, \bar{e})) \rightarrow (e, k \cdot \bar{p}(\bar{f}), \alpha(\bar{f})) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{e} = \beta(\bar{f}).$$

PROPOSITION. $(C^*, (\bar{C}^+)^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur Σ relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$; soit H^* la catégorie correspondante; il existe un foncteur $(K^*, \tilde{p}, H^*)$ admettant p et $\bar{p}$ pour restrictions.

Nous aurons en particulier à utiliser la construction précédente dans le cas où $\bar{C}^+$ est une sous-catégorie de K^* et $\bar{p} = \iota$.

CATEGORIES DOMINEES.

Soit C^* une catégorie; pour tout couple (e', e) d'unités de C^* , nous désignons

par $\text{Hom}(e', e)$ la classe des $h \in C$ tels que $\alpha(h) = e$ et $\beta(h) = e'$. Soit $\Gamma \cdot$ la sous-catégorie de la catégorie produit $C \cdot \times C^*$ formée des couples $(f', f) \in C \times C$ tels que $\text{Hom}(\alpha(f'), \beta(f)) \neq \emptyset$. Cette catégorie est une catégorie d'opérateurs sur la classe C relativement à la loi de composition $\kappa'(C \cdot)$:

$$((f', f), h) \rightarrow f' \cdot h \cdot f$$

si, et seulement si, $(h, f) \in C \cdot * C \cdot$ et $(f', h) \in C \cdot * C \cdot$.

Soit $\eta(C \cdot) = (\Gamma \cdot, C, \kappa'(C \cdot))$ l'espèce de structures ainsi définie. Le couple définissant $\eta(C \cdot)$ est le couple $(C \cdot \times C^*, \text{Hom})$, où Hom est le foncteur de $\Gamma \cdot$ vers $\mathbb{M}$ tel que $\text{Hom}(f', f)$ soit l'application : $h \rightarrow f' \cdot h \cdot f$ de $\text{Hom}(\alpha(f'), \beta(f))$ dans $\text{Hom}(\beta(f'), \alpha(f))$, pour tout $(f', f) \in \Gamma \cdot$.

DEFINITION. Si $(\eta(C \cdot), F)$ est une catégorie dominée dans $(\lambda, \mathbb{Q})$, où $(\mathbb{M}, \lambda, \mathbb{Q}) \in \mathcal{F}$, on dira que $(C \cdot, F)$ est une catégorie dominée dans $(\lambda, \mathbb{Q})$.

EXEMPLE. Une catégorie préadditive [8] est une catégorie dominée dans $(p_{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens et $p_{\mathcal{G}}$ la restriction de $p_{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{G}$.

CONSTRUCTION D'ESPECES DE STRUCTURES DOMINEES A PARTIR DE (η, F) .

1) Soit $(\mathbb{M}, q, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes; soit $(\mathbb{M}, q, \bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ le foncteur tel que $\bar{\mathcal{H}}$ soit la catégorie des foncteurs $\mathcal{H}$ -structurés et $\bar{q}$ sa projection canonique dans $\mathcal{H}$ (voir [1]). Soit (η, F) l'espèce de structures dominée dans $(p, \mathcal{Q}(\mathbb{M}))$ considérée au début, (μ, G) l'espèce de morphismes correspondante. Supposons que $(\mu, \tilde{G})$ soit une espèce de structures dominée dans $(\bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ telle que $G = \bar{q} \tilde{G}$ et que (η, H) soit une espèce de structures dominée dans $(q, \mathcal{H})$. Supposons de plus que $\tilde{H}(e) = (\tilde{G}(e), \bar{\pi}'_e, H(e))$, où $\bar{\pi}'_e$ est la restriction de $\bar{\pi}'$ à $\tilde{\pi}'^1(e) = p \cdot F(e) = q \cdot H(e)$, soit une $\mathcal{H}$ -espèce de structures (voir [4c]), pour tout $e \in (C_1)_0^*$ et que, pour tout $f \in C_1$,

$$\tilde{H}(f) = (\tilde{H}(e'), (G(f), \varphi_0(f)), \tilde{H}(e))$$

soit une application $\mathcal{H}$ -covariante [4c], où $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Ceci signifie que $(\eta, \tilde{H})$ est une espèce de structures dominée dans $(p \cdot p_{\mathcal{H}}, \mathcal{Q}(\mathcal{H}))$ où $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ est la catégorie des applications $\mathcal{H}$ -covariantes [4c] et $p_{\mathcal{H}}$ sa projection canonique dans $\mathcal{Q}(\mathbb{M})$.

EXEMPLE. Si on prend pour $\mathcal{H}$ la catégorie des applications continues entre espaces topologiques (resp. des applications r fois différentiables entre variétés r fois différentiables), on obtient une situation qui généralise celle des espaces fibrés topologiques (resp. différentiables), et que nous préciserons plus loin.

2) Soit (η, F) l'espèce de structures dominée dans $(p, \mathcal{A}(\mathbb{M}))$ déjà considérée. Soit $(\mathbb{M}, \lambda, \mathcal{L})$ un foncteur. Supposons que, pour tout $e \in (C_1)_0^*$, $(F(e), N_e)$ soit une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathcal{L})$ et que, pour tout $f \in C_1$, $((F(e'), N_{e'}), F(f), (F(e), N_e))$ soit une application covariante $\tilde{F}(f)$ entre espèces de structures dominées dans $(\lambda, \mathcal{L})$ (voir [3], p. 16). Ceci signifie que $(\eta, \tilde{F})$ est une espèce de structures dominée dans $(p, \bar{\lambda}, \mathcal{A}'(\lambda, \mathcal{L}))$, où $\mathcal{A}'(\lambda, \mathcal{L})$ est la catégorie des applications covariantes entre espèces de structures dominées dans $(\lambda, \mathcal{L})$ et $\bar{\lambda}$ sa projection canonique dans $\mathcal{A}(\mathbb{M})$ (voir [3]).

EXEMPLE. On peut prendre pour $(\mathbb{M}, \lambda, \mathcal{L})$ le foncteur $(\mathbb{M}, p\mathcal{F}, \mathcal{F})$; ce cas intervient en théorie de la cohomologie sur les catégories; la notion de faisceau de groupes admettant un faisceau de groupes d'opérateurs [6] en est un cas particulier. D'autres cas particuliers ont été utilisés dans des constructions d'Analyse ou de Géométrie différentielle.

2. Surjections et projections.

Soit C^* une catégorie. Nous désignerons par $R_g(C^*)$ (resp. $R_d(C^*)$) la sous-catégorie de C^* formée des monomorphismes (resp. épimorphismes) de C^* , par $R(C^*)$ la sous-catégorie $R_g(C^*) \cap R_d(C^*)$ dont les éléments sont les éléments réguliers de C^* .

Les conditions $f \in C$, $f' \in R_g(C^*)$ et $f' = f.g$ entraînent $g \in R_g(C^*)$.

Soit $(\hat{C}^*, p, C^*)$ un foncteur et soit $\hat{C}'$ une sous-classe de $\hat{C}$. Nous désignerons ^{*)} par $C^*(\hat{C}', p)_{\underline{\quad}}$ et $C^*(\hat{C}', p)_{\overline{\quad}}$ les classes des $(\hat{C}', p)$ -injections et $(\hat{C}', p)$ -surjections respectivement, qui sont des catégories [2] si $\hat{C}^*$ est une sous-catégorie de $\hat{C}$. Si $b \in C$ et si b' est un $(\hat{C}', p)$ -sous-morphisme (resp. $(\hat{C}', p)$ -morphisme quotient) de b , nous poserons ^{*)}

$$b' \xrightarrow[\substack{(\hat{C}', p)}]{\quad} b \quad (\text{resp. } b' \xrightarrow[\substack{(\hat{C}', p)}]{\quad} b).$$

PROPOSITION. Si $j \in C^*(\hat{C}, p)_{\underline{\quad}}$ et si $p(j) \in R_d(\hat{C}^*)$ (resp. $\in \hat{C}_\gamma^*$), on a $j \in R_d(C^*)$ (resp. $\in C_\gamma^*$). Si f admet un inverse à gauche dans C^* et si $p(f) \in R_d(\hat{C}^*)$, f est une $(\hat{C}, p)$ -surjection faible. Si f admet un inverse à droite dans C^* et si $(\hat{C}^*, p, C^*)$ est un foncteur fidèle, $f \in C^*(\hat{C}, p)_{\underline{\quad}}$.

PROPOSITION. Soient $f' \in C$ et $f \in R_d(C^*)$. Si $f'.f$ est une $(\hat{C}, p)$ -surjection (resp. surjection faible), alors f' est une $(\hat{C}, p)$ -surjection (resp. surjection faible).

COROLLAIRE. Soient $j \in C^*(\hat{C}, p)_{\underline{\quad}}$, $j_1 \in C^*(\hat{C}, p)_{\underline{\quad}}$ et $(j_1, f, j, b) \in \square C^*$. Si $b \in R_d(C^*)$, on a : $j_1 \xrightarrow[\substack{(\hat{C}, p)}]{\quad} b$.

^{*)} Ces notations diffèrent de celles de [3] où $C^*(\hat{C}', p)_{\underline{\quad}}$ et $C^*(\hat{C}', p)_{\overline{\quad}}$ sont représentés par $C^* \cdot^s(\hat{C}', p)$ et $C^* \cdot^i(\hat{C}', p)$ et où les symboles $\xrightarrow{\quad}$ et $\xleftarrow{\quad}$ sont resp. notés $\rightharpoonup$ et $\rightharpoonleft$.

THEOREME. Soient $b \in C$ et $b' \in C$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) b' est un $(\hat{C}, p)$ -morphisme quotient de b .
- 2) Il existe des $(\square \hat{C}, \square p)$ -surjections $(\beta(j), j, j, \alpha(j))$ et (b', j_1, j, b) .

PROPOSITION. Soit C_1 une sous-catégorie de C . Si $j_1 \in C_1 \cap C \cdot (\hat{C}, p)_\perp$, on a $j \in C_1 \cdot (\hat{C}, p)_\perp$ si, et seulement si, les conditions $g \in C$ et $g \cdot j_1 \in C_1$ entraînent $g \in C_1$.

Soit C_1 une sous-catégorie de C et $\hat{C}$ une sous-catégorie de $\hat{C}$ contenant $p(s)$ pour tout $s \in (C_1)_0$.

DEFINITION. On dira que C_1 vérifie la condition (σ) (resp. (σ^*)) relativement à $(\hat{C}', p)$ si les conditions $j \in C \cdot (\hat{C}', p)_\perp$ (resp. $j \in C \cdot (\hat{C}', p)_\perp$), $\alpha(j) \in C_1$ et $\beta(j) \in C_1$ entraînent $j \in C_1 \cdot (\hat{C}', p)_\perp$ (resp. $j \in C_1 \cdot (\hat{C}', p)_\perp$).

Une sous-catégorie pleine de C vérifie la condition (σ) relativement à $(\hat{C}', p)$.

PROPOSITION. Pour que C_1 vérifie la condition (σ) relativement à $(\hat{C}', p)$ il faut et il suffit que les conditions :

$$b' \cdot \frac{(\hat{C}', p)}{h}, \quad h \in C_1, \quad \alpha(b') \in C_1 \quad \text{et} \quad \beta(b') \in C_1$$

entraînent $b' \in C_1$.

PROJECTIONS ET INJECTIONS.

Soit H une catégorie, C et $\bar{C}$ deux sous-catégories pleines de H . Supposons que H soit la somme de C , de $\bar{C}$ et d'une sous-classe Σ de H telle que, pour tout $f \in \Sigma$, on ait $\alpha(f) \in \bar{C}$ et $\beta(f) \in C$. Cette situation se présente par exemple si H est la catégorie associée (voir paragraphe 1) à un couple $(C, \bar{C}^\perp)$ de catégorie d'opérateurs sur Σ . Remarquons que la donnée de H et de C détermine entièrement Σ et $\bar{C}$.

Soit Θ la catégorie ayant 3 éléments distincts z , $\alpha(z) = \bar{e}$ et $\beta(z) = e$. Il existe un foncteur (Θ, Z, H) tel que $Z^{-1}(e) = C$, à savoir le foncteur défini par :

$$g \rightarrow e \quad \text{si} \quad g \in C, \quad \bar{g} \rightarrow \bar{e} \quad \text{si} \quad \bar{g} \in \bar{C} \quad \text{et} \quad f \rightarrow z \quad \text{si} \quad f \in \Sigma.$$

DEFINITION. On dira que $j \in H$ est un (C, H) -projecteur si j est une (Θ, Z) -surjection telle que $Z(j) \neq \bar{e}$. Si $b' \in C$ est un (Θ, Z) -morphisme quotient de $b \in H$, on dira que b' est une (C, H) -projection de b .

Tout (C, H) -projecteur est un épimorphisme puisque z est un épimorphisme de Θ .

PROPOSITION. Pour que $j \in H$ soit un (C, H) -projecteur, il faut et il suffit que $j \in C_j$ ou que les conditions $g \in \Sigma$ et $\alpha(g) = \alpha(j)$ assurent l'existence d'un et d'un seul $g' \in \Sigma$ tel que $g' \cdot j = g$.

Soit K^* une catégorie et soit C^* une sous-catégorie pleine de K^* . Soit $\bar{C}^*$ la sous-catégorie pleine de K^* ayant pour unités les $s \in K_0^*$ tels que $s \notin C_0^*$. Appliquons la construction du § 1 aux foncteurs (K^*, ι, C^*) et $(K^*, \iota, \bar{C}^*)$ et identifions la classe Σ des triplets $(s, k, \bar{s})$ tels que $k \in K$, $\bar{s} = \alpha(k) \in \bar{C}$ et $s = \beta(k) \in C$ à la sous-classe de K formée des morphismes k pour lesquels $\alpha(k) \in \bar{C}$ et $\beta(k) \in C$. Soit H^* la catégorie construite au § 1 qui s'identifie à la sous-catégorie de K^* réunion de C , de $\bar{C}$ et de Σ .

DEFINITION. On dira que $j \in K$ est un (C, K^*) -projecteur si j est un (C, H^*) -projecteur. On dira que $b' \in C$ est une (C, K^*) -projection de $b \in K$ s'il existe un quatuor $(b', j', j, b) \in \square K^*$ tel que j et j' soient des (C, K^*) -projecteurs; dans ce cas, on posera : $b' \underline{(C, K^*)}_j b$.

Cette définition, qui est donnée dans [3], coïncide avec la définition précédente lorsque $K = H$. Nous allons énoncer ici des propriétés des (C, K^*) -projecteurs non indiquées dans [3].

PROPOSITION. Pour que $j \in K$ soit un (K, K^*) -projecteur, il faut et il suffit que j soit inversible dans K^* .

REMARQUE. Plus généralement la construction précédente s'applique même si C^* n'est pas une sous-catégorie pleine de K^* ; alors un (C, K^*) -projecteur est soit un élément de C_γ^* soit un $j \in K$ tel que $\alpha(j) \notin C$ et que les conditions $g \in K$, $\alpha(g) = \alpha(j) \notin C_0^*$ et $\beta(g) \in C_0^*$ assurent l'existence et l'unicité de $g' \in C$ vérifiant $g = g' \cdot j$.

PROPOSITION. Soient $h \in K$, et j et j' deux (C, K^*) -projecteurs tels que $\alpha(h) = \alpha(j)$ et $\beta(h) = \alpha(j')$. Il existe un et un seul $b' \underline{(C, K^*)}_j h$ tel que $(b', j', j, h) \in \square K^*$.

PROPOSITION. Si j est un (C, K^*) -projecteur, alors $j \cdot g$ est un (C, K^*) -projecteur, pour tout $g \in K_\gamma^*$.

PROPOSITION. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) (b', j', j, b) et $(\beta(j), j, j, \alpha(j))$ sont des $(\square C^*, \square K^*)$ -projecteurs.
- 2) b' est une (C, K^*) -projection de b et $(b', j', j, b) \in \square K^*$, où j et j' sont des (C, K^*) -projecteurs.

PROPOSITION. Si $h \in K$, $b' \underline{(C, K^*)}_j h$ et $b'' \underline{(C, K^*)}_j h$, il existe un et un seul quatuor $(b', \gamma', \gamma, b) \in \square C^*$ tel que $\gamma \in C_\gamma^*$ et $\gamma' \in C_\gamma^*$.

CATEGORIES A C-PROJECTIONS.

DEFINITION. On dira que K^* est une catégorie à C-projections (resp. à C-éjections) si C^* est une sous-catégorie pleine de la catégorie K^* et si, pour tout $e \in K_0^*$, il existe un (C, K^*) -projecteur j tel que $\alpha(j) = e$ (resp. un (K^*, C) -éjecteur j tel que $\beta(j) = e$).

Soit K^* une catégorie à C -projections. Soit $U(C, K^*)$ la sous-catégorie de $\square K^*$ formée des quatuors (b', j', j, b) tels que $b' \in C$ et que j et j' soient des (C, K^*) -projecteurs.

PROPOSITION. $\bar{\Psi} = (K^*, \psi, U(C, K^*))$, où $\psi(b', j', j, b) = b$, est un foncteur définissant K^* comme catégorie quotient strict de $U(C, K^*)$ (voir [2]).

Soit ρ_ψ la relation d'équivalence sur $U(C, K^*)$ associée à ψ , qui est définie par :

$$(b'', \bar{j}', \bar{j}, b) \sim (b', j', j, b).$$

Soit P l'équivalence de K^* sur la catégorie quotient strict $U(C, K^*)/\rho_\psi$ de $U(C, K^*)$ par ρ_ψ , définie par :

$$b \mapsto (b', j', j, b) \bmod \rho_\psi.$$

THEOREME. Supposons que C^* vérifie la condition :

(0) Tout trio (g, g, f) de C^* , où $f \in C_\gamma^*$, est contenu dans un quatuor de $(C^*; C, C_\gamma^*)$. Pour tout $b \in K$, représentons par $\sigma(b)$ la classe des (C, K^*) -projections de b . Alors C^* admet une catégorie quotient strict $\hat{C}^*$ par la relation d'équivalence $g \sim g'$ si $\sigma(g) = \sigma(g')$, dont les unités sont les saturantes¹⁾ des unités de C^* dans C^* ; de plus $(\hat{C}^*, \sigma, K^*)$ est une pg -surjection définissant $\hat{C}^*$ comme catégorie quotient strict de K^* .

PROPOSITION. Un foncteur section Π de $\bar{\Psi}$ est une équivalence de K^* sur une sous-catégorie de $U(C, K^*)$; tout autre foncteur section Π_1 de $\bar{\Psi}$ se déduit de Π par une équivalence naturelle. Soit π l'application de K dans K telle que $(\pi(e))^\square = \alpha^\square(\Pi(e))$,²⁾ pour tout $e \in K_0^*$; alors $(\beta^\square \Pi, \pi)$ est un foncteur naturalisé.

PROPOSITION. Soit π une application de K_0^* dans la classe des (C, K^*) -projecteurs telle que $\alpha(\pi(e)) = e$ pour tout $e \in K_0^*$. Il existe un foncteur naturalisé $(\bar{\pi}, \pi)$ tel que $\bar{\pi}(b) \in (C, K^*)$, b pour tout $b \in K$ et l'application $b \mapsto (\bar{\pi}(b), \pi(\beta(b)), \pi(\alpha(b)), b)$ définit un foncteur section de $\bar{\Psi}$.

DEFINITION. Une application π de K dans la classe des (C, K^*) -projecteurs telle que $e = \alpha\pi(e)$ pour tout $e \in K_0^*$ sera appelée (C, K^*) -projection naturalisée; le foncteur naturalisé $(\bar{\pi}, \pi)$ correspondant sera appelé foncteur (C, K^*) -projection naturalisé associé à π .

1)

Dans une catégorie C^* on appelle saturante d'une sous-classe B de C la catégorie engendrée dans C^* par la classe

$$C_\gamma^* \cdot B \cup B \cdot C_\gamma^*$$

2) Si $f \in K$, on pose $f^\square = (\beta(f), f, f, \alpha(f))$ et $f^{\square\square} = (f, \beta(f), \alpha(f), f)$.

IMAGE D'UNE PROJECTION PAR UN FONCTEUR.

Soient K^* et $\hat{K}^*$ deux catégories, C^* et $\hat{C}^*$ des sous-catégories pleines de K^* et $\hat{K}^*$ respectivement. Soient $P(C, K^*)$ et $P(\hat{C}, \hat{K}^*)$ les classes des (C, K^*) projecteurs et des $(\hat{C}, \hat{K}^*)$ -projecteurs, $E(K^*, C)$ et $E(\hat{K}^*, \hat{C})$ les classes des (K^*, C) -éjecteurs et des $(\hat{K}^*, \hat{C})$ -éjecteurs.

Soit $\bar{p} = (\hat{K}^*, p, K^*)$ un foncteur tel que $p(C) \subset \hat{C}$; soit p_γ la restriction de p à C_γ .

PROPOSITION. Soient j et j' deux (C, K^*) -projecteurs tels que $\alpha(j) = \alpha(j')$ et $p(j) = p(j')$. Si $(\hat{C}_\gamma, p_\gamma, C_\gamma)$ est de plus un foncteur bien fidèle ^{*}) et si $p(j)$ est un épimorphisme de $\hat{K}^*$, on a $j = j'$.

PROPOSITION. Si $f \in K$ est une $(\hat{K}, p)$ -surjection telle que $\beta(f) \in C$ et $p(f) \in P(\hat{C}, \hat{K}^*)$, on a $f \in P(C, K^*)$. Si $\bar{p}^{-1}(\hat{C}) = C$ et si les conditions $\hat{k} \in \hat{K}$ et $\alpha(\hat{k}) \in \hat{C}$ entraînent $\beta(\hat{k}) \in \hat{C}$, les relations $j \in P(C, K^*)$ et $p(j) \in R_d(\hat{K}^*)$ assurent que j est une $(\hat{K}, p)$ -surjection.

DEFINITION. On dira que $\bar{p}$ est un foncteur $(\hat{C}, C)$ -compatible avec les projections (resp. les éjections) si $p(P(C, K^*)) \subset P(\hat{C}, \hat{K}^*)$ (resp. si $p(E(K^*, C)) \subset E(\hat{K}^*, \hat{C})$).

PROPOSITION. Soit p un foncteur $(\hat{C}, C)$ -compatible avec les projections; si b' est une (C, K^*) -projection de $b \in K$, on a $p(b') \in \underline{P(C, K^*)} / p(b)$.

Supposons que $\hat{K}^*$ soit une catégorie à $\hat{C}$ -projections (resp. $\hat{C}$ -éjections). Soit $\hat{\pi}$ une $(\hat{C}, \hat{K}^*)$ -projection (resp. $(\hat{K}^*, \hat{C})$ -éjection) naturalisée et $(\hat{\Pi}, \hat{\pi})$ le foncteur naturalisé associé à $\hat{\pi}$.

DEFINITION. On dira que π est une (C, K^*) -projection (resp. (K^*, C) -éjection) naturalisée appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\pi}$ si π est une (C, K^*) -projection (resp. (K^*, C) -éjection) naturalisée telle que $p\pi = \hat{\pi}p_0$. On dira que $\bar{p}$ est compatible avec $(\hat{\pi}, C)$ s'il existe une (C, K^*) -projection (resp. (K^*, C) -éjection) naturalisée π appliquée par p sur $\hat{\pi}$.

Si on suppose le foncteur $(\hat{C}_\gamma, p_\gamma, C_\gamma)$ bien fidèle, il existe au plus une (C, K^*) -projection (resp. (K^*, C) -éjection) naturalisée appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\pi}$.

PROPOSITION. Si π est une (C, K^*) -projection (resp. (K^*, C) -éjection) naturalisée appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\pi}$ et si (Π, π) est le foncteur naturalisé associé à π , on a :

$$\bar{p} \cdot \Pi = \hat{\Pi} \cdot \bar{p}.$$

PROPOSITION. Si $\bar{p}$ est compatible avec $(\hat{\pi}, C)$, alors $\bar{p}$ est un foncteur $(\hat{C}, C)$ -compatible avec les projections (resp. les éjections).

^{*}) Un foncteur $(\hat{K}^*, q, K^*)$ est bien fidèle si les conditions : $k_1 \in K$, $\alpha(k_1) = \alpha(k_2)$ et $q(k_1) = q(k_2)$ entraînent $k_1 = k_2$.

3. Applications des projections : Produits et produits fibrés .

PRODUIT DANS UNE CATEGORIE.

Soit C^* une catégorie. Soit $\mathcal{I}$ une classe de classes (qui peut être réduite à un seul élément I). Soit $\mathcal{J}(C^*)$ la catégorie dont les éléments sont les familles $(f_i)_{i \in I}$, où $f_i \in C$ et $I \in \mathcal{I}$, munie de la loi de composition suivante :

$$((f'_j)_{j \in J}, (f_i)_{i \in I}) = (f'_i \cdot f_i)_{i \in I}$$

si, et seulement si, $J = I$ et $(f'_i, f_i) \in C^* * C^*$ pour tout $i \in I$.

En particulier si $\mathcal{I}$ admet I pour seul élément, $\mathcal{J}(C^*)$ est la catégorie produit $C^* \cdot I$; dans le cas général, $\mathcal{J}(C^*)$ est la catégorie somme des catégories $C^* \cdot I$, où $I \in \mathcal{I}$.

Soit $\Sigma(\mathcal{J})$ la classe des couples $((f_i)_{i \in I}, e)$ tels que $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{J}(C^*)$ et $\alpha(f_i) = e$ pour tout $i \in I$. C^* opère sur $\Sigma(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition κ'_1 :

$$(g, ((f_i)_{i \in I}, e)) \rightarrow ((f_i \cdot g)_{i \in I}, \alpha(g)) \text{ si, et seulement si, } e = \beta(g).$$

$\mathcal{J}(C^*)$ opère sur $\Sigma(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition κ' :

$$((g_j)_{j \in J}, ((f_i)_{i \in I}, e)) \rightarrow ((g_i \cdot f_i)_{i \in I}, e)$$

si, et seulement si, $I = J$ et $(g_i, f_i) \in C^* * C^*$ pour tout $i \in I$.

De plus $(\mathcal{J}(C^*), C^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\Sigma(\mathcal{J})$ relativement à (κ', κ'_1) . Soit $H^*(\mathcal{J})$ la catégorie correspondante (§ 1) dont $\mathcal{J}(C^*)$ et C^* sont des sous-catégories pleines.

DEFINITION. Un $(H^*(\mathcal{J}), C^*)$ -éjecteur $((f_i)_{i \in I}, e)$ est appelé $\mathcal{J}$ -produit naturalisé*) dans C^* ; une $(H^*(\mathcal{J}), C^*)$ -éjection de $(h_i)_{i \in I}$ est appelée $\mathcal{J}$ -produit dans C^* de $(h_i)_{i \in I}$. On dit que C^* est une catégorie à $\mathcal{J}$ -produits si $H^*(\mathcal{J})$ est une catégorie à C^* -éjections; une application (resp. un foncteur) $(H^*(\mathcal{J}), C^*)$ -éjection naturalisée est appelé application (resp. foncteur) $\mathcal{J}$ -produit.

Si $\mathcal{I}$ est la classe de tous les ensembles finis, non vides, d'entiers, une catégorie à $\mathcal{J}$ -produits sera appelée catégorie à produits finis.

PROPOSITION. Si $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, $((f_i)_{i \in I}, e)$ est un $\mathcal{I}'$ -produit dans C^* si, et seulement si, c'est un $\mathcal{J}$ -produit dans C^* tel que $I \in \mathcal{I}'$.

Nous supposons que toutes les classes I d'indices considérées appartiennent à une même classe $\mathfrak{M}_0$ de classes, qui contient avec une classe toute ses sous-classes et qui admet pour élément tout ensemble fini d'entiers; ainsi $\mathcal{I}$ désignera une sous-classe de $\mathfrak{M}_0$. Nous désignerons par $P(C^*)$ la classe de tous les $\mathfrak{M}_0$ -produits. En vertu de la proposition précédente, on peut dire produit au lieu de $\mathcal{J}$ -produit, ou de

) La notion de produit naturalisé dans C^ est équivalente à celle de produit dans C^* au sens de [7], texte auquel nous renvoyons pour d'autres propriétés du produit.

$\mathbb{M}_o$ - produit.

PROPOSITION. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) h est un produit de $(h_i)_{i \in I}$ dans $C^\bullet$.
- 2) Il existe $((h_i, f'_i, f_i, h)_{i \in I}, b^{\square}) \in P(\square C^\bullet)$ et $((f'_i)^{\square}, \beta(h)^{\square}) \in P(\square C^\bullet)$.

COROLLAIRE. Si h' et h sont deux produits de $(h_i)_{i \in I}$ dans $C^\bullet$, il existe $\gamma \in C_\gamma^\bullet$ et $\gamma' \in C_\gamma^\bullet$ tels que $h' \cdot \gamma = \gamma' \cdot h$.

Soit $C^\bullet$ une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits. Soit (Π, π) un foncteur $\mathcal{G}$ -produit naturalisé. On posera :

$$\Pi((h_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} h_i \quad \text{ou} \quad \Pi((h_i)_{i \leq n}) = h_1 \times \dots \times h_n.$$

Soit $e_i \in C_o^\bullet$ pour tout $i \in I$ et $\pi((e_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, e)$; on appellera p_i la projection canonique de $\prod_{i \in I} e_i$ sur e_i . Si $g_i \in C$, $\alpha(g_i) = e'$ et $\beta(g_i) = e_i$ pour tout $i \in I$, nous représenterons par $[g_i]_{i \in I}$ (ou $[g_1, \dots, g_n]$ si I est fini) l'unique élément de C tel que :

$$p_i \cdot [g_i]_{i \in I} = g_i \text{ pour tout } i \in I.$$

Soit $(\hat{C}^\bullet, p, C^\bullet) = \bar{p}$ un foncteur; soit p_γ la restriction de p à $C_\gamma^\bullet$. $\bar{p}$ s'étend en un foncteur $\mathcal{G}(\bar{p})$ de $H^\bullet(\mathcal{G})$ vers $\hat{H}^\bullet(\mathcal{G})$ en posant :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\bar{p})((h_i)_{i \in I}) &= (p(h_i))_{i \in I}, & \text{où } h_i \in C, \\ \mathcal{G}(\bar{p})((f_i)_{i \in I}, e) &= ((p(f_i))_{i \in I}, p(e)), & \text{où } f_i \in C \text{ et } e = \alpha(f_i). \end{aligned}$$

PROPOSITION. Si $(\hat{C}_\gamma^\bullet, p_\gamma, C_\gamma^\bullet)$ est de plus un foncteur bien fidèle les conditions $((f_i)_{i \in I}, e) \in P(C^\bullet)$, $((f'_i)_{i \in I}, e') \in P(C^\bullet)$, $\beta(f_i) = \beta(f'_i)$, $p(f_i) = p(f'_i)$ et $((p(f_i))_{i \in I}, p(e)) \in P(\hat{C}^\bullet)$ entraînent $e = e'$.

DEFINITION. On dira que $\bar{p}$ est compatible avec les $\mathcal{G}$ -produits si on a $\mathcal{G}(\bar{p})(P(C^\bullet)) \subset P(\hat{C}^\bullet)$. Si $\hat{\pi}$ est une application $\mathcal{G}$ -produit naturalisé dans $\hat{C}^\bullet$, on dira que $\bar{p}$ est $\hat{\pi}$ -compatible s'il existe une application $\mathcal{G}$ -produit naturalisé π dans $C^\bullet$ appliquée sur $\hat{\pi}$ par $\mathcal{G}(\bar{p})$.

PROPOSITION. Soit $(\hat{\Pi}, \hat{\pi})$ un foncteur $\mathcal{G}$ -produit naturalisé dans $\hat{C}^\bullet$ et supposons que $\bar{p}$ est $\hat{\pi}$ -compatible. Il existe un foncteur $\mathcal{G}$ -produit naturalisé (Π, π) dans $C^\bullet$ tel que :

$$p(\prod_{i \in I} h_i) = \prod_{i \in I} p(h_i) \quad \text{si } h_i \in C.$$

Si $g_i \in C$ et $\alpha(g_i) = e'$ pour tout $i \in I$, on a : $p([g_i]_{i \in I}) = [p(g_i)]_{i \in I}$.

PROPOSITION. Si $C^\bullet$ et $\hat{C}^\bullet$ sont des catégories à produits finis et si $\bar{p}$ est compatible avec les $\{1, 2\}$ -produits, alors $\bar{p}$ est compatible avec les produits finis.

THEOREME. Soit $\hat{\pi}$ une application produit fini naturalisé dans $C^\bullet$ et soit $\hat{\pi}_2$ sa

restriction à $\hat{C}_0^\bullet \times \hat{C}_0^\bullet$. Si $\bar{p}$ est $\hat{\pi}_2$ -compatible et si $(\hat{C}_\gamma^\bullet, p_\gamma, C_\gamma^\bullet)$ est une catégorie d'hypermorphismes saturée, alors $\bar{p}$ est $\hat{\pi}$ -compatible.

Soit $(\hat{C}^\bullet, p, C^\bullet)$ un foncteur fidèle (respectivement soit $(\hat{C}^\bullet, p, C^\bullet, C_\gamma^\bullet)$ une catégorie d'homomorphismes). Soit $\hat{\pi}$ une application produit fini naturalisé dans $\hat{C}^\bullet$. Pour que $\bar{p}$ soit compatible avec les produits finis (resp. soit $\hat{\pi}$ -compatible), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées, où $s_i \in C_0^\bullet$, $i = 1, 2$ et $\hat{\pi}(p(s_1), p(s_2)) = ((\hat{p}_1, \hat{p}_2), \hat{e})$:

- 1) Il existe $s_1 \times s_2 \in C_0^\bullet$ tel que $p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2)$;
- 2) Il existe $p_i \in C$ tels que $\alpha(p_i) = s_1 \times s_2$, $\beta(p_i) = s_i$ et $p(p_i) = \hat{p}_i$,
- 3) Si $g_i \in C$, $\alpha(g_i) = s'$ et $\beta(g_i) = s_i$, il existe $[g_1, g_2] \in C$ tel que :

$$\alpha([g_1, g_2]) = s', \quad \beta([g_1, g_2]) = s_1 \times s_2 \quad \text{et} \quad p([g_1, g_2]) = [p(g_1), p(g_2)].$$

PROPOSITION. Soient $C^\bullet$ et $\hat{C}^\bullet$ des catégories à $\{I\}$ -produits. Si $\bar{p}$ est compatible avec les $\{I\}$ -produits et si on a $j \in C^\bullet(\hat{C}^\bullet, p)$ pour tout $i \in I$, tout produit de $(j_i)_{i \in I}$ est une $(\hat{C}^\bullet, p)$ -injection.

CATÉGORIE D'HOMOMORPHISMES A PRODUITS AU-DESSUS DE $\mathbb{M}$.

Soit $\mathbb{M}$ une catégorie pleine d'applications telle que $\mathbb{M}_0$ contienne avec une classe toutes ses parties, avec 2 classes leur produit. Soit (Π, π) le foncteur produit naturalisé dans $\mathbb{M}$ tel que :

$$\pi((M_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} M_i), \quad \text{où } p_i(x_i)_{i \in I} = x_i.$$

DEFINITION. Soit $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$ un foncteur et soit $s_i \in \mathcal{H}_0$; on dira que $(s_i)_{i \in I}$ admet $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ pour produit dans $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$ et on posera : $S = \prod_{i \in I} s_i$, si $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ est un produit naturalisé de $(s_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $p(\bar{p}_i)$ soit la projection canonique de $\prod_{i \in I} p(s_i)$ sur $p(s_i)$.

Soit $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes.

PROPOSITION. Si $s \in \mathcal{H}_0$, si $(s)_{i \in I}$ admet un produit $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ dans $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$ et s'il existe $s_\delta \nearrow_p S$ tel que $p(s_\delta)$ soit la diagonale Δ de $p(S)$, il existe $\bar{\delta} \in \mathcal{H}_\gamma$ tel que $\alpha(\bar{\delta}) = s$, $\beta(\bar{\delta}) = s_\delta$ et :

$$p(\bar{\delta}) = (\Delta, [p(s)]_{i \in I}, p(s)).$$

DEFINITION. Soit $s \in \mathcal{H}_0$; si $(s)_{i \in I}$ admet un produit $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ dans $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$ et s'il existe $s_\delta \nearrow_p S$ tel que $p(s_\delta)$ soit la diagonale de $p(S)$ on dira que s_δ est une structure diagonale de $(s)_{i \in I}$ et on appellera l'élément $\bar{\delta}$ de $\mathcal{H}_\gamma$, dont l'existence est assurée par la proposition ci-dessus, l'isomorphisme diagonal de $(s)_{i \in I}$.

PROPOSITION. Supposons $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H}, .)$ résolutive à droite (resp. saturée). Si $(s)_{i \leq n}$ admet $((\bar{p}_i)_{i \leq n}, S)$ pour produit dans $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$, il existe une structure diagonale $s_{\mathcal{S}}$ de $(s)_{i \leq n}$.

PROPOSITION. Soient $s \in \mathcal{H}_o$ et $s' \in \mathcal{H}_o$. Supposons que $(s)_{i \in I}$ et $(s')_{i \in I}$ admettent des produits $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ et $((\bar{p}'_i)_{i \in I}, S')$ dans $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$ et des structures diagonales $s_{\mathcal{S}}$ et $s'_{\mathcal{S}}$ respectivement. On a : $s \sim_{\bar{p}} s'$ si, et seulement si, $S \sim_{\bar{p}} S'$. Soit ρ une relation d'équivalence sur $p(s)$. S'il existe $j \in \mathcal{H}(\mathbb{M}, p)$ tel que $\alpha(j) = S$, $\beta(j) = S'$ et $p(j) = \prod_{i \in I} \tilde{\rho}$, alors s' est la p -structure quotient de s par ρ [2].

DEFINITION. On dira que la catégorie d'homomorphismes $(\mathbb{M}, p, \mathcal{H}, .)$ est à produits finis si $\bar{p} = (\mathbb{M}, p, \mathcal{H})$ est un foncteur π -compatible; on munit toujours $\mathcal{H}$ du foncteur produit naturalisé $(\bar{\pi}, \bar{\pi})$ tel que $\bar{\pi}$ soit appliqué sur π par $\mathcal{G}(\bar{p})$.

Cette définition est équivalente à celle donnée dans [1], II.

PRODUITS FIBRES.

Soit C^* une catégorie et $\mathcal{G}$ une classe de classes. Soit $\mathcal{G}(\square C^*)$ la catégorie des familles de $\square C^*$. Soit $Q(C^*, \mathcal{G})$ la sous-classe de $\mathcal{G}(\square C^*)$ formée des familles $(q_i)_{i \in I}$ telles que $I \in \mathcal{G}$ et $\beta^{\square}(q_i) = \beta^{\square}(q_j)$ pour tout $i, j \in I$. Alors $Q^*(C^*, \mathcal{G})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{G}(\square C^*)$ et nous identifierons sa classe des unités à la classe des familles $(f_i)_{i \in I}$ de C telles que $\beta(f_i) = e$ pour tout $i \in I$.

Soit $\tilde{\Sigma}(\mathcal{G})$ la classe des familles $(h_i, f_i)_{i \in I}$ telles que :

$$f_i \in C, \quad h_i \in C \quad \text{et} \quad h_i \cdot f_i = h_j \cdot f_j \quad \text{pour tout } i, j \in I.$$

$Q^*(C^*, \mathcal{G})$ opère sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{G})$ relativement à la loi de composition $\tilde{\kappa}'$:

$$((q_i)_{i \in I}, (h_i, f_i)_{i \in I}) \rightarrow (h'_i, k_i \cdot f_i)_{i \in I}, \quad \text{si } q_i = (k', h'_i, h_i, k_i).$$

C^* opère sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{G})$ relativement à la loi de composition $\tilde{\kappa}'_1$:

$$(h, (h_i, f_i)_{i \in I}) \rightarrow (h_i, f_i \cdot h)_{i \in I} \quad \text{si } \alpha(f_i) = \beta(h).$$

De plus $(Q^*(C^*, \mathcal{G}), C^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{G})$ relativement à $(\tilde{\kappa}', \tilde{\kappa}'_1)$. Soit $\tilde{H}^*(C^*, \mathcal{G})$ la catégorie correspondante, dont $Q^*(C^*, \mathcal{G})$ et C^* sont des sous-catégories pleines (§ 1).

DEFINITION. Un $(\tilde{H}^*(C^*, \mathcal{G}), C)$ -éjecteur $(h_i, f_i)_{i \in I}$ est appelé un $\mathcal{G}$ -produit fibré naturalisé de $(h_i)_{i \in I}$ dans C^* . Une $(\tilde{H}^*(C^*, \mathcal{G}), C)$ -éjection de $(q_i)_{i \in I}$ est appelée un $\mathcal{G}$ -produit fibré de $(q_i)_{i \in I}$ dans C^* . Si $(h_i, f_i)_{i \in I}$ est un $\mathcal{G}$ -produit fibré naturalisé dans C^* , on dira que $(h_i, f_i)_{i \in I}$ est une $\mathcal{G}$ -somme fibrée naturalisée dans C^* .

PROPOSITION. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$, un $\mathcal{G}$ -produit fibré naturalisé $(h_i, f_i)_{i \in I}$ dans C^* tel que

$I \in \mathcal{I}'$ est un $\mathcal{I}'$ -produit fibré naturalisé dans C^* ; en particulier, c'est un $\{1\}$ -produit fibré naturalisé dans C^* .

Comme plus haut, nous supposerons que toutes les classes $\mathcal{I}$ sont des sous-classes de $\mathcal{M}_0$. Nous désignerons par $V(C^*)$ la classe des $\mathcal{M}_0$ -produits fibrés naturalisés dans C^* et un élément de $V(C^*)$ sera simplement appelé produit fibré naturalisé.

PROPOSITION. Pour que $((f_i)_{i \in I}, e)$ soit un produit naturalisé dans C^* , il faut et il suffit que $((a, \beta(f_i)), f_i)_{i \in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans la catégorie $\bar{C}^*$ obtenue en ajoutant à C^* un $\emptyset$ -produit $a \notin C$ (par la construction du § 1).

PROPOSITION. On a $(h, f) \in V(C^*)$ si, et seulement si $(h, f) \in C^* * C^*$ et $f \in C_\gamma^*$.

PROPOSITION. Supposons $q_i = (k', b'_i, h_i, k_i) \in \square C^*$ pour tout $i \in I$ et $k_i \in R_g(C^*)$. Les conditions $(b'_i, k_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^*)$ et $b_i \cdot f_i = b_j \cdot f_j$ pour tout $i, j \in I$ entraînent $(b_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^*)$; en particulier si $q_i \in (\square C^*)_\gamma$, on a $(b_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^*)$ si, et seulement si, $(b'_i, k_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^*)$.

PROPOSITION. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) k est un produit fibré de $(q_i)_{i \in I}$ dans C^* .
- 2) Il existe $(q_i, (k_i, f'_i, f_i, k))_{i \in I} \in V(\square C^*)$ et $(\beta^\square(q_i), f'_i)_{i \in I} \in V(\square C^*)$.

THEOREME. La classe $V'(C^*)$ des quatuors (b_2, b_1, f_2, f_1) tels que l'on ait $(b_i, f_i)_{i=1,2} \in V(C^*)$ est une sous-catégorie saturée de $\square C^*$.

DEFINITION. On dira que C^* est une catégorie à $\mathcal{I}$ -produits fibrés si $\tilde{H}^*(C^*, \mathcal{I})$ est une catégorie à C -éjections; une application (resp. un foncteur) $(\tilde{H}^*(C^*, \mathcal{I}), C)$ -éjection naturalisée est appelé application (resp. foncteur) $\mathcal{I}$ -produit fibré naturalisé dans C^* .

Si $\mathcal{I}$ est la classe de tous les ensembles finis d'entiers non vides, une catégorie à $\mathcal{I}$ -produits fibrés sera appelée catégorie à produits fibrés finis.

Soit C^* une catégorie à $\mathcal{I}$ -produits fibrés; un foncteur $\mathcal{I}$ -produit fibré naturalisé sera généralement désigné par (V, ν) et on posera :

$$V((q_i)_{i \in I}) = \bigvee_{i \in I} q_i \quad \text{ou} \quad V((q_i)_{i \leq n}) = q_1 \vee \dots \vee q_n.$$

Soit $b_i \in C$ et $\beta(b_i) = \beta(b_j)$ pour tout $i, j \in I$. Si on a :

$$\nu((b_i)_{i \in I}) = (b_i, \nu_i)_{i \in I},$$

on appelle ν_i la projection canonique de $\bigvee_{i \in I} b_i$ dans $\alpha(b_i)$ et on désigne souvent cette projection par $\nu_i(b_j)_{j \in I}$. Si $g_i \in C$ et $b_i \cdot g_i = b_j \cdot g_j$ pour tout $i, j \in I$, l'unique élément g de C tel que $f_i \cdot g = g_i$ sera noté $[b_i | g_i]_{i \in I}$.

Soit $(\hat{C}^*, p, C^*) = \bar{p}$ un foncteur; soit p_γ la restriction de p à C_γ^* . $\bar{p}$ s'étend

en un foncteur $\tilde{\mathcal{G}}(\bar{p})$ de $\tilde{H}^\bullet(C^\bullet, \mathcal{G})$ vers $\tilde{H}^\bullet(\hat{C}^\bullet, \mathcal{G})$ en posant :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}}(\bar{p})((q_i)_{i \in I}) &= (\square p(q_i))_{i \in I}, & \text{si } (q_i)_{i \in I} \in Q^\bullet(C^\bullet, \mathcal{G}) \\ \tilde{\mathcal{G}}(\bar{p})((h_i, f_i)_{i \in I}) &= (p(h_i), p(f_i))_{i \in I}, & \text{si } (h_i, f_i)_{i \in I} \in \tilde{\Sigma}(\mathcal{G}).\end{aligned}$$

PROPOSITION. Si $(\hat{C}^\bullet_\gamma, p_\gamma, C^\bullet_\gamma)$ est de plus un foncteur bien fidèle, les conditions $(h_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^\bullet)$, $(h_i, f'_i)_{i \in I} \in V(C^\bullet)$, $p(f_i) = p(f'_i)$ pour tout $i \in I$ et $(p(h_i), p(f_i))_{i \in I} \in V(\hat{C}^\bullet)$ entraînent $f_i = f'_i$.

DEFINITION. On dira que $\bar{p}$ est compatible avec les $\mathcal{G}$ -produits fibrés si on a : $\tilde{\mathcal{G}}(\bar{p})(V(C^\bullet)) \subset V(\hat{C}^\bullet)$. Si $\hat{\nu}$ est une application $\mathcal{G}$ -produit fibré naturalisée dans $\hat{C}^\bullet$, on dira que $\bar{p}$ est $\hat{\nu}$ -compatible s'il existe une application $\mathcal{G}$ -produit fibré naturalisé ν dans $C^\bullet$ telle que $\hat{\nu} \tilde{\mathcal{G}}(\bar{p})_0 = \tilde{\mathcal{G}}(\bar{p}) \nu$, et on dira que ν est appliquée par $\bar{p}$ sur $\hat{\nu}$.

THEOREME. Soit $\hat{\nu}$ une application $\mathcal{G}$ -produit fibré naturalisé dans $\hat{C}^\bullet$ et soit $\hat{\nu}_2$ sa restriction à la classe des $(\hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \hat{C} \times \hat{C}$ tels que $\beta(\hat{h}_1) = \beta(\hat{h}_2)$. Si $\bar{p}$ est $\hat{\nu}_2$ -compatible et si $(\hat{C}^\bullet_\gamma, p_\gamma, C^\bullet_\gamma)$ est une catégorie d'hypermorphismes saturée, $\bar{p}$ est $\hat{\nu}$ -compatible.

PROPOSITION. Soient $C^\bullet$ et $\hat{C}^\bullet$ des catégories à $\{I\}$ -produits et supposons $\bar{p}$ compatible avec les $\{I\}$ -produits. Si on a $q_i = (k', h'_i, h_i, k_i) \in \square C^\bullet$ et si k' et k_i sont des $(\hat{C}^\bullet, p)$ -injections pour tout $i \in I$, alors tout produit fibré de $(q_i)_{i \in I}$ est une $(\hat{C}^\bullet, p)$ -injection.

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie d'applications déjà considérée. Soient h_i des applications de M_i dans M , où i appartient à une classe finie I . Alors $(h_i)_{i \in I}$ admet pour produit fibré dans $\mathfrak{M}$ la sous-classe $\bigvee_{i \in I} M_i$ de $\prod_{i \in I} M_i$ ayant pour éléments les $(x_i)_{i \in I}$ tels que :

$$h_i(x_i) = h_j(x_j) \text{ pour tout } i, j \in I,$$

la projection canonique $v_i = v_i(h_i)_{i \in I}$ étant la restriction de p_i à $\bigvee_{i \in I} M_i$, où p_i est la projection canonique de $\prod_{i \in I} M_i$ sur M . Nous désignerons toujours par (V, ν) le foncteur produit fibré naturalisé tel que :

$$\nu((h_i)_{i \in I}) = (h_i, v_i)_{i \in I}.$$

DEFINITION. Soit $(\mathfrak{M}, p, C^\bullet)$ un foncteur et soit $h_i \in C$, $\beta(h_i) = \beta(h_j)$ pour tout $i, j \in I$. On dira que $(h_i, f_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $(\mathfrak{M}, p, C^\bullet)$ si $(h_i, f_i)_{i \in I} \in V(C^\bullet)$ et si $p(f_i) = v_i(p(h_i))_{i \in I}$. On dira qu'une catégorie d'homomorphismes $(\mathfrak{M}, p, C^\bullet, C^\bullet_\gamma)$ est à produits fibrés finis si $(\mathfrak{M}, p, C^\bullet)$ est ν -compatible.

THEOREME. Supposons que $\bar{p} = (\hat{C}^\bullet, p, C^\bullet)$ soit un foncteur fidèle et soit $h_i \in C$ tel que $\beta(h_i) = \beta(h_j)$ pour tout $i, j \in I$. Supposons qu'il existe un produit naturalisé

$((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(\alpha(b_i))_{i \in I}$ dans $C^\bullet$ tel que l'on ait $(p(p_i)_{i \in I}, p(S)) \in P(\hat{C}^\bullet)$ et qu'il existe $(p(b_i), \hat{v}_i)_{i \in I} \in V(\hat{C}^\bullet)$. Pour qu'il existe $(b_i, v_i)_{i \in I} \in V(C^\bullet)$ tel que $p(v_i) = \hat{v}_i$, il faut et il suffit qu'il existe une $(\hat{C}, p)$ -injection k telle que $\alpha(k) = S$ et $p(p_i) \cdot p(k) = \hat{v}_i$; dans ce cas, on a $(b_i, p_i \cdot k)_{i \in I} \in V(C^\bullet)$.

COROLLAIRE 1. Si $(\mathcal{M}, p, C^\bullet, C_\gamma^\bullet)$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite et à produits finis, c'est une catégorie d'homomorphismes à produits fibrés finis.

COROLLAIRE 2. $(\mathcal{M}, p\mathcal{H}, \mathcal{N}, \cdot)$, $(\mathcal{M}, p\mathcal{H}', \mathcal{N}', \cdot)$ et $(\mathcal{M}, p\mathcal{F}, \mathcal{F}, \cdot)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits fibrés finis.

PROPOSITION. Soit $(C_j)_{j \in J}$ une famille de catégories. Si $(h_i^j, f_i^j)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans C_j , pour tout $j \in J$, on a :

$$H = ((h_i^j)_{j \in J}, (f_i^j)_{j \in J})_{i \in I} \in V(\prod_{j \in J} C_j).$$

De plus les projections canoniques $\bar{p}_j = (C_j, p_j, \prod_{j \in J} C_j)$ sont compatibles avec les produits fibrés.

COROLLAIRE. Si C_j est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits fibrés pour tout $j \in J$, alors $\prod_{j \in J} C_j$ est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits fibrés.

COROLLAIRE. Soit C_j une catégorie, où $j \in J$. Si on a $((f_i^j)_{i \in I}, e^j) \in P(C_j)$ pour tout $j \in J$, on a $F = (((f_i^j)_{j \in J})_{i \in I}, (e^j)_{j \in J}) \in P(\prod_{j \in J} C_j)$. Si C_j est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits, $\prod_{j \in J} C_j$ est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits et $\bar{p}_j$ est un foncteur compatible avec les $\mathcal{G}$ -produits.

THEOREME. Soit $(q_j)_{j \in J} \in Q(\mathcal{F}, \{J\})$, où $q_j = (\Phi', \hat{H}_j, H_j, \bar{\Phi}_j)$ et $\bar{\Phi}_j = (\hat{K}_j, \Phi_j, K_j)$. Soit $\bar{\Phi} = \bigvee_{j \in J} q_j$. Soit H_j^s la restriction de H_j à la sous-catégorie $K_j^s = K_j(K_j, \Phi_j)_\perp$. Les conditions :

$$(f_j)_{j \in J} \in \bigvee_{j \in J} H_j^s \quad \text{et} \quad H_j(f_j) \in R_d(\alpha(\Phi'))$$

entraînent $(f_j)_{j \in J} \in (\bigvee_{j \in J} H_j)(\bigvee_{j \in J} \hat{H}_j, \bar{\Phi})_\perp$. De même si H_j^i est la restriction de H_j à $K_j(\hat{K}_j, \Phi_j)_\perp$, les conditions $(f'_j)_{j \in J} \in \bigvee_{j \in J} H_j^i$ et $H_j(f'_j) \in R_g(\alpha(\Phi'))$ entraînent que $(f'_j)_{j \in J}$ est une $(\bigvee_{j \in J} \hat{H}_j, \bar{\Phi})$ -injection.

COROLLAIRE. Soit $\bar{H}_j = (C^\bullet, H_j, K_j)$ un foncteur, pour tout $j \in J$. Soit $(\bar{H}_j, \bar{v}_j)_{j \in J} \in V(\mathcal{F})$. Si f_j est une $(C^\bullet, H_j)$ -surjection (resp. injection) et si $H_j(f_j) = f \in R_d(C^\bullet)$ (resp. $\in R_g(C^\bullet)$) pour tout $j \in J$, alors $\bar{f} = (f_j)_{j \in J}$ est une (K_j, v_j) -surjection (resp. injection) et $\bar{f}$ est une $(C^\bullet, H_j, v_j)$ -surjection (resp. injection).

REMARQUE. Avec les notations précédentes, une (C^*, H_j, v_j) surjection peut ne pas être de la forme $(f_j)_{j \in J}$, où f_j est une (C^*, H_j) -surjection pour tout $j \in J$.

THEOREME. Soit $\bar{H}_j = (K^*, H_j, K_j^*)$ un foncteur et soit C_j^* une sous-catégorie pleine de K_j^* pour tout $j \in J$. Si f_j est un (C_j^*, K_j^*) -projecteur et si $H_j(f_j) = f \in R_d(K^*)$ pour tout $j \in J$, alors $\bar{f} = (f_j)_{j \in J}$ est un $(\bigvee_{j \in J} H_j^*, \bigvee_{j \in J} \bar{H}_j)$ -projecteur. Si f_j' est un (K_j^*, C_j^*) -éjecteur et si $H_j(f_j') = f \in R_g(K^*)$ pour tout $j \in J$, $(f_j')_{j \in J}$ est un $(\bigvee_{j \in J} \bar{H}_j, \bigvee_{j \in J} H_j')$ -éjecteur. On désigne par H_j' la restriction de H_j à C_j^* .

COROLLAIRE 1. Soit $\bar{H}_j = (C^*, H_j, C_j^*) \in \mathcal{F}$, pour tout $j \in J$. Si on a $((p_i^j)_{i \in I}, e^j) \in P(C_j^*)$, si $H_j(p_i^j) = p_i$ et si $p_i \cdot g = p_i \cdot g'$ pour tout $i \in I$ entraîne $g = g'$, alors on a :

$$(((p_i^j)_{j \in J})_{i \in I}, (e^j)_{j \in J}) \in P(\bigvee_{j \in J} \bar{H}_j).$$

COROLLAIRE 2. Soit $\bar{H}_j = (C^*, H_j, C_j^*) \in \mathcal{F}$, $\bar{C}^* = \bigvee_{j \in J} \bar{H}_j$, $\bar{h}_i = (h_i^j)_{j \in J} \in \bar{C}^*$, $\bar{f}_i = (f_i^j)_{j \in J} \in \bar{C}^*$ et $\sigma_j = (h_i^j, f_i^j)_{i \in I} \in V(C_j^*)$ pour tout $j \in J$. Si les conditions $H_j(f_i^j) \cdot g = H_j(f_i^j) \cdot g'$ pour tout $i \in I$ entraînent $g = g'$, alors on a : $w = (\bar{h}_i, \bar{f}_i)_{i \in I} \in V(\bar{C}^*)$.

COROLLAIRE 3. Soient $\bar{H}_j = (C^*, H_j, C_j^*)$ des foncteurs π -compatibles, où π est une application $\mathcal{G}$ -produit (resp. $\mathcal{G}$ -produit fibré) naturalisé dans C^* . Si on a $(\bar{H}_j, \bar{v}_j)_{j \in J} \in V(\mathcal{F})$, le foncteur $\bar{H}_j \cdot \bar{v}_j$ est π -compatible.

THEOREME. La catégorie $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ des applications covariantes entre espèces de structures (C^*, S_o, κ') telles que $C \in \mathcal{M}_o$ et $S \in \mathcal{M}_o$, est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits fibrés, si $\mathcal{M}$ est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits.

Soit $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$ la catégorie des homomorphismes entre catégories d'homomorphismes, dont les éléments sont les quadruplets (Π_1, F_1, F, Π) tels que $\Pi = (\hat{C}^*, H, C^*, S)$ et $\Pi_1 = (\hat{C}_1^*, H_1, C_1^*, S_1)$ soient des catégories d'homomorphismes et que l'on ait :

$$((\hat{C}_1^*, H_1, C_1^*), F_1, F, (\hat{C}^*, H, C^*)) \in \square \mathcal{F},$$

la loi de composition étant définie par :

$$(\Pi_3, F_3, F_2, \Pi_2) \cdot (\Pi_1, F_1, F, \Pi) = (\Pi_3, F_3 \cdot F_1, F_2 \cdot F, \Pi)$$

$$\text{si, et seulement si, } \Pi_2 = \Pi_1.$$

$\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$ ayant pour objets les Π tels que $C = S$.

THEOREME. Si $\mathcal{M}$ est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits, $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$ est une catégorie à $\mathcal{G}$ -produits fibrés, de même que la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$ ayant pour objets les catégories d'homomorphismes saturées.

4. Extensions de foncteurs et élargissements.

DEFINITION. Soit $\bar{p} = (K^*, p, H^*)$ un foncteur. On dira qu'une sous-classe F de K est $\bar{p}$ -admissible si elle vérifie les conditions suivantes :

1) $\alpha(F) = p(H_o^*) \subset F$ et $F.p(H_\gamma^*) \subset F$.

2) Si $f \in F$, la condition $f.g_1 = f.g_2$, où $g_i \in p(H)$, entraîne $g_1 = g_2$.

La condition 1 entraîne $p(H_\gamma^*) \subset F$.

Soit $\mathcal{F}_o$ (resp. $\mathcal{F}$) la classe des couples $(F, \bar{p})$, où $\bar{p} = (K^*, p, H^*) \in \mathcal{F}$, tels que F soit $\bar{p}$ -admissible et que $(K^*, p_\gamma, H_\gamma^*)$ soit un foncteur fidèle (resp. bien fidèle, c'est-à-dire tel que deux éléments de H_γ^* ayant même source et même image par p_γ sont égaux), p_γ étant la restriction de p à H_γ^* . Soit $\mathcal{F}'_o$ la classe des triplets $(F, C, \bar{q})$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\bar{q} = (K^*, q, H^*) \in \mathcal{F}$ et $(K^*, q_\gamma, H_\gamma^*)$ est un foncteur bien fidèle.

2) C^* est une sous-catégorie pleine de H^* , et H^* est une catégorie à C -éjections; on a $q(E(H^*, C)) \subset F$, en désignant par $E(H^*, C)$ la classe des (H^*, C) -éjecteurs.

3) F est une classe (K^*, q, C^*) -admissible.

THEOREME. Soit $(F, \bar{p}) \in \mathcal{F}_o$ et $\bar{p} = (K^*, p, H^*)$. Il existe $X(F, \bar{p}) \in \mathcal{F}'_o$ et $\bar{\sigma} \in \mathcal{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $X(F, \bar{p}) = (F, \bar{H}, (K^*, \tilde{p}, \tilde{H}^*))$ et $\bar{\sigma} = (\bar{H}^*, \sigma, H^*)$ est une $p\tilde{q}$ -surjection.

2) Soit $\bar{F} = E(\bar{H}^*, \bar{H})$ et $s \in \tilde{H}_o^*$; la restriction de $\tilde{p}$ à $\bar{F}.s$ est une bijection sur $F.p(s)$.

3) Si $(F, \bar{p}) \in \mathcal{F}_o$, $\bar{\sigma}$ est une équivalence.

Soit $\square(F, \bar{p})$ la catégorie des quadruplets (k, f', f, b) tels que :

$$(k, f', f, p(b)) \in \square K^*, \quad f' \in F, f \in F, b \in H,$$

la loi de composition étant définie par :

$$(k_1, f'_1, f_1, b_1) \square (k, f', f, b) = (k_1.k, f'_1.f, b_1.b)$$

$$\text{si, et seulement si, } f_1 = f' \text{ et } \alpha(b_1) = \beta(b).$$

La catégorie $\square(H^*; H_\gamma^*, H)$ opère à droite sur $\square(F, \bar{p})$ relativement à la loi de composition :

$$(k, f', f, b)(h, g', g, b_1) = (k, f'.p(g'), f.p(g), b_1).$$

$\tilde{H}^*$ est la catégorie quotient de $\square(F, \bar{p})$ par la relation d'équivalence ρ dont les classes d'équivalence sont les classes d'intransitivité de l'espèce de structures correspondante; $\tilde{p}$ est l'application :

$$(k, f', f, h) \bmod \rho \rightarrow k$$

et $\bar{\sigma}$ est le foncteur défini par :

$$h \rightarrow (h, \beta(h), \alpha(h), h) \bmod \rho.$$

DEFINITION. Soit $(F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0$; $X(F, \bar{p})$ sera appelé l'extension canonique de $(F, \bar{p})$; le foncteur $\bar{\sigma}^{-1}$ sera appelé l'équivalence canonique associée de $\bar{H}^*$ sur H^* .

Soit $\mathcal{S}$ la catégorie dont les éléments sont de la forme $(\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ où :

$$\hat{p}_i = (F_i, \bar{p}_i) \in \mathcal{S}_0, \quad i = 1, 2, \quad U = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi, \bar{p}_1) \in \square \mathcal{F}, \quad \Phi'(F_1) \subset F_2,$$

la loi de composition étant définie par :

$$(\hat{p}'_2, \hat{p}'_1, U') \cdot (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) = (\hat{p}'_2, \hat{p}_1, U' \square U)$$

si, et seulement si, $\hat{p}'_1 = \hat{p}_2$.

La classe des unités de $\mathcal{S}$ est identifiée à la classe $\mathcal{S}_0$.

Soit $\mathcal{S}'$ la catégorie dont les éléments sont de la forme $(\check{q}_2, \check{q}_1, U)$ où :

$$\check{q}_i = (F_i, C_i, \bar{q}_i) \in \mathcal{S}'_0, \quad U = (\bar{q}_2, \Phi', \Phi, \bar{q}_1) \in \square \mathcal{F}, \quad \Phi'(F_1) \subset F_2$$

et Φ est un foncteur (C_2, C_1) -compatible avec les éjections,

la loi de composition étant définie par :

$$(\check{q}'_2, \check{q}'_1, U') \cdot (\check{q}_2, \check{q}_1, U) = (\check{q}'_2, \check{q}_1, U' \square U)$$

si, et seulement si, $\check{q}'_1 = \check{q}_2$.

La classe des unités de $\mathcal{S}'$ est identifiée à $\mathcal{S}'_0$ et l'élément $(\check{q}_2, \check{q}_1, U)$ sera aussi désigné par le symbole $(\check{q}_2, \Phi', \Phi, \check{q}_1)$.

Soit $\mathcal{S}''$ la classe dont les éléments sont de la forme $(\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)$, où :

$$\hat{p} = (F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0, \quad \check{q}_1 = (F_1, C_1, \bar{q}_1) \in \mathcal{S}'_0, \quad \Psi'(F_1) \subset F$$

et $(\bar{p}, \Psi', \Psi, \bar{q}'_1) \in \square \mathcal{F}$, $\bar{q}'_1$ désignant la restriction de $\bar{q}_1$ à C_1 .

$\mathcal{S}$ opère sur $\mathcal{S}''$ relativement à la loi de composition κ' :

$$((\hat{p}', \hat{p}, (\bar{p}', \Phi', \Phi, \bar{p})), (\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)) \rightarrow ((\hat{p}', \Phi', \Psi', \Phi, \Psi, \check{q}_1))$$

et la catégorie duale $\mathcal{S}'^*$ de $\mathcal{S}'$ opère sur $\mathcal{S}''$ relativement à la loi de composition $\bar{\kappa}'$:

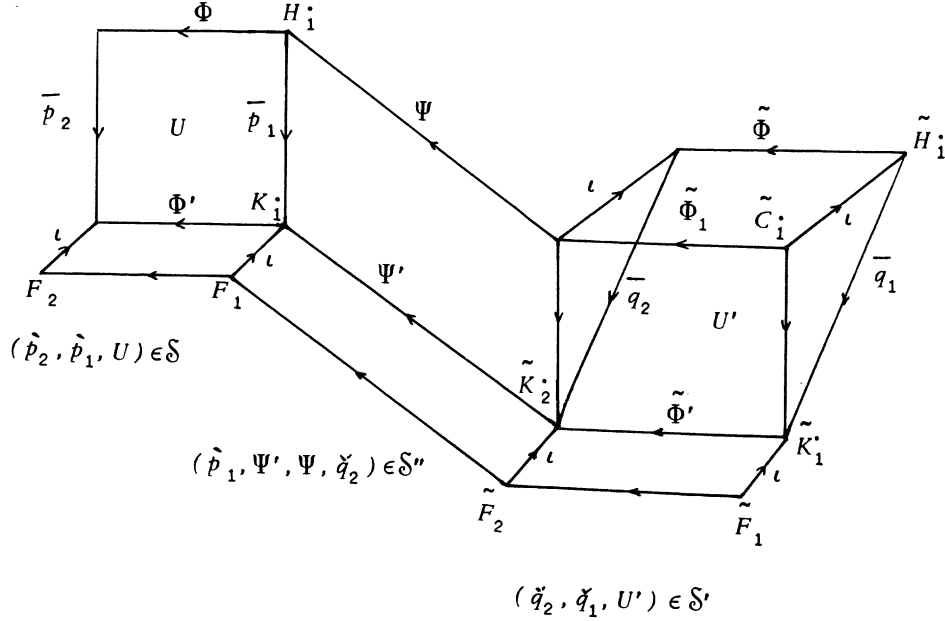
$$((\check{q}_2, \Phi', \Phi, \check{q}_1), (\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_2)) \rightarrow (\hat{p}, \Psi', \Phi', \Psi, \Phi_1, \check{q}_1)$$

$$\text{où } \Phi_1 \text{ est la restriction de } \Phi \text{ à } C_1 \text{ et } \check{q}_1 = (F_1, C_1, \bar{q}_1).$$

$(\mathcal{S}, \mathcal{S}'^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\mathcal{S}''$ relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$. Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{S}}$ la catégorie correspondante (voir § 1) dont $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des sous-catégories pleines; l'élément $(\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)$ de $\mathcal{S}''$ est un morphisme de $\tilde{\mathcal{S}}$, de

source $\check{q}_1$, de but $\hat{p}$.

THEOREME. $\tilde{\mathcal{S}}$ est une catégorie à $\mathcal{S}'$ -éjections et il existe un foncteur $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$ -éjection naturalisé (X, ξ) tel que, pour tout $\hat{p} \in \mathcal{S}_0$, on ait $\xi(\hat{p}) = (\hat{p}, K^*, \bar{\gamma}, X(\hat{p}))$, où $X(\hat{p})$ est l'extension canonique de $\hat{p}$ et $\bar{\gamma}$ l'équivalence canonique associée.



DEFINITION. Un $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$ -éjecteur sera appelé *extenseur*. Une $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$ -éjection de $m \in \mathcal{S}$ sera appelée *extension* de m , ou *extension* de U à (F_2, F_1) , si $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ et $\hat{p}_i = (F_i, \bar{p}_i)$.

Si $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \mathcal{S}$ et $U = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi, \bar{p}_1)$, l'extension canonique $X(m)$ de m est l'élément $(X(\hat{p}_2), \Phi', \tilde{\Phi}, X(\hat{p}_1))$, où $\tilde{\Phi}$ est le foncteur défini par l'application :

$$(k, f', f, h) \bmod \rho_1 \rightarrow (\Phi'(k), \Phi'(f'), \Phi'(f), \Phi(h)) \bmod \rho_2.$$

PROPOSITION. Pour que $\check{q} = (F, H, (K^*, q, K_1^*)) \in \mathcal{S}'$ soit une extension de $\hat{p} = (F, (K^*, q, H^*))$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) Pour tout $s \in H_0^*$, la restriction de q à $F_1 \cdot s$, où $F_1 = E(K_1^*, H)$, est une bijection sur $F \cdot q(s)$.

2) Si $T = (f'_1, f_1, h) \in \square(F_1, K_1^*)$ et si $Q = (k, \square q(T)) \in \square(K^*; F, K)$, il existe un et un seul $k_1 \in K_1$ tel que $q(k_1) = k$ et $(k_1, T) \in \square K_1^*$.

COROLLAIRE 1 (transitivité verticale). Soit $\hat{p} = (F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0$, $\bar{p} = (K^*, p, H^*)$, $(\hat{p}, K^*, \bar{\gamma}, (F, C, \bar{q}))$ un extenseur et $\bar{F} = E(\alpha(\bar{q}), C)$. Soit $\bar{p}' = (H^*, p', L^*) \in \mathcal{F}$ tel que $H^*_0 = p'(L^*_0)$ et que $\bar{p}'_{\gamma}$ soit bien fidèle. Si $(\bar{F}, \bar{L}, \bar{q}')$ est une extension de $(\bar{F}, \bar{\mu}, \bar{p}')$, alors $(\bar{F}, \bar{L}, \bar{q}, \bar{q}')$ est une extension de $(F, \bar{p}, \bar{p}')$ où $\bar{\mu} = (\alpha(\bar{q}), \iota, C^*) \cdot \bar{\gamma}^{-1}$.

COROLLAIRE 2. Soient $m = ((F, \bar{p}), K^*, \bar{\gamma}, (F, C, \bar{q}))$ et $m_1 = ((F_1, \bar{q}), K^*, \bar{\gamma}_1, (F_1, C_1, \bar{q}_1))$ deux extenseurs. Pour que $(F'', \bar{\gamma}_1^{-1}(C), \bar{q}_1)$ soit une extension de $(F'', \bar{p})$, il faut que $F \cap F_1 \subset K^*_{\gamma}$ et $F'' = F_1 \cdot F$.

PROPOSITION. Soit $(F, \bar{L}, \bar{q})$ une extension de $(F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0$. Si $\bar{p}$ est un foncteur fidèle, $\bar{q}$ est fidèle. Lorsque $\bar{p}$ est bien fidèle, $\bar{q}$ est bien fidèle si, et seulement si, les conditions $f_i \in F$, $b_i \in H$, $\alpha(b_1) = \alpha(b_2)$ et $f_1 \cdot \bar{p}(b_1) = f_2 \cdot \bar{p}(b_2)$ assurent l'existence d'un $g \in H^*_{\gamma}$ tel que $\alpha(g) = \beta(b_2)$ et $f_1 = f_2 \cdot \bar{p}(g)$.

PROPOSITION. Soit $(F, C, \bar{q})$ une extension de $(F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0$, où $\bar{p} = (K^*, p, H^*)$, et supposons que les conditions $f_i \in F$ et $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ entraînent qu'il existe $g \in F$ tel que $F \cdot g \subset F$ et $f_2 = f_1 \cdot g$ (resp. $\bar{g} \in H^*_{\gamma}$ tel que $f_2 = f_1 \cdot p(\bar{g})$). Alors $\bar{q}_{\gamma}$ est une catégorie d'hypermorphismes (resp. $\bar{q}$ est une catégorie d'hypermorphismes si $\bar{p}$ en est une).

THEOREME. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie d'applications à $\mathcal{I}$ -produits; $\tilde{\mathcal{S}}$ est une catégorie à $\mathcal{I}$ -produits et $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des catégories à $\mathcal{I}$ -produits fibrés. Soit $\tilde{m}_i$ une extension de $m_i \in \mathcal{S}$ pour tout $i \in I$; alors $\prod_{i \in I} \tilde{m}_i$ est une extension de $\prod_{i \in I} m_i$ et, si $\beta(m_i) = \beta(m_j)$ pour tout $i, j \in I$, $\bigvee_{i \in I} \tilde{m}_i$ est une extension de $\bigvee_{i \in I} m_i$, où $I \in \mathcal{I}$.

DEFINITION. Soit C^* une sous-catégorie d'une catégorie K^* . On dira que K^* est un élargissement de C^* si C^* est pleine dans K^* et si K^*_{γ} est une catégorie à C^*_{γ} -éjections.

Cette définition est équivalente à celle donnée dans [5].

PROPOSITION. Pour que K^* soit un élargissement de C^* , il faut et il suffit que K^* soit une catégorie à C^* -éjections et que tout (K^*, C) -éjecteur soit inversible dans K^* .

Soit $\hat{\mathcal{S}}$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{S}}$ ayant pour objets les $\hat{p} = (F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0$ tels que $F \subset \beta(\bar{p})_{\gamma}$ et les éléments $(F, C, \bar{q}) \in \mathcal{S}'_0$, où $\bar{q} = (K^*, q, H^*)$, tels que $F \subset K^*_{\gamma}$ et que H^* soit un élargissement de C^* . Soit $\hat{\mathcal{S}}' = \mathcal{S}' \cap \hat{\mathcal{S}}$.

THEOREME. $\hat{\mathcal{S}}$ est une catégorie à $\hat{\mathcal{S}}'$ -éjections, admettant $(\hat{X}, \hat{\xi})$ pour foncteur $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$ -éjection naturalisé, où $\hat{X}$ et $\hat{\xi}$ sont des restrictions de X et ξ .

COROLLAIRE. Soit $(F, C, \bar{q})$ une extension de $(F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_0$ et $((F_1, \bar{q}), K^*, \bar{\gamma}_1, (F_1, C_1, \bar{q}_1))$

un extenseur tel que $F \subset F_1$. Pour que $(F'', \bar{\gamma}^{-1}(C), \bar{q}_1)$ soit une extension de $(F'', \bar{p})$, il faut et il suffit que $F \subset K_\gamma$; on a alors $F'' = F_1 \cdot F$.

DEFINITION. Soit $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \hat{\mathcal{S}}$, où $\hat{p}_i = (F_i, \bar{p}_i)$. On dira que $U' = (\bar{q}_2, \Phi', \Phi, \bar{q}_1)$ est un élargissement de m si $\bar{p}_i$ est une restriction de $\bar{q}_i$, $i = 1, 2$ et si $(\check{q}_2, \check{q}_1, U')$ est une $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$ -éjection de m .

$\bar{q} \in \mathcal{F}$ est un élargissement de $\hat{p} = (F, \bar{p}) \in \hat{\mathcal{S}}_0$ si, et seulement si, $(\hat{p}, K^*, H^*, (F, H, \bar{q}))$ est un extenseur. $(\bar{q}_2, \Phi', \Phi, \bar{q}_1) \in \square \mathcal{F}$ est un élargissement de $(\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ si, et seulement si, $\bar{q}_i$ est un élargissement de $\hat{p}_i$ et si $U = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi_1, \bar{p}_1)$, où Φ_1 est une restriction de Φ .

PROPOSITION. Il existe un foncteur $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$ -éjection naturalisé (X', ξ') tel que, pour tout $m \in \hat{\mathcal{S}}_0$, on ait $X'(m) = (\check{q}_2, \check{q}_1, U)$, où U est un élargissement de m .

PROPOSITION. Soit $(F, H, \bar{q}) \in \hat{\mathcal{S}}_0$, $\bar{q} = (K^*, q, K_1^*)$ et $F_1 = E(K_1^*, H)$. Pour que $\bar{q}$ soit un élargissement de $(F, (K^*, q, H^*))$, il faut et il suffit que $\bar{q}$ définisse une bijection de $F_1 \cdot s$ sur $F \cdot q(s)$, pour tout $s \in (K_1^*)_0$.

Soit $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}''$) la sous-classe de $\mathcal{F}$ formée des foncteurs $\bar{p}$ tels que $\bar{p}_\gamma$ soit bien fidèle (resp. définisse une catégorie d'hypermorphismes). $\mathcal{F}'$ est identifié à la classe des unités de $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$.

THEOREME. Dans $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}''$) la relation :

$\bar{p} \leq \bar{q}$ si, et seulement si, il existe une classe $\bar{p}$ -admissible F telle que $\bar{q}$ soit un élargissement de $(F, \bar{p})$,

est une relation transitive (resp. de préordre). La classe des $\bar{q} \in \mathcal{F}''$ tels que $\bar{p} \leq \bar{q}$, où $\bar{p} \in \mathcal{F}'$, admet un élément minimal et un élément maximal dans $(\mathcal{F}'', \leq)$.

COROLLAIRE. Dans $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ (resp. $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'')$) la relation :

$U \leq \hat{U}$ si, et seulement si, il existe $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \hat{\mathcal{S}}$ tel que $\hat{U}$ soit un élargissement de m ,

est une relation transitive (resp. de préordre). Pour tout $U \in \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ la classe des $\hat{U} \in \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ tels que $U \leq \hat{U}$ admet un élément minimal et un élément maximal dans $(\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}''), \leq)$.

DEFINITION. Soit $U \in \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$; si $U \leq \hat{U}$, on appelle $\hat{U}$ un élargissement de U ; si $\hat{U}'$ est un élément minimal (resp. maximal) pour la relation $\leq$ dans la classe des $\hat{U}$ tels que $U \leq \hat{U}$, on appelle $\hat{U}'$ un élargissement minimal (resp. maximal) de U .

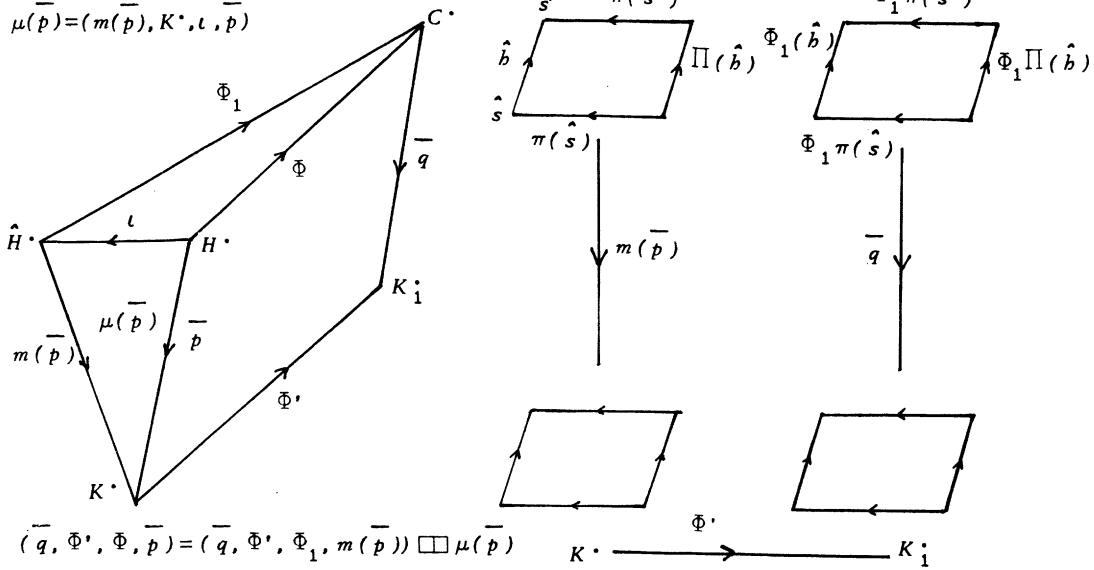
Soit $\mathcal{F}_s''$ la sous-classe de $\mathcal{F}''$ formée des $\bar{p} \in \mathcal{F}''$ tels que $\bar{p}_\gamma$ soit une catégorie d'hypermorphismes saturée.

THEOREME. $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est une catégorie à $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ -projections et à $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}_s'')$ -projections, un élargissement minimal de U étant une $(\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}''), \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'))$ -projection de U et un élargissement maximal de U étant une $(\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}_s''), \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'))$ -projection de U .

$$\bar{p} \in \bar{\mathcal{F}}, \bar{q} \in \bar{\mathcal{F}}''$$

$m(\bar{p}) = \text{élargissement minimal de } \bar{p}$

$$\mu(\bar{p}) = (m(\bar{p}), K^*, \iota, \bar{p})$$



DEFINITION. Soit $\Pi = (K^*, p, H^*, C)$ une catégorie d'homomorphismes. On dira qu'une catégorie d'homomorphismes $\hat{\Pi} = (K^*, \hat{p}, \hat{H}^*, \hat{C})$ est un élargissement (resp. élargissement maximal) de Π si $(K^*, \hat{p}, \hat{H}^*)$ et $(K^*, \hat{p}, \hat{C})$ sont des élargissements (resp. maximaux) de (K^*, p, H^*) et (K^*, p, C) .

PROPOSITION. Soient $\Pi = (K^*, p, H^*, C)$ et $\hat{\Pi} = (K^*, \hat{p}, \hat{H}^*, \hat{C})$ deux catégories d'homomorphismes, et $H_\gamma^* \subset C$. Alors $\hat{\Pi}$ est un élargissement (resp. élargissement maximal) de Π si, et seulement si, $\hat{H}^*$ est un élargissement de H^* et $\hat{C}^*$ un élargissement de C^* (resp. tel que $\hat{\Pi}$ soit de plus saturée).

Cette proposition montre que $\hat{\Pi}$ est un élargissement de Π si, et seulement si, $\hat{\Pi}$ est un élargissement de H^* au-dessus de K^* , au sens de [5].

PROPOSITION. Soit $\Pi = (K^*, p, H^*, C)$ une catégorie d'homomorphismes. Si $C = H_\gamma^*$ (resp. si $p(C_\gamma^*)$ est un sous-groupe plein de K_γ^*), alors Π admet un élargissement maximal.

REMARQUE. La condition plus faible indiquée dans le corollaire 2, p. 37 [5] n'est pas suffisante pour que Π admette un élargissement $\hat{\Pi}$.

5. Espaces de structures.

Nous aurons à utiliser la notion suivante :

DEFINITION. On dira que $(\mathbb{M}, p, C^\bullet, .)$ est une catégorie d'homomorphismes avec atomes si $(\mathbb{M}, p, C^\bullet, .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée, à produits finis, si $C^\bullet$ admet un $\emptyset$ -produit $\bar{a}$ tel que $p(\bar{a})$ soit l'ensemble ayant un seul élément a et si, pour tout $s \in C_0^\bullet$ tel que $a \in p(s)$, il existe $h \in C$ vérifiant $\alpha(h) = \bar{a}$ et $\beta(h) = s$; on appelle $\bar{a}$ un atome de $(\mathbb{M}, p, C^\bullet, .)$.

Cette définition entraîne que h est une $(\mathbb{M}, p)$ -injection.

PROPOSITION. Soit $(\mathbb{M}, p, C^\bullet, .)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis. Si $s_i \in C_0^\bullet$, où $i = 1, 2$ et si $C^\bullet$ admet un $\emptyset$ -produit $\bar{a}$ tel que $p(\bar{a}) = \{a\}$, où $a \in p(s_1)$, il existe $h \in C_\gamma^\bullet$ tel que $\alpha(h) = s_2$ et $\beta(h) = \bar{a} \times s_2$.

COROLLAIRE. Si $(\mathbb{M}, p, C^\bullet, .)$ est une catégorie d'homomorphismes avec atomes et si $s_i \in C_0^\bullet$, où $i = 1, 2$, il existe $h \in C_\gamma^\bullet$ tel que :

$$\alpha(h) = s_2, \quad \beta(h) = \bar{p} s_1 \times s_2 \quad \text{et} \quad p(\beta(h)) = \{x_1\} \times p(s_2),$$

pour tout $x_1 \in p(s_1)$.

Soit $(\mathbb{M}, q, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes. Soit $\eta = (C^\bullet, S, \kappa')$ une espèce de structures et soit π' l'application $z \rightarrow e$ de S dans $C_0^\bullet$ telle que $(e, z) \in C^\bullet * S$. Si $((C^\bullet, s), \pi', (S, \sigma))$ est une $\mathcal{H}$ -espèce de structures [4c] nous désignerons aussi cette $\mathcal{H}$ -espèce de structures par le symbole $((C^\bullet, s), (S, \sigma), \kappa')$.

DEFINITION. On appelle $\mathcal{H}$ -espace de structures une $\mathcal{H}$ -espèce de structures $\bar{\eta} = ((C^\bullet, s), (S, \sigma), \kappa')$ vérifiant la condition suivante : il existe une espèce de structures (η, H) dominée dans $(q, \mathcal{H})$ telle que, pour tout $e \in C_0^\bullet$, on ait $H(e) \bar{q} \sigma$. On appelle alors (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}$.

THEOREME. Si $(\mathbb{M}, q, \mathcal{H}, .)$ est une catégorie d'homomorphismes avec atomes toute $\mathcal{H}$ -espèce de structures est un $\mathcal{H}$ -espace de structures.

Si $(\mathbb{M}, q, \mathcal{H}, .)$ n'est pas une catégorie d'homomorphismes avec atomes, une $\mathcal{H}$ -espèce de structures peut ne pas être un $\mathcal{H}$ -espace de structures. Ainsi pour qu'une $\mathcal{F}$ -espèce de structures $((C^\bullet, C^\perp), S^\perp, \kappa')$ soit un $\mathcal{F}$ -espace de structures, où $C_0^\bullet = \pi'(S)$, il faut et il suffit que l'on ait $C_0^\bullet \subset C_0^\perp$ et que, si $f' \perp f$ est défini dans $C^\perp$, on ait $fz = f'z$ pour tout $z \in \pi_1^{-1}(\alpha(f))$. En particulier ces conditions sont vérifiées si $((C^\bullet, C^\perp), S^\perp, \kappa')$ est la $\mathcal{F}$ -espèce de structures associée à une espèce de morphismes (c'est-à-dire si $\perp$ est la loi de composition triviale sur C [4c]).

Si $(\bar{\eta}_2, (\Phi, \varphi_0), \bar{\eta}_1)$ est une application $\mathcal{H}$ -covariante [4c] et si $\bar{\eta}_2$ et $\bar{\eta}_1$

sont des $\mathcal{H}$ -espaces de structures, alors (Φ, φ_o) définit aussi une application covariante entre les espèces de structures dominées sous $\bar{\eta}_1$ et sous $\bar{\eta}_2$ respectivement.

Soit $\bar{\mathcal{Q}}(\mathcal{H})$ la sous-catégorie pleine de $\bar{\mathcal{Q}}(\mathcal{H})$ formée des applications $\mathcal{H}$ -covariantes entre $\mathcal{H}$ -espaces de structures. Nous désignerons par $p_1^{\mathcal{H}}$ et $p_2^{\mathcal{H}}$ les projections :

$$\begin{aligned} & (\bar{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \bar{\eta}_1) \rightarrow ((C_2^*, s_2), \Phi, (C_1^*, s_1)) \\ \text{et} \quad & (\bar{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \bar{\eta}_1) \rightarrow (\sigma_2, \varphi_o, \sigma_1) \end{aligned}$$

de $\bar{\mathcal{Q}}(\mathcal{H})$ vers la catégorie $\bar{\mathcal{H}}$ des foncteurs $\mathcal{H}$ -structurés et vers la catégorie $\mathcal{H}$ respectivement. Soit $(\mathcal{H}, \bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ le foncteur canonique de $\bar{\mathcal{H}}$ vers $\mathcal{H}$.

DEFINITION. On appelle $\mathcal{H}$ -espace de morphismes un couple $(\bar{\eta}, G)$, où $\bar{\eta}$ est un $\mathcal{H}$ -espace de structures $((C^*, s), (S, \sigma), \kappa')$ et où $((C^*, S, \kappa'), G)$ est une espèce de morphismes, vérifiant la condition suivante : soit (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}$; alors $(G(e), H(e))$ est une catégorie $\mathcal{H}$ -structurée, pour tout $e \in \pi'(S)$.

Soit $(\bar{\eta}, G)$ un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes. Soit $\bar{G}$ l'application définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \bar{G}(e) = (G(e), H(e)) \quad \text{si } e \in \pi'(S) \\ \text{et} \quad & \bar{G}(f) = (\bar{G}(e'), \tilde{f}, \bar{G}(e)) \quad \text{si } f \in C_1^*, \alpha(f) = e \text{ et } \beta(f') = e', \end{aligned}$$

où C_1 est la sous-catégorie de C^* opérant sur S^* . Le couple $(C^*, \bar{G})$ est un couple dominant dans $(q\bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ une espèce de structures. Supposons $C_1 = C$ et désignons par $\tilde{S}^*$ la catégorie produit croisé $S^* \times_{\kappa'} C^*$ (voir [4d]).

THEOREME. Si $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis et résolutive à droite, il existe $\tilde{\sigma} \in \mathcal{H}_o$ tel que $\tilde{\sigma}_{\bar{q}} \sigma \times s \times \sigma$ et que $(\tilde{S}^*, \tilde{\sigma})$ soit une catégorie $\mathcal{H}$ -structurée.

Soit $\eta = (C^*, S_o, \kappa')$ une espèce de structures; soit π la projection canonique de $C^* * S_o$ vers C et $C_1 = \pi(C^* * S_o)$. Soit

$$\bar{\eta} = ((C^*, s), (S_o, \sigma), \kappa')$$

un $\mathcal{H}$ -espace de structures et (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}$. Soit (η, F) une espèce de structures dominée dans $(p, \bar{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}))$ (nous reprenons les notations des conditions 1, 2, 3, § 1) et supposons que (C^*, G) soit un couple dominant dans $(p\bar{q}, \bar{\mathcal{F}})$ une espèce de structures $\mu = (C^*, \bar{S}, \bar{\kappa}')$. Soit $\bar{\alpha}$ l'application source dans la catégorie $\bar{S}^*$, somme des catégories $G(e)$, et soit $\bar{\pi}'$ l'application canonique de S_o dans $\bar{S}_o^*$.

Soit $(\bar{\mu}, G)$ un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes, où $\bar{\mu} = ((C^\bullet, s), (\bar{S}, \bar{\sigma}), \bar{\kappa}')$ et soit $(\mu, \bar{H})$ l'espèce de structures dominée sous $\bar{\mu}$. Nous supposons de plus que $\bar{\eta}'(e) = ((G(e), \bar{H}(e)), (\bar{\pi}'(e), H(e)), \bar{\kappa}'(e))$ soit un $\mathcal{H}$ -espace de structures, pour tout $e \in (C_1)_0^\bullet$. Soit $(C^\bullet, \hat{F})$ le couple dominant dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ l'espèce de structures $\eta'' = (C^\bullet, \Sigma, \hat{\kappa}')$ construite au § 1, telle que :

$$\hat{F}(e) = (G(e) * \bar{\pi}'(e))^\bullet \quad \text{pour tout } e \in (C_1)_0^\bullet.$$

THEOREME. Si $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, \cdot)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits fibrés finis, $(\bar{\eta}'', \hat{F})$ est un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes, où

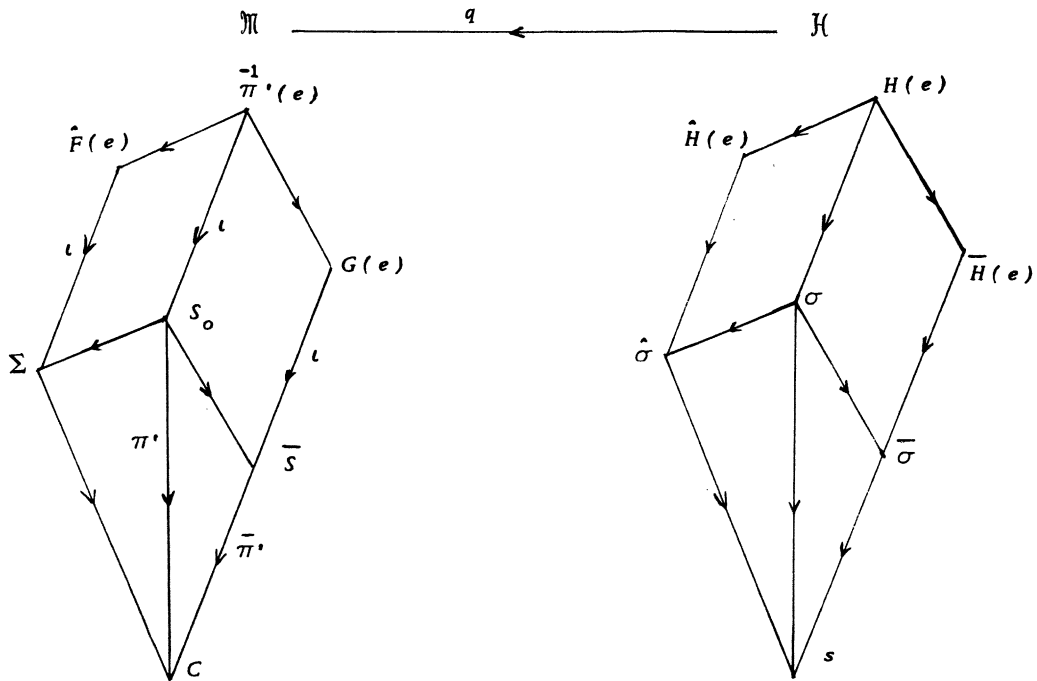
$$\bar{\eta}'' = ((C^\bullet, s), (\Sigma, \hat{\sigma}), \hat{\kappa}')$$

et où $\hat{\sigma}$ est le produit fibré dans $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H})$ défini par :

$$\hat{\sigma} = (\bar{\sigma}, \bar{\alpha}, \bar{\sigma}) \vee (\bar{\sigma}, \bar{\pi}', \sigma).$$

Soit $(\eta'', \hat{H})$ l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}''$; alors $\hat{H}(e)$ est la catégorie $\mathcal{H}$ -structurée des hypermorphisms [4c] associée à $\bar{\eta}'(e)$, pour tout $e \in C_0^\bullet$.

DEFINITION. Si les hypothèses précédentes sont vérifiées, on dira que $(\bar{\eta}, \bar{\mu}, F)$ est un $\mathcal{H}$ -espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes.



Ψ -ESPACES DE STRUCTURES.

Soit $(\mathbb{M}, q, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes et soit $\Psi = (\mathcal{H}, \psi, \mathcal{H}')$ un foncteur fidèle.

DEFINITION. On dira que $(\bar{\eta}, H')$ est un Ψ -espace de structures si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\bar{\eta} = ((C^*, s), (S, \sigma), \kappa')$ est un $\mathcal{H}$ -espace de structures; soit (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}$.

2) (C^*, H') est un couple dominant dans $(q\psi, \mathcal{H}')$ une espèce de structures et on a $H = \psi H'$.

La notion de Ψ -espace de structures généralise la notion d'espace fibré dont les fibres sont munies de superstructures; le couple $(\pi'^{-1}(e), H(e))$, où $e \in \pi'(S)$, peut être considéré comme la fibre sur e , $H'(e)$ étant la superstructure correspondante.

PROPOSITION. Pour que $(\bar{\eta}, H)$ soit le $\mathcal{H}$ -espace de structures sous un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes $(\bar{\eta}, G)$, il faut et il suffit que $(\bar{\eta}, \bar{H})$ soit un $(\mathcal{H}, \bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ -espace de structures, où $\bar{\mathcal{H}}$ est la catégorie des foncteurs $\mathcal{H}$ -structurés et $\bar{H}(e) = (G(e), H(e))$ pour tout $e \in \pi'(S)$.

CAS PARTICULIER. 1) Supposons que $(\mathbb{M}, q, \mathcal{H}, .)$ soit une catégorie d'homomorphismes à produits finis, que Ψ soit un foncteur compatible avec les produits et que $(\mathbb{M}, q\psi, \mathcal{H}', .)$ soit une catégorie d'homomorphismes avec atomes. Soit (C^*, s) une catégorie $\mathcal{H}$ -structurée. Soit $\sigma' \in \mathcal{H}'_0$. Pour tout $e \in C^*_0$, soit $H'(e) = \sigma' \times \bar{e}$, où $\bar{e}$ est l'atome tel que $q\psi(\bar{e}) = \{e\}$; soit H' l'application de C dans $\mathcal{H}' : f \rightarrow \sigma' \times (\bar{e}', \xi, \bar{e})$, où $\xi(e) = e'$, $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Soit $\eta = (C^*, S, \kappa')$ l'espèce de structures dominée par (C^*, H') (qui est l'espèce de structures associée au foncteur constant $f \rightarrow q\psi(\sigma')$). Alors

$$\bar{\eta} = ((C^*, s), (S, \sigma' \times s_0), \kappa'), \quad \text{où } s_0 \frown_q s,$$

est un $\mathcal{H}$ -espace de structures et $(\bar{\eta}, H')$ est un Ψ -espace de structures, appelé le Ψ -espace de structures trivial défini par (C^*, s, σ') .

2) Soit $\mathcal{U}$ la catégorie des triplets $(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1)$, où $\tilde{E}_i = (E_i^+, (K_i, +, .))$ est un espace vectoriel topologique sur le corps topologique $(K_i, +, .)$, où φ est un isomorphisme topologique du corps $(K_1, +, .)$ sur $(K_2, +, .)$ et où φ' est un homomorphisme continu du groupe topologique E_1^+ dans E_2^+ tel que :

$$\varphi'(kx) = \varphi(k)\varphi'(x) \quad \text{si } x \in E_1 \text{ et } k \in K_1.$$

La loi de composition sur $\mathcal{U}$ est définie par :

$$(\tilde{E}_3, (\varphi'_1, \varphi_1), \tilde{E}_2) \cdot (\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (\tilde{E}_3, (\varphi'_1 \varphi', \varphi_1 \varphi), \tilde{E}_1).$$

Soit ν le foncteur de $\mathcal{U}$ vers la catégorie $\tilde{\mathcal{J}}$ des applications continues entre espaces topologiques tel que :

$$\nu(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (E_2 \times K_2, \varphi' \times \varphi, E_1 \times K_1).$$

Soit $\mathcal{G}_1$ (resp. $\mathcal{G}_2$) la catégorie des homomorphismes continus entre groupes abéliens (resp. corps) topologiques et soit $\bar{p}_i = (\mathbb{M}, p_i, \mathcal{G}_i)$ le foncteur fidèle canonique, où $i = 1, 2$. Soient $\bar{p}'_i$ les foncteurs de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}_i$:

$$\begin{aligned}\bar{p}'_1(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) &= (E_2^+, \varphi', E_1^+) \\ \bar{p}'_2(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) &= ((K_2, +, .), \varphi, (K_1, +, .)).\end{aligned}$$

Soit $(\bar{\eta}, H')$ un ν -espace de structures, où

$$\bar{\eta} = ((C^*, s), (S, \sigma), \kappa') \quad \text{et} \quad H'(e) = (E_e^+, (K_e, +, .)) \quad \text{pour tout } e \in C_0^*.$$

Soit $\bar{e}_1$ (resp. $\bar{e}_2$) le groupe (resp. anneau) atomique tel que $p_i(\bar{e}_i) = e$, $i = 1, 2$. Si $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, posons $G_i(f) = \bar{p}'_i H'(f) \times \xi_i$, où ξ_i est l'isomorphisme trivial de $\bar{e}_i$ sur $\bar{e}'_i$. (C^*, G_i) est un couple dominant dans $(p_i, \mathcal{G}_i)$ une espèce de structures $\eta_i = (C^*, S_i, \kappa'_i)$. Soit σ_1 (resp. σ_2) la topologie sur S_1 (resp. S_2) homéomorphe à la topologie induite par σ sur la classe des couples $(z, 0_e)$, où 0_e est le 0 de $(K_e, +, .)$ (resp. $(0'_e, k)$, où $0'_e$ est l'unité de E_e^+). En posant

$$\bar{\eta}_i = ((C^*, s), (S_i, \sigma_i), \kappa'_i),$$

$(\bar{\eta}_i, G_i)$ est un $\bar{p}'_i$ -espace de structures. Un ν -espace de structures est appelé un espace fibré vectoriel généralisé; c'est un espace fibré vectoriel ordinaire si C^* est un groupoïde localement trivial et si $(\bar{\eta}_2, G_2)$ est le $\bar{p}'_2$ -espace de structures trivial défini par $(C^*, s, (K, +, .))$.

Soit $(\bar{\eta}, \bar{\mu}, F)$ un $\mathcal{H}$ -espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes (nous reprenons les notations antérieures). Supposons que $(\bar{\eta}, H')$ et $(\bar{\mu}, \bar{H}')$ soient des Ψ -espaces de structures et que, pour tout $e \in \pi'(S_0)$, $F'(e) = ((G(e), \bar{H}'(e)), H'(e), \kappa'(e))$ soit un $\mathcal{H}'$ -espace de structures. Ceci équivaut à se donner une espèce de structures (η, F') dominée dans $(p_2^{\mathcal{H}'}, \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{H}'))$ telle que :

$$\psi p_2^{\mathcal{H}'} F' = H \quad \text{et} \quad \psi \bar{\psi} p_1^{\mathcal{H}'} F' = \bar{H}.$$

PROPOSITION. $(\hat{\eta}, \hat{H}')$ est un Ψ -espace de structures, où $\hat{H}'(e)$ est, pour tout $e \in \pi'(S_0)$, la catégorie $\mathcal{H}'$ -structurée des hypermorphisms [4c] associée à $F'(e)$.

DEFINITION. Avec les notations précédentes, on dira que $(\bar{\eta}, \bar{\mu}, F')$ est un Ψ -espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$ -espace de morphismes.

Bibliographie.

- [1] C. EHRESMANN. Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup. 1963.
- [2] C. EHRESMANN. Structures quotient, Comm. Math. Helv. 1964, p. 209.
- [3] C. EHRESMANN. Quintettes et applications covariantes, Sémin. Topo. et Géo. diff. (Ehresmann) 1963, V.
- [4] C. EHRESMANN. C.R.A.S. 256, 1963 : a) p. 1198 ; b) p. 1891 ; c) p. 2080 et 2280 ; d) 258, 1964 p. 2461 .
- [5] C. EHRESMANN. Elargissements de catégories, Sémin. Topo. et Géo. diff. III, 1961 .
- [6] J. FRENKEL. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. de France, t. 85 , 1957 , II , p. 135 .
- [7] P.J. HILTON. Note on free and direct products in general categories, Bull. Soc. Math. Belgique, XIII, 1961 .
- [8] S. MAC LANE. Homology, Springer-Verlag, Berlin. 1963.