

TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

H. AKBAR-ZADEH

Une généralisation de la géométrie finslérienne

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann,
tome 6 (1964), exp. n° 6, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A6_0

© Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Topologie et géométrie différentielle. Cahiers
du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann » implique l'accord avec les conditions gé-
nérales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale
ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou im-
pression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE GENERALISATION DE LA GEOMETRIE FINSLERIENNE

par H. AKBAR-ZADEH

1. Variétés Finslériennes.

Soit V_n une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞ . Nous désignerons par V l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_n par W l'espace fibré des directions orientées tangentes à V_n , par π, p et η respectivement les applications canoniques de $V \rightarrow V_n$, de $W \rightarrow V_n$ et de $V \rightarrow W$ ($\pi = p \circ \eta$). Les points de V, W et V_n seront notés respectivement par z, y et x . Soit $T_{\pi z}$ l'espace vectoriel tangent à V_n en $x = \pi z$. Par champ de tenseurs au sens large nous entendons une application qui à tout $z \in V$ fait correspondre un élément de l'algèbre tensorielle affine construite sur $T_{\pi z}$. Soit t un tel tenseur, λ étant un nombre positif donné, considérons la transformation de V définie par $\mu_\lambda: z \rightarrow \lambda z$, nous dirons que t est un tenseur restreint de degré d'homogénéité r (par abus de langage $b \cdot r$) si

$$(1.1) \quad t(\mu_\lambda z) = \lambda^r t(z).$$

Par définition une p -forme «semi-basique» $b \cdot r$ sur V est un champ de tenseurs covariants d'ordre p antisymétriques et de degré d'homogénéité r . Soit K l'anneau des fonctions à valeurs réelles sur V , nous désignerons par $H_p^r(V)$ le K -module des p -formes semi-basiques $b \cdot r$ sur V . Soit U un voisinage de V_n , aux coordonnées locales (x^α) ($\alpha = 1 \dots n$) d'un point $x \in U$ nous faisons correspondre les coordonnées (x^α, v^α) du point $z \in \bar{U} \subset \pi^{-1}(U)$ ($\pi z = x$) où les v^α sont des composantes par rapport au repère naturel d'origine x du vecteur de $T_{\pi z}$ défini par z . Tout élément $a \in H_p^r(\bar{U})$ peut donc s'écrire :

$$a = \frac{1}{p!} a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(z) dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

Nous définissons l'opérateur $d^\bullet$ par :

$$(1.2) \quad d^\bullet a = dx^\lambda \wedge \partial_\lambda^\bullet a.$$

où ∂^* désigne la dérivée de a par rapport à v . Cet opérateur applique le K -module $H_p^r(\bar{U})$ dans le K -module $H_{p-1}^r(\bar{U})$, il est de bidegré égal à $(1, -1)$ et possède les propriétés de différentiation. Soit $\mathcal{L}(x, v)$ une fonction positive $h \cdot 1$ sur V et posons ⁽¹⁾

$$(1.3) \quad F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}^* (\tfrac{1}{2} \mathcal{L}^2) \quad (\partial_a^* = \frac{\partial}{\partial v^a})$$

$F_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique $h \cdot 0$. Nous dirons que la donnée de $\mathcal{L}$ munit V_n d'une structure de variété finslérienne si $F_{\alpha\beta}$ définit sur T_{py} une forme quadratique définie positive.

2. Variétés finslériennes généralisées.

DEFINITION. Une structure de variété finslérienne généralisée (V_n, W, g) sur V_n est définie par la donnée d'un champ de tenseurs g symétrique $h \cdot 0$, définissant pour chaque $y \in W$, une forme quadratique définie positive sur T_{py} . Nous appelons finslérienne si en outre :

$$(2.1) \quad (X, Y)_y = \tfrac{1}{2} [i(X)d^*(v, Y)_y + i(Y)d^*(v, X)_y] \quad \forall X, Y \in T_x$$

où nous avons désigné par i l'opérateur du produit intérieur et par $(X, Y)_y$ le produit scalaire de X et Y en $x = py$. Soit $g_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique d'une variété finslérienne généralisée et posons :

$$(2.2) \quad \mathcal{L}^2 = g_{\alpha\beta}(x, v) v^\alpha v^\beta$$

$$(2.3) \quad F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}^* (\tfrac{1}{2} \mathcal{L}^2).$$

Entre $F_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ il vient :

$$(2.4) \quad F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{4} (\partial_\alpha^* a_{\lambda\beta} + \partial_\beta^* a_{\alpha\lambda}) v^\lambda.$$

avec :

$$(2.5) \quad a_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha^* g_{\lambda\beta} + \partial_\beta^* g_{\alpha\lambda}) v^\lambda.$$

Dans la suite nous supposons que $\det(F_{\alpha\beta}) \neq 0$.

3. Connexions finslériennes généralisées.

a) Soit $E(V_n)$ l'espace fibré principal des repères linéaires sur V_n . Nous désignerons par $\pi^{-1}E(V_n)$ (resp. $p^{-1}E(V_n)$) l'espace fibré induit de $E(V_n)$ par $\pi: V \rightarrow V_n$ (resp. par $p: W \rightarrow V_n$). Nous appelons connexion linéaire de vecteurs (resp. de directions) une connexion infinitésimale sur $\pi^{-1}E(V_n)$ (resp. sur $p^{-1}E(V_n)$). Si $\bar{\omega}$ est une connexion linéaire de directions nous désignerons encore par $\bar{\omega}$ son image inverse sur $\pi^{-1}E(V_n)$ par η . Rapportée au corepère local (dx, dv) la matrice de cette connexion s'écrit :

$$(3.1) \quad \bar{\omega}_\beta^\alpha = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(z) dx^\gamma + \bar{\mathcal{C}}_{\beta\gamma}^\alpha(z) dv^\gamma \quad (\bar{\mathcal{C}}_{\beta 0}^\alpha = 0)$$

où l'indice 0 désigne la multiplication contractée par v . Les coefficients $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ sont

⁽¹⁾ Les indices $\alpha, \beta, \dots$ varient de 1, 2 ... n.

$h \cdot 0$ et les quantités $\bar{\mathcal{C}}_{\beta\gamma}^a$ sont $h \cdot (-1)$ et définissent un tenseur de type $(1, 2)$. Une telle connexion sera dite *régulière* si l'ensemble (dx, Dv) définit un corepère de l'espace vectoriel T_z tangent à V en $z \in V$ où Dv désigne la dérivée covariante dans $\bar{\omega}$. Rapportée au corepère (dx, Dv) la matrice $\bar{\omega}_\beta^a$ s'écrit :

$$(3.2) \quad \bar{\omega}_\beta^a = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{*a}(z) dx^\gamma + \bar{T}_{\beta\gamma}^a(z) Dv^\gamma \quad (\bar{T}_{\beta 0}^a = 0)$$

on a alors :

$$(3.3) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{*a} = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^a - \bar{\mathcal{C}}_{\beta\lambda}^a \bar{\Gamma}_{0\gamma}^{*\lambda}$$

$$(3.4) \quad \bar{T}_{\beta\gamma}^a = \bar{\mathcal{C}}_{\beta\gamma}^a - \bar{\mathcal{C}}_{\beta\lambda}^a \bar{T}_{0\gamma}^{*\lambda}.$$

Les coefficients $\bar{\Gamma}^*$ et $\bar{T}$ sont respectivement $h \cdot 0$ et $h \cdot (-1)$ et ces derniers définissent un tenseur de type $(1, 2)$. La forme de torsion associée à $\bar{\omega}$ s'écrit :

$$(3.5) \quad \bar{\Sigma}^a = \bar{\omega}_\beta^a \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} \bar{S}_{\beta\gamma}^a dx^\beta \wedge dx^\gamma + \bar{T}_{\beta\gamma}^a Dv^\gamma \wedge dx^\beta$$

$$(3.6) \quad \bar{S}_{\beta\gamma}^a = -(\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{*a} - \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^{*a})$$

où $\bar{S}$ et $\bar{T}$ seront appelés les tenseurs de torsion de $\bar{\omega}$.

b) Etant donnée une variété finslérienne généralisée, soit $\bar{\omega}$ une connexion linéaire de directions telle que :

$$(I) \quad Dg_{\alpha\beta} = 0$$

$$(II) \quad \bar{S}_{\beta\gamma}^a = 0$$

$$(III) \quad \bar{T}_{\beta\gamma}^a = \bar{T}_{\gamma\beta}^a.$$

La condition III entraîne $\bar{T}_{0\gamma}^a = 0$, c'est-à-dire $\bar{\omega}$ est régulière [1]. Ainsi (3.4) s'écrit :

$$(3.7) \quad \bar{T}_{\beta\gamma}^a = \bar{\mathcal{C}}_{\beta\gamma}^a$$

de la condition I nous obtenons :

$$(3.8) \quad \bar{T}_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha^\cdot g_{\beta\gamma} + \partial_\beta^\cdot g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma^\cdot g_{\alpha\beta}) \quad (\bar{T}_{\gamma\alpha\beta} = g_{\gamma\lambda} \bar{T}_{\alpha\beta}^{*\lambda})$$

REMARQUE. De (3.8) il résulte :

$$\bar{T}_{0\alpha\beta} = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}.$$

Multiplions les deux membres par v^β :

$$a_{\alpha\beta} v^\beta = 0$$

d'où :

$$a_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\partial_\alpha^\cdot a_{\lambda\beta} + \partial_\beta^\cdot a_{\alpha\lambda}) v^\lambda.$$

D'autre part on a $v^\lambda \partial_\alpha^\cdot g_{\lambda\beta} = \bar{T}_{0\alpha\beta}$, ainsi (2.4) s'écrit :

$$(3.9) \quad F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + v^\lambda \partial_\alpha^\cdot g_{\lambda\beta}.$$

c) *Calculs des coefficients* $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Des conditions I et II nous obtenons

$$(3.10) \quad \bar{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\beta\gamma} \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\gamma\alpha} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\lambda})$$

$$(\bar{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha}^{\alpha} = g_{\gamma\lambda} \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\lambda})$$

où ∂ désigne la dérivée partielle ordinaire. Multiplions les deux membres de (3.10) par v^{β} :

$$(3.11) \quad v^{\beta} \bar{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}) v^{\beta} - \frac{1}{2} [(F_{\gamma\lambda} - g_{\gamma\lambda}) \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\gamma\alpha} \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda} - (F_{\alpha\lambda} - g_{\alpha\lambda}) \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\lambda}].$$

Multiplions les deux membres de cette relation par v^{α} :

$$(3.12) \quad F_{\gamma\lambda} \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda} = v^{\beta} \partial_{\beta} (F_{\gamma\alpha} v^{\alpha}) - \partial_{\gamma} F \quad (2F = F_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta} = \mathcal{Q}^2)$$

par hypothèse la matrice $F_{\gamma\lambda}$ étant régulière, de la relation précédente on déduit $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda}$. Ces quantités sont les mêmes que dans le cas de la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$ [1]. Ainsi la relation (3.12) prouve que les géodésiques de la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$ coïncident avec celles de la connexion $\bar{\omega}$. Il nous reste à calculer les quantités $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda}$, à cet effet posons :

$$(3.13) \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} (z) v^{\alpha} v^{\beta} = 2 G^{\lambda} (z).$$

Ecrivons la condition $D_{\alpha} g_{\gamma\alpha} = 0$:

$$(3.14) \quad g_{\gamma\lambda} \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda} + g_{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\lambda} = v^{\beta} \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - 2 \partial_{\lambda} g_{\gamma\alpha} \bar{G}^{\lambda}$$

de (3.11) nous obtenons alors :

$$(3.15) \quad F_{\gamma\lambda} \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}^{\lambda} - F_{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\lambda} = (\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}) v^{\beta}.$$

Des relations (3.14) et (3.15) il résulte

$$(3.16) \quad (F_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\mu} + F_{\beta}^{\mu} \delta_{\lambda}^{\alpha}) \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda} = g^{\alpha\gamma} F_{\beta}^{\mu} (v^{\lambda} \partial_{\lambda} g_{\gamma\mu} - 2 \partial_{\lambda} g_{\gamma\mu} G^{\lambda}) + g^{\alpha\gamma} (\partial_{\beta} g_{\lambda\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\beta\lambda}) v^{\lambda}$$

où nous avons posé $F_{\alpha}^{\mu} = F_{\alpha\lambda} g^{\lambda\mu}$ et $\delta_{\lambda}^{\alpha}$ est le symbole de Kronecker. Le second membre contient des quantités connues, nous avons ainsi un système de n^2 équations à n^2 inconnues, pour que ce système admette une solution il faut et il suffit que la matrice ($n^2 \times n^2$) des coefficients de $\bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda}$ soit régulière. Par exemple dans le cas de dimension $n = 2$ nous avons la matrice (4×4) :

$$\begin{pmatrix} 2F_1^1 & F_2^1 & F_1^2 & 0 \\ F_1^2 & F_1^1 + F_2^2 & 0 & F_1^2 \\ F_2^1 & 0 & F_1^1 + F_2^2 & F_2^1 \\ 0 & F_2^1 & F_1^2 & 2F_2^2 \end{pmatrix} = 4(F_1^1 + F_2^2)^2 \det(F_\beta^\alpha).$$

Ainsi la matrice des coefficients de $\bar{\Gamma}_{o\mu}^{\lambda}$ est régulière si et seulement si $\text{trace}(F_\beta^\alpha) \neq 0$. De l'analyse des équations précédentes il résulte que les quantités $\bar{\Gamma}_{o\mu}^{\lambda}$ ne peuvent être calculées en général, c'est pourquoi nous imposerons certaines conditions supplémentaires au tenseur de torsion de l'espace. Dérivons par rapport à v^μ la relation (3.12)

$$2\partial_\mu^\bullet F_{\lambda\gamma} \cdot G^\lambda + 2F_{\lambda\gamma} \partial_\mu^\bullet G^\lambda = v^\alpha \partial_\alpha (F_{\gamma\mu} - g_{\gamma\mu}) + (\partial_\mu g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\beta}) v^\beta.$$

En vertu de (3.11) cette relation s'écrit :

$$(3.17) \quad 2F_{\gamma\lambda} (\partial_\mu^\bullet G^\lambda - \bar{\Gamma}_{o\mu}^{\lambda}) = D_o \bar{T}_{o\gamma\mu}.$$

Nous supposons dans la suite

$$(IV) \quad D_o \bar{T}_{o\gamma\mu} = 0$$

$F_{\gamma\lambda}$ étant régulière de (3.17) on obtient :

$$(3.18) \quad \bar{\Gamma}_{o\mu}^{\lambda} = \partial_\mu^\bullet G^\lambda.$$

Si l'on désigne par ∇ la dérivée covariante dans la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$ la condition IV est équivalente à $Dv = \nabla v$. Ainsi les $\bar{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha}^{\lambda}$ s'écrivent :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha}^{\lambda} = & \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\lambda^\bullet g_{\beta\gamma} \partial_\alpha^\bullet G^\lambda + \partial_\lambda^\bullet g_{\gamma\alpha} \partial_\beta^\bullet G^\lambda - \partial_\lambda^\bullet g_{\alpha\beta} \partial_\gamma^\bullet G^\lambda). \end{aligned}$$

Les coefficients $\bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\lambda}$ se trouvent ainsi complètement déterminés à partir du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ et ses dérivées des deux premiers ordres. Quant aux coefficients $\bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\lambda}$ on les obtient d'après (3.3). Les $\bar{\mathcal{C}}$ et $\bar{T}$ déterminent donc une connexion linéaire régulière de directions et une seule.

THEOREME. *Etant donnée une variété finslérienne généralisée ($\det(F_{\alpha\beta}) \neq 0$) il existe une connexion euclidienne de directions et une seule telle que le tenseur de torsion $\bar{S}$ est nul et le tenseur $\bar{T}$ satisfait aux conditions III et IV et cette connexion sera dite la connexion finslérienne généralisée.*

REMARQUE. Soit $\bar{\omega}$ la connexion finslérienne généralisée, nous désignerons par ω la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$. Les coefficients de ces deux connexions sont liés par :

$$(3.20) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\lambda} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} - \frac{1}{2} M^{\lambda\gamma} (D_\alpha F_{\beta\gamma} + D_\beta F_{\gamma\alpha} - D_\gamma F_{\alpha\beta})$$

$$(3.21) \quad \bar{T}_{\beta\alpha}^{\lambda} = T_{\beta\alpha}^{\lambda} - \frac{1}{2} M^{\lambda\gamma} (D_{\alpha}^{\cdot} F_{\beta\gamma} + D_{\beta}^{\cdot} F_{\gamma\alpha} - D_{\gamma}^{\cdot} F_{\alpha\beta})$$

où nous avons désigné par Γ et T les coefficients de la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$, par M la matrice inverse de F et par $D_{\alpha}^{\cdot}$, $D_{\alpha}^{\cdot}$ les composantes de la dérivée covariante par rapport aux dx^{α} et Dv^{α} . Pour que ces deux connexions coïncident il faut et il suffit que $D_{\beta}^{\cdot} F_{\gamma\alpha} = 0$ et dans ce cas les deux structures métriques coïncident.

4. Formule de divergence.

a) A l'aide du tenseur métrique g on peut normer l'espace vectoriel T_{py} tangent à V_n en $x = py$. Soit (e_{α}) un repère orthonormé de T_{py} par rapport à ce repère la métrique de l'espace s'écrit :

$$(4.1) \quad ds^2 = \sum_{\alpha=1}^n (\omega_{\alpha})^2.$$

Nous désignerons par :

$$(4.2) \quad \omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Choisissons une base orthonormée (e_{α}) de T_{py} telle que le vecteur e_n coïncide avec le vecteur unitaire $l = \frac{v}{\|v\|}$ dans ce cas nous avons :

$$l_n = 1, \quad l_{\alpha} = 0, \quad \beta_n = 0, \quad \beta_{\alpha} = w_{\alpha n} \quad \alpha = 1, 2 \dots n-1$$

où nous avons posé $\beta_{\lambda} = D l_{\lambda}$. Munissons W de la métrique riemannienne :

$$(4.3) \quad d\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^n (\omega_{\alpha})^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\beta_{\alpha})^2.$$

Posons :

$$(4.4) \quad \beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_{n-1}$$

$$(4.5) \quad \eta = \omega \wedge \beta$$

où η sera l'élément de volume de W . Soit Φ une p -forme « semi-basique » sur W nous désignerons par $*\Phi$ son adjointe relativement à ω , par $\tilde{*}\Phi$ son adjointe relativement à η . Entre ces deux opérateurs linéaires il vient :

$$(4.6) \quad \tilde{*}\Phi = *\Phi \wedge \beta.$$

Notons par δ l'opérateur de la codifférentiation, cet opérateur sera défini, pour une p -forme, par :

$$(4.7) \quad \delta = (-1)^p \tilde{*}^{-1} d \tilde{*}$$

où $\tilde{*}^{-1}$ est tel que $\tilde{*}^{-1} \cdot \tilde{*} = \tilde{*} \cdot \tilde{*}^{-1} = E$ avec :

$$(4.8) \quad \tilde{*}^{-1} = (-1)^{p(2n-1-p)} \tilde{*} = \tilde{*}.$$

b) Soit π une 1-forme « semi-basique » sur W , elle peut être définie par :

$$(4.9) \quad \pi = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \omega_{\alpha}.$$

Nous nous proposons d'évaluer $\delta\pi$, à cet effet on a d'abord $\tilde{*}\pi = (*\pi) \wedge \beta$ d'où :

$$d(\tilde{*}\pi) = d(*\pi) \wedge \beta + (-1)^{n-1} (*\pi) \wedge d\beta.$$

En vertu de (4.7) et (4.8) on obtient :

$$(4.10) \quad \delta\pi = -*[d(*\pi) \wedge \beta] + (-1)^n *[(\pi) \wedge d\beta].$$

Evaluons le second membre; tout d'abord

$$(*\pi) = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} a_{\alpha} \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_{\alpha} \wedge \dots \wedge \omega_n$$

où le signe $\wedge$ signifie que le terme correspondant doit être omis dans le produit extérieur considéré, d'où :

$$(4.11) \quad d(*\pi) \equiv (D_{\alpha} a_{\alpha}) \cdot \omega \quad (\text{mod } \beta_{\lambda})$$

où D est le symbole de la dérivée covariante dans la connexion finslérienne généralisée; de (4.4) on obtient par différentiation :

$$(4.12) \quad d\beta = \sum_{\lambda=1}^{n-1} (-1)^{\lambda-1} d\beta_{\lambda} \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\beta}_{\lambda} \wedge \dots \wedge \beta_{n-1}.$$

D'autre part $\beta_{\lambda} = D l_{\lambda}$ d'où :

$$d\beta_{\lambda} = \beta_{\alpha} \wedge \omega_{\lambda \alpha} + l_{\alpha} \bar{\Omega}_{\lambda \alpha}$$

où $\bar{\Omega}_{\lambda \alpha}$ est la 2-forme de courbure de la connexion finslérienne généralisée. Ainsi (4.12) s'écrit :

$$(4.13) \quad d\beta \equiv \Sigma (\bar{P}_{\lambda \alpha \lambda} \omega_{\alpha}) \wedge \beta \quad (\text{mod des 2-formes semi-basiques}).$$

Compte tenu de (4.13) et (4.11) l'expression $\delta\pi$ définie par (4.10) s'écrit :

$$(4.14) \quad \delta\pi = -(D_{\alpha} a_{\alpha} + a_{\alpha} \bar{P}_{\lambda \alpha \lambda}).$$

D'autre part, en coordonnées locales le tenseur de courbure $\bar{P}$ est défini par (voir [1] chapitre I, § 7) :

$$(4.15) \quad \bar{P}_{\beta \alpha \gamma}^{\lambda} = \bar{P}_{\beta \alpha \gamma}^{*\lambda} + \bar{T}_{\beta \mu}^{\lambda} \bar{P}_{\alpha \gamma}^{*\mu}$$

$$(4.16) \quad \bar{P}_{\beta \alpha \gamma}^{*\lambda} = D_{\alpha} \bar{T}_{\beta \gamma}^{\lambda} - \partial_{\gamma} \bar{\Gamma}_{\beta \alpha}^{*\lambda}$$

d'où :

$$(4.17) \quad \bar{P}_{\alpha \gamma}^{*\lambda} = -\nu^{\beta} \partial_{\gamma} \bar{\Gamma}_{\beta \alpha}^{*\lambda} = \bar{\Gamma}_{\gamma \alpha}^{*\lambda} - \bar{\Gamma}_{\gamma \alpha}^{*\lambda} - \nabla_{\alpha} T_{\gamma \alpha}^{\lambda}.$$

On en déduit :

$$(4.18) \quad \bar{P}_{\alpha} = \bar{P}_{\alpha \lambda}^{\lambda} = -\frac{1}{2} M^{\gamma \mu} (D_{\alpha} F_{\gamma \mu} + D_{\alpha} \partial_{\alpha} F_{\gamma \mu}).$$

Supposons maintenant V_n compacte, en appliquant la formule de Stokes généralisée :

$$(4.19) \quad \int_W \delta\pi \eta = - \int_W (D_{\alpha} a^{\alpha} + a^{\alpha} \bar{P}_{\alpha}) \eta = 0.$$

A cette formule on donne le nom de formule de divergence.

5. Les g -isométries.

a) Soit X un champ de vecteurs sur V_n nous désignerons par $\exp(uX)$ le groupe local à 1-paramètre de transformations locales de V_n , engendré par X , par $\exp(u\tilde{X})$ le groupe prolongé opérant sur V . Nous dirons que X est une g -isométrie si $\exp(u\tilde{X})$ laisse invariant le tenseur g . Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la dérivée de Lie de g par $\tilde{X}$ soit nulle et cette dérivée de Lie s'écrit :

$$(5.1) \quad L(X)g_{\alpha\beta} = D_\alpha X_\beta + D_\beta X_\alpha + \partial_\gamma^\bullet g_{\alpha\beta} D_o X^\gamma.$$

Désignons par $t(X)_{\alpha\beta}$ le tenseur défini par le second membre et considérons la 1-forme π ayant pour composantes

$$\pi_\alpha = X^\beta t(X)_{\alpha\beta}.$$

Sa codifférentielle s'écrit :

$$(5.2) \quad S\pi = -(t(X), t(X)) - X^\beta D^\alpha t(X)_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\gamma^\bullet g_{\alpha\beta} D_o X^\gamma \cdot t^{\alpha\beta}$$

où la parenthèse désigne le produit scalaire local, d'autre part soit K la fonction $b^*(-1)$ sur V définie par :

$$(5.3) \quad K = \frac{1}{2} \partial_\gamma^\bullet g_{\alpha\beta} X^\gamma t^{\alpha\beta}$$

de (5.2) et de (5.3) on obtient :

$$(5.4) \quad \delta(\pi + Kv) = -(t(X), t(X)) - (X, \xi(X))$$

avec :

$$(5.5) \quad \xi_\gamma = D^\alpha t(X)_{\alpha\gamma} + \bar{T}_{\alpha\beta\gamma} D_o t^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D_o (\partial_\gamma^\bullet g_{\alpha\beta}) t^{\alpha\beta} + \bar{P}^\alpha t(X)_{\alpha\gamma}.$$

Supposons V_n compacte, en vertu de (4.19), en intégrant la relation (5.4) sur W on obtient :

$$(5.6) \quad \langle t(X), t(X) \rangle + \langle X, \xi(X) \rangle = 0$$

où le signe $\langle \rangle$ désigne le produit scalaire global d'où :

THEOREME. Etant donnée une variété finslérienne généralisée (V_n, W, g) dont la base V_n est compacte, pour qu'une transformation infinitésimale X soit une g -isométrie il faut et il suffit que $\xi(X) = 0$.

b) Supposons que X soit une F -isométrie, alors X est une transformation affine pour la connexion finslérienne associée à F . Supposons d'autre part $\bar{P}_{o\alpha\gamma}^{\lambda} = 0$, d'après (4.17) X est une $(t-i)$ affine partielle pour la connexion finslérienne généralisée et on en déduit, par un calcul facile, que $\xi(X) = 0$. Ainsi X est une g -isométrie.

COROLLAIRE. Pour une variété finslérienne généralisée compacte satisfaisant la condition $\bar{P}_{o\alpha\gamma}^{\lambda} = 0$ les g -isométries coïncident avec les F -isométries.

REFERENCES.

- [1] H. AKBAR-ZADEH. Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations.
Ann. Sci. Ec. Norm. 3e Série t 80 1963 .
- [2] E. CARTAN. Les espaces de Finsler. Paris Hermann 1934 .
- [3] C. EHRESMANN. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Coll. de Topologie, Bruxelles 1950 p 29 - 55 .