Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

JEAN HOUDEBINE

Classes et ensembles

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 4, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A4_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE Vol. VI

Séminaire dirigé par C. EHRESMANN

DECEMBRE 1962

CLASSES ET ENSEMBLES

par Jean HOUDEBINE

Introduction.

Le but de cet exposé est de construire une axiomatique justifiant le langage utilisé dans la théorie des catégories. A l'exemple de Bourbaki, nous nous placerons du point de vue de la logique formelle. En conséquence, nous n'essaierons pas de restreindre le cadre de la théorie; cela serait peut-être nécessaire pour étudier la non contradiction de ce système d'axiomes, mais alourdirait beaucoup le langage. Cependant, pour faciliter cette étude et éviter les contradictions, les axiomes seront choisis autant que possible dans des systèmes depuis longtemps étudiés. S'il se produisait une contradiction, le schéma de construction proposé pourrait encore s'appliquer à d'autres systèmes d'axiomes.

La première partie exposera le schéma général de la théorie, que nous développerons dans la partie suivante. La dernière partie donnera quelques résultats montrant des applications de la théorie des classes au langage des catégories. Nous utiliserons le langage formalisé de Bourbaki [2] .

1. Théorie des classes.

1°) Dans le cadre de la théorie des ensembles, le mot ensemble n'étant pas formalisé, la notion de « classe de tous les ensembles », qui intervient dans la théorie des catégories, ne peut être introduite. L'intuition nous suggère deux idées de solution.

a) Axiomatiser la notion d'ensemble et choisir des axiomes permettant de définir l'ensemble de tous les ensembles. Malheureusement dans cette théorie nous serions amenés à abandonner presqu'en totalité le schéma de sélection et réunion [3]; il est pourtant indispensable à la construction de la plupart des notions.

b) Introduire une nouvelle notion : celle de classe, distincte de la notion d'ensemble. Naturellement dans cette théorie, les ensembles seraient des classes particulières. Nous essayons de développer cette deuxième solution.

N'ayant pas défini initialement les notions de classe et d'ensemble, nous les distinguerons en introduisant deux signes d'appartenance : le signe ε pour les classes et le signe $\in$ pour les ensembles. Nous appellerons relations classifiantes les relations qui déterminent des classes (R est classifiante s'écrit : $Clas_x\, R$).

Dans cette théorie, les classes sont des objets mathématiques au même titre que les ensembles, et non pas un simple langage comme celui introduit par Bernays [1].

2°) Choix des axiomes :

Une théorie des classes comporte 3 groupes d'axiomes. Un premier groupe concerne le signe $\in$, c'est-à-dire les ensembles, et il sera construit à partir de l'un des systèmes connus. Nous choisirons le système de Bourbaki [3]. Un second groupe concerne le signe ε, c'est-à-dire les classes. Il devra satisfaire aux conditions suivantes : d'une part toute relation collectivisante est classifiante, d'autre part la relation «X est un ensemble» est classifiante, ce qui permet de définir la classe des ensembles. Un système déduit de celui de Quine-Rosser [4] satisfait ces exigences. Le troisième groupe ne comporte qu'un axiome signifiant : tout ensemble est une classe.

$$AC \qquad (\forall X)(\forall x)\,(x \in X \Longrightarrow x \,\varepsilon X)$$

Il est possible de remplacer le système de Rosser et le système de Bourbaki par d'autres systèmes en conservant cependant AC.

3°) Construction de la théorie :

La première étude portera sur le signe ε; elle sera analogue à l'étude de la théorie des classes de Rosser [4]. Après avoir défini la notion d'ensemble, nous pourrons appliquer à ces ensembles les résultats obtenus pour les classes, et nous y ajouterons des théorèmes de la forme : « telle classe est un ensemble ». Puis nous étudierons plus particulièrement quelques techniques utilisées dans la théorie des catégories, pour connaître celles permises dans ce système d'axiomes.

2. Développement de la théorie des classes et des ensembles.

A. RELATIONS CLASSIFIANTES.

a) La théorie des classes est une théorie dans laquelle figurent les signes relationnels ε et $\in$ et le signe substantifique $\supset$.

DEFINITION 1. *La relation désignée par* $(\forall z)((z\,\varepsilon x) \Longrightarrow (z\,\varepsilon y))$ *se note* $x \subset y$.

PROPOSITION 1.

$$x \subset x$$

$$(x \subset y \text{ et } y \subset z) \Longrightarrow (x \subset z).$$

Ces résultats sont immédiats.

b) *Axiome d'extensionalité* : l'axiome d'extensionalité définit l'égalité pour les classes :

$$A_1 \qquad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in x \Longleftrightarrow z \in y) \Longrightarrow x = y.$$

PROPOSITION 2. *La relation $(\forall x)((x \in z) \Longleftrightarrow R)$ est univoque en z.*

En effet, si $(\forall x)((x \in z) \Longleftrightarrow R)$ et $(\forall x)((x \in z') \Longleftrightarrow R)$ nous avons $(\forall x)(x \in z \Longleftrightarrow x \in z')$, ce qui entraîne d'après A_1 $z = z'$.

c) *Relations classifiantes.*

DEFINITION 2. *Une relation R est classifiante en x si, y étant une lettre n'appartenant pas à R, on a :*

$$(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Longleftrightarrow R).$$

Cette relation se désigne par $Clas_x R$.

EXEMPLE. La relation $x \in y$ est classifiante en x.

En utilisant la proposition 2, il est facile de constater que si R est classifiante la relation $(\forall x)(x \in y \Longleftrightarrow R)$ est fonctionnelle en y. Nous désignerons l'objet $\tau_y(\forall x)(x \in y \Longleftrightarrow R)$ défini par cette relation par $\{x : R\}$ et on l'appellera «la classe des x tels que R». (En général le mot classe est synonyme de terme sauf dans cette expression).

Les relations ne sont pas toutes classifiantes : en particulier la relation $x \notin x$.

A_2 *Toute relation stratifiée est classifiante en chacune des lettres qu'elle contient.*

La définition de «relation stratifiée» est donnée dans l'appendice.

d) *Classe vide, classe pleine.*

Les relations $x = x$ et $x \neq x$ sont stratifiées. Elles définissent deux classes V et $\emptyset$ et nous avons les théorèmes :

$$(x \in \emptyset \Longleftrightarrow x \neq x) \qquad\qquad (\forall x)(x \notin \emptyset)$$

$$\text{et} \quad (x \in V \Longleftrightarrow x = x) \qquad \text{et} \quad (\forall x)(x \in V).$$

La relation $X \subset \emptyset$ est équivalente à $X = \emptyset$; de même la relation $V \subset X$ est équivalente à $V = X$.

La relation $(\forall x)(x \notin X)$ est fonctionnelle et

$$\emptyset = \tau_X (\forall x)(x \notin X).$$

e) *Complémentaire d'une classe.*

La relation «$x \notin A$ et $x \in X$» est stratifiée, elle est donc classifiante.

DEFINITION 3. *Soit A une partie d'une classe X, c'est-à-dire $A \subset X$; on appelle complémentaire de A par rapport à X, et on désigne par $\complement_X A$, la classe*

$$\{x : x \notin A \text{ et } x \in X\}.$$

Si A est une partie de X, nous avons immédiatement

$$\complement_X \complement_X A = A \qquad \complement_X X = \emptyset, \complement_X \emptyset = X,$$
$$(B \subset A) \Longleftrightarrow \complement_X A \subset \complement_X B.$$

f) *Classe à un élément, à deux éléments.*

La relation $z = x$ ou $z = y$ est stratifiée. La classe des z définie par cette relation s'appelle classe à deux éléments si $x \neq y$ et classe à un élément si $x = y$.

B. *COUPLES.*

a) *Axiome du couple.*

On désigne généralement par (T, U) le terme $\supset T U$ construit en utilisant le signe substantifique $\supset$ et les termes T et U.

A_3 $\quad (\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')(((x, y) = (x', y')) \Longleftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y'))$.

La relation $(x, y) = (x', y')$ est alors équivalente à « $(x = x')$ et $(y = y')$ ».

La relation «$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$» se lit «$z$ est un couple».

Si z est un couple, il résulte de A_3 que la relation $(\exists y)(z = (x, y))$ est fonctionnelle en x. L'objet correspondant $\tau_x((\exists y)(z = (x, y))$ se désigne par $pr_1 z$. De même

$$pr_2 z = \tau_y((\exists x)(z = (x, y)).$$

b) *Produit de deux classes.*

THEOREME 1. *La relation $(\exists x)(\exists y)(z = (x,y)$ et $x \in X$ et $y \in Y)$ est classifiante en z.*

En effet, elle est stratifiée par les indices :

x 1	X 2
y 1	Y 2
z 1	

DEFINITION 1. *Etant données deux classes X et Y, la classe*

$$\{z : (\exists x)(\exists y)(z = (x,y) \text{ et } x \in X \text{ et } y \in Y)\}$$

s'appelle le produit de X et Y et se désigne par $X \times Y$.

PROPOSITION 1. *Si A' et B' sont des classes non-vides, la relation $A' \times B' \subset A \times B$ est équivalente à $A' \subset A$ et $B' \subset B$. D'autre part, la relation $A' = \emptyset$ ou $B' = \emptyset$ est équivalente à $A' \times B' = \emptyset$.*

C. REUNION ET INTERSECTION.

a) Soit C une classe. La relation $(\exists a)(x \in a \text{ et } a \in C)$ est stratifiée. Elle est donc classifiante.

DEFINITION 1. *La classe* $\{x : (\exists a)(x \in a \text{ et } a \in C)\}$ *s'appelle réunion des éléments de* C *et se désigne par* $\bigcup_{a \in C} a$ *ou* $\cup C$.

De la même manière, la relation $(\forall a)(a \in C \Longrightarrow x \in a)$ est stratifiée.

DEFINITION 2. *La classe* $\{x : (\forall a)(a \in C \Longrightarrow x \in a)\}$ *s'appelle intersection des éléments de* C *et se désigne par* $\bigcap_{a \in C} a$ *ou* $\cap C$.

$(\exists a)(x \in a \text{ et } a \in \emptyset)$ est fausse, donc $\cup\emptyset = \emptyset$; au contraire, $a \in \emptyset$ étant fausse, la relation $a \in \emptyset \Longrightarrow x \in a$ est vraie et $\cap\emptyset = V$. Si la relation $y = A(x)$ et $x \in C$ où A est un terme est classifiante en y, la réunion et l'intersection des éléments de la classe correspondante sont désignées par :

$$\bigcup_{x \in C} A(x) \qquad \bigcap_{x \in C} A(x).$$

b) *Propriétés.*

PROPOSITION 1. *Si* X *est la réunion des éléments de* Y : $X = \bigcup_{y \in Y} y$; *nous avons les deux formules*

$$\bigcup_{x \in X} x = \bigcup_{y \in Y} (\cup y)$$

$$\bigcap_{x \in X} x = \bigcap_{y \in Y} (\cap y).$$

C'est la propriété d'associativité de l'intersection et de la réunion.

PROPOSITION 2. *Si les éléments de* X *sont des parties d'une classe* C, *nous avons*

$$\complement_C \Big(\bigcup_{x \in X} x\Big) = \bigcap_{x \in X} \complement_C x$$

$$\complement_C \Big(\bigcap_{x \in X} x\Big) = \bigcup_{x \in X} \complement_C x.$$

c) *Recouvrements, partitions.*

DEFINITION 3. X *est un recouvrement de* E, *si* $E \subset \cup X$.

DEFINITION 4. *Deux classes sont disjointes si leur intersection est vide.*

DEFINITION 5. *Un recouvrement* X *de* C *est une partition, si tout couple* x_1 *et* x_2 *d'éléments distincts de* X *sont disjoints, si* $\emptyset \notin X$ *et si tous les éléments de* X *sont des parties de* C.

D. CORRESPONDANCE.

1°) *Graphe - Correspondance.*

DEFINITION 1. *G est un graphe si tout élément de G est un couple, c'est-à-dire si*

$$(\forall z)(z \in G \Longrightarrow (z \text{ est un couple})).$$

Soit $R(x, y)$ une relation ; la relation

$$(\exists G)(G \text{ est un graphe et } (\forall x)(\forall y)(R \Longleftrightarrow ((x, y) \in G)))$$

s'énonce «R admet un graphe en x et y». Le graphe G est uniquement déterminé dans ce cas et s'appelle le graphe de R.

PROPOSITION 1. *Si R est une relation stratifiée ayant même indice de stratification pour x et y, R admet un graphe en x et y.*

Cela résulte immédiatement de A_2.

Si G est un graphe, la relation $(\exists y)((x, y) \in G)$ étant stratifiée est classifiante, $pr_1 G$ désigne la classe correspondante; de même $pr_2(G) = \{y ; (\exists x)((x, y) \in G)\}$. Il est facile de démontrer que $G \subset pr_1 G \times pr_2 G$.

Tout graphe est donc une partie d'un produit et réciproquement.

DEFINITION 2. *Une correspondance entre une classe A et une classe B est un triplet $\Gamma = (G, A, B)$ où G est un graphe tel que $pr_1 G \subset A$ et $pr_2 G \subset B$.*

2°) *Correspondance réciproque, composée de deux correspondances.*

La relation «$(y, x) \in G$ et $z = (x, y)$» étant stratifiée est classifiante; la relation $(y, x) \in G$ admet donc un graphe $\overset{-1}{G}$ appelé graphe réciproque de G. Il est évident que G est le graphe réciproque de $\overset{-1}{G}$ et que $pr_1 \overset{-1}{G} = pr_2 G$ et $pr_2 \overset{-1}{G} = pr_1 G$. Si $\Gamma = (G, A, B)$ est une correspondance, le triplet $\overset{-1}{\Gamma} = (\overset{-1}{G}, B, A)$ est aussi une correspondance appelée correspondance réciproque de Γ.

De même la relation $(\exists y)((x, y) \in G$ et $(y, z) \in G')$ admet un graphe $G' \circ G$. Si $\Gamma = (G, A, B)$ et $\Gamma' = (G', B, C)$ sont des correspondances, $\Gamma' \circ \Gamma = (G' \circ G, A, C)$ est aussi une correspondance appelée composée de Γ et de Γ'.

PROPOSITION 2. *Si G et G' sont deux graphes, le graphe réciproque de $G' \circ G$ est $\overset{-1}{G} \circ \overset{-1}{G'}$.*

PROPOSITION 3. *Soient G_1, G_2, G_3 trois graphes. Nous avons alors*

$$(G_1 \circ G_2) \circ G_3 = G_1 \circ (G_2 \circ G_3).$$

La relation $x = y$ et $x \in A$ admet un graphe d'après la proposition 1. Son graphe Δ_A est contenu dans $A \times A$ et s'appelle la diagonale de A. La correspondance identique de A est par définition $(\Delta_A, A, A) = I_A$. Si Γ est une correspondance entre A et B, nous avons $\Gamma \circ I_A = I_B \circ \Gamma = \Gamma$.

3°) *Fonctions.*

DEFINITION 3. *Un graphe F est fonctionnel si pour tout x il existe au plus un y tel que $(x, y) \in F$. Une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si F est un graphe fonctionnel et si $pr_1 F = A$.*

La relation $(x, y) \in F$ et $x \in A$ est alors fonctionnelle en y : l'objet unique défini par cette relation est la valeur de f en x et se désigne par $f(x)$. Autrement dit, la relation $y = f(x)$ est équivalente à $(x, y) \in F$ si x est un élément de A.

4°) *Composée de deux fonctions; fonction réciproque.*

PROPOSITION 4. *Si f est une application de A dans B et g une application de B dans C, $g \circ f$ est une application de A dans C, et $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

La démonstration est immédiate.

DEFINITION 4. *Soit f une application de A dans B. f est une injection si deux éléments distincts de A ont deux images distinctes par f. f est une surjection si pour tout élément y de B il existe un élément x de A tel que $y = f(x)$. f est dite bijective si elle est à la fois surjective et injective.*

EXEMPLES. 1) Si $A \subset B$, l'application de A dans B dont le graphe est la diagonale de A est injective.

2) Si G est un graphe, l'application pr_1, de G dans $pr_1 G$ qui à z fait correspondre $pr_1 z$, est surjective.

PROPOSITION 5. *Soit f une application de A dans B. Pour que la correspondance $\overset{-1}{f}$ soit une fonction, il faut et il suffit que f soit bijective.*

En effet, $\overset{-1}{F}$ est fonctionnel, si et seulement si f est injective et $pr_1 \overset{-1}{F} = B$ si, et seulement si f est surjective.

$\overset{-1}{f}$ est appelée application réciproque de f et nous avons

$$f \circ \overset{-1}{f} = I_B \quad \text{et} \quad \overset{-1}{f} \circ f = I_A .$$

Dans certains cas, une fonction s'appelle aussi une famille : la classe de départ s'appelle alors des indices et la classe des valeurs s'appelle classe des objets de la famille. On emploie alors la notation f_x pour $f(x)$. Le mot fonction a d'autres synonymes : application, transformation.

EXEMPLES. 1) La classe vide est un graphe fonctionnel; la fonction $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ est la fonction vide.

2) Soit A une classe; la correspondance identique est une fonction appelée application identique de A. Ainsi à toute classe il est possible d'associer une famille

constituée par l'application identique de A, dont A est la classe des indices et la classe des objets.

REMARQUE. En mathématiques, une fonction est souvent définie par un terme $y = T(x)$ avec $x \in A$. Malheureusement la relation «$y = T(x)$ et $x \in A$» n'admet pas toujours un graphe, et la fonction correspondante n'existe pas.

EXEMPLE. Considérons la relation «$y = \{x\}$ et $x \in V$» et supposons qu'elle admette un graphe G. La relation $y \not\subset x$ admet un graphe G' d'après la proposition 1. L'intersection de G et G' est aussi un graphe : c'est l'ensemble des couples (x, y) tel que $y = \{x\}$ et $y \not\subset x$. La première projection de ce graphe est

$$\{x : \{x\} \not\subset x\} = \{x : x \notin x\}$$

ce qui entraîne une contradiction.

Dans le cas où «$y = T(x)$ et $x \in A$» admet un graphe, le graphe est fonctionnel et la première projection est A. Ce cas est réalisé si $T(x)$ est stratifié avec le même indice pour y et T.

5°) *Rétractions et sections.*

PROPOSITION 6. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de A (resp. $A \neq \emptyset$) dans B soit surjective (resp. injective), est qu'il existe une application s (resp. r) de B dans A, telle que $f \circ s$ (resp. $r \circ f$) soit l'application identique de B (resp. A).*

Si f est surjective, la relation $z = \tau_y\,(y \in A$ et $f(y) = x)$ est stratifiée avec le même indice pour x et z. Donc la fonction qui à x fait correspondre $\tau_y\,(y \in A$ et $f(y) = x)$, est définie, et satisfait aux conditions de l'énoncé.

Réciproquement, s'il existe s tel que $f \circ s = I_B$, pour tout $y \in B$ il existe alors $x = s(y)$, tel que $f(x) = y$.

Si $A \neq \emptyset$, désignons par a, un élément de A. La relation

$$(y \in A \text{ et } x = f(y)) \text{ ou } (y = a \text{ et } (\forall z)(z \in A \Longrightarrow x \neq f(z))$$

admet un graphe. Ce graphe est fonctionnel si f est injective, et il satisfait aux conditions de l'énoncé.

Réciproquement si $f(x) = f(y)$, nous avons

$$x = r \circ f(x) = r \circ f(y) = y.$$

COROLLAIRE. *Soient A et B deux classes, f une application de A dans B, et g une application de B dans A; Si $g \circ f$ est l'application identique de A et $f \circ g$ l'application identique de B, f et g sont des bijections et $g = \overset{-1}{f}$.*

E. CLASSES DES PARTIES, CLASSES DES APPLICATIONS.

1°) *Classe des parties.*

La relation $X \subset Y$ est stratifiée. D'où la définition 1.

DEFINITION 1. *La classe des parties de Y est la classe :*

$$\mathcal{P}(Y) = \{ X : X \subset Y \} .$$

Etant donnée une application f de A dans B, et une partie X de A, la relation $(\exists x)(x \in X \text{ et } f(x) = y)$ est stratifiée. Nous pouvons écrire :

$$Y = \{ y : (\exists x)(x \in X \text{ et } f(x) = y) \} .$$

Cette relation est aussi stratifiée avec le même indice de stratification pour X et Y. L'application $\hat{f}$, qui à X fait correspondre Y, est donc bien définie : c'est l'extension de f aux parties.

De même, nous définirons l'extension réciproque $\hat{f}^{-1}$ de f aux parties, qui à $Y \subset B$ fait correspondre $X = \{ x : f(x) \in Y \}$.

Si f est une application de A dans B, et g une application de B dans C, les relations $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$ et de même $\hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1} = \widehat{g \circ f}^{-1}$ sont vraies. On en déduit, que si f est une injection, (resp. surjection) $\hat{f}$ est aussi une injection (resp. surjection) et $\hat{f}$ une surjection (resp. injection) (paragraphe D, proposition 6).

2°) *Classe des applications d'une classe dans une classe.*

La relation $G \subset E \times F$ et $(((x, y) \in G \text{ et } (x, y') \in G) \Longrightarrow y = y')$ est stratifiée; la classe correspondante est la classe F^E des graphes d'applications de E dans F.

Nous pourrons aussi définir la classe $\mathcal{F}(E, F)$ des applications (G, E, F), où $G \in F^E$. L'application $G \to (G, E, F)$ de F^E dans $\mathcal{F}(E, F)$ est une bijection.

F. RELATION D'EQUIVALENCE.

1°) *Définition d'une relation d'équivalence.*

Une relation $R(x, y)$ est une relation d'équivalence par rapport aux lettres x et y, si elle possède les deux propriétés suivantes :

- *elle est symétrique, c'est-à-dire $R(x, y) \Longrightarrow R(y, x)$*
- *elle est transitive, c'est-à-dire $R(x, y)$ et $R(y, z) \Longrightarrow R(x, z)$.*

Si R est symétrique $R(x, y) \Longleftrightarrow R(y, x)$.

Si R est une relation d'équivalence, nous avons $R(x, y) \Longrightarrow R(x, x)$ et $R(y, y)$.

On dit que R est réflexive dans E, si $R(x, x)$ est équivalent à $x \in E$. Une relation d'équivalence réflexive dans E, s'appelle une relation d'équivalence dans E.

2°) *Classe d'équivalence, classe quotient.*

Si la relation $R(x, y)$ est classifiante en x, la classe correspondante s'appelle classe d'équivalence de y. Si R est réflexive dans E et $y \in E$, la classe d'équivalence de y contient y. Dans le cas général, si la classe d'équivalence ne contient pas y, elle est vide.

Soit R une relation d'équivalence dans E. Si pour tout y, la relation $R(x,y)$ est classifiante en x, et si

$$(\exists y)(z = \{x : R(x,y)\} \text{ et } y \in E)$$

est classifiante en z, la classe correspondante s'appelle classe quotient de E par la relation R. C'est la classe des classes d'équivalence, désignée par E/R.

PROPOSITION 1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une classe quotient, est que la relation d'équivalence admette un graphe dans* E.

En effet si $R(x,y)$ admet un graphe G,

$$R(x,y) \text{ et } (x,y) \in E \times E \Longleftrightarrow (x,y) \in G.$$

La relation $(x,y) \in G$ est classifiante en x. D'autre part la relation :

$$(\exists y)(z = \{x : (x,y) \in G\} \text{ et } y \in E)$$

est stratifiée donc classifiante en z.

Réciproquement, si E/R existe, considérons $G = \bigcup_{X \in E/R} X \times X$ (cette réunion existe car «$y = X \times X$ et $X \in E/R$» est stratifiée) : c'est le graphe de R. En effet,

$$R(x,y) \Longrightarrow (\exists X)(X \in E/R \text{ et } x \in X \text{ et } y \in X) \Longrightarrow (x,y) \in X \times X \Longrightarrow (x,y) \in G$$

et réciproquement :

$$(x,y) \in G \Longrightarrow (\exists X)(x \in X \text{ et } y \in X) \Longrightarrow R(x,y).$$

G. RELATION D'ORDRE. CARDINAUX.

1°) *Relation d'ordre.*

DEFINITION 1. *Une relation* $R(x,y)$ *est une relation d'ordre si :*

$$R(x,y) \text{ et } R(y,z) \Longrightarrow R(x,z)$$

$$R(x,y) \text{ et } R(y,x) \Longrightarrow x = y$$

$$\text{et} \qquad R(x,y) \Longrightarrow R(x,x) \text{ et } R(y,y).$$

Une relation d'ordre réflexive dans E, *s'appelle relation d'ordre dans* E.

2°) *Cardinaux.*

Considérons la relation :

(1) Il existe une bijection entre X et Y.

Cette relation admet un graphe. D'autre part, c'est une relation d'équivalence réflexive dans V. Nous pouvons donc considérer le quotient de V par cette relation : ce sera la classe des cardinaux. Le cardinal de X sera la classe d'équivalence de X pour cette relation d'équivalence, et sera désigné par *Card*(X). La relation (1) se lit alors : «X et Y ont le même cardinal».

THEOREME DE BERNSTEIN. *S'il existe une injection f d'une classe A dans une classe B, et une injection g de B dans A, il existe une bijection de A dans B.*

La démonstration ne diffère pas de celle faite dans la théorie classique des ensembles.

3°) *Relation d'ordre entre les cardinaux.*

La relation :

$$(\exists X)(\exists Y)(Card(X) = x \text{ et } Card(Y) = y \text{ et } X \subset Y)$$

est une relation d'ordre dans la classe des cardinaux. Désignons-la par $x \leq y$. Elle est transitive : en effet, si $x \leq y$, il existe un X et un Y tels que $X \subset Y$, $Card(X) = x$ et $Card(Y) = y$. D'autre part, si $y \leq z$, il existe un Y' et un Z tels que $Y' \subset Z$, $Card(Y') = Card(Y)$ et $Card(Z) = z$. Il existe donc une bijection entre Y' et Y, qui définit par restriction une bijection entre $X \subset Y$ et $X' \subset Y'$. X' est contenu dans Z, $Card(Z) = z$ et $Card(X) = x$, ce qui achève la démonstration.

- Elle est antisymétrique d'après le théorème de Bernstein.

- Elle est réflexive dans la classe des cardinaux; en effet, pour toute classe, l'application identique est une bijection.

4°) *Paradoxe de Cantor.*

Dans la théorie des ensembles, la démonstration du théorème de Cantor (pour un ensemble quelconque, $\mathcal{P}(X)$ a un cardinal strictement plus grand que X) nécessite l'utilisation de l'application $x \to \{x\}$. Dans la théorie des classes, cette application n'est pas définie pour toutes les classes; il n'y a donc pas de contradiction à priori à affirmer que *Card*(V) est le plus grand cardinal.

H. SOMME DIRECTE. PRODUIT DIRECT.

DEFINITION 1. *Soit X_i $(i \in I)$ une famille de classes. On dira que cette famille admet un produit direct (resp. somme directe), s'il existe une classe $\mathcal{C}$ et une famille d'applications f_i de $\mathcal{C}$ dans X_i (resp. de X_i dans $\mathcal{C}$), telles que pour toute famille d'applications g_i d'une classe $\mathcal{C}'$ dans X_i (resp. de X_i dans $\mathcal{C}'$), il existe une et une seule application g de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ (resp. de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$) telle que $g_i = f_i \circ g$ (resp. $g_i = g \circ f_i$). $(f_i, \mathcal{C})$ s'appelle produit direct (resp. somme directe) de la famille X_i.*

PROPOSITION 1. *Si $(f_i, \mathcal{C})$ et $(f'_i, \mathcal{C}')$ sont produits directs (resp. sommes directes) d'une famille X_i, il existe une bijection h de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ telle que $f'_i \circ h = f_i$ (resp. $h \circ f_i = f'_i$).*

Démontrons le par exemple dans le cas du produit direct.

D'après la définition 1, il existe une application g de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ (resp. g' de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$) telle que $f_i = f'_i \circ g$ (resp. $f'_i = f_i \circ g'$). Donc $f'_i = f'_i \circ g \circ g'$ et $f_i = f_i \circ g' \circ g$.

Comparons les relations à $f'_i = f'_i \circ I_{\mathcal{C}'}$ et $f_i = f_i \circ I_{\mathcal{C}}$. L'unicité de la fonction, intervenant dans la définition 1, montre alors que $g \circ g' = I_{\mathcal{C}'}$ et $g' \circ g = I_{\mathcal{C}}$.

PROPOSITION 2. *Soit X_i une famille de classes (resp. de classes non vides) admettant $(f_i, \mathcal{C})$ comme somme directe (resp. produit direct). Les applications f_i sont des injections (resp. surjections).*

Supposons que $(f_i, \mathcal{C})$ est somme directe de la famille X_i. Si X_i est une classe vide, f_i est évidemment une injection (c'est la fonction vide). Supposons donc X_i non vide et considérons les applications g_j de X_j dans X_i définies par :

$$g_j(x) = \tau_y(y \in X_i) \text{ pour } i \neq j \text{ et } g_i = I_{X_i},$$

ou encore si G_j désigne le graphe de g_j, par :

$$G_j = X_j \times \{\tau_y(y \in X_i)\} \text{ pour } i \neq j \text{ et } G_j = \Delta_{X_i} \text{ pour } i = j.$$

Cette relation est stratifiée avec le même indice pour G_j et j. Les fonctions g_j forment donc une famille. Il existe alors une fonction g telle que $g_j = g \circ f_j$ et en particulier $I_{X_i} = g \circ f_i$; ce qui démontre que f_i est une injection (§ D proposition 6).

De même si $(f_i, \mathcal{C})$ est produit direct des X_i non vides, considérons la famille d'application g_j de X_i dans X_j définies par

$$g_j(x) = \tau_y(y \in X_j) \text{ pour } i \neq j \text{ et } g_i = I_{X_i}.$$

Il existe alors une fonction g telle que $g_j = f_j \circ g$ et en particulier $I_{X_i} = f_i \circ g$; f_i est donc une injection.

PROPOSITION 3. *Soit X_i une famille admettant $(f_i, \mathcal{C})$ comme produit direct. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}$ soit vide est que l'un des X_i soit vide.*

En effet, si $\mathcal{C}$ n'est pas vide, $f_i(\tau_x(x \in \mathcal{C}))$ est un élément de X_i.

Réciproquement, si X_i n'est pas vide, les applications f_i sont des surjections donc $f_i(\mathcal{C}) = X_i$ et $\mathcal{C}$ n'est pas vide.

PROPOSITION 4. *Si $X_i(i \in I)$ est une famille admettant $(f_i, \mathcal{C})$ comme somme directe, la famille $f_i(X_i)$ forme une partition de $\mathcal{C}$.*

Réciproquement, si f_i est une famille d'injections de X_i dans $\mathcal{C}$ et que $f_i(X_i)$ forment une partition de $\mathcal{C}$, la famille X_i a pour somme directe $(f_i, \mathcal{C})$.

En effet, supposons $f_i(X_i) \cap f_j(X_j) \neq \emptyset$; soit y un élément de cette intersection et soient x_i et x_j les éléments tels que $f_i(x_i) = f_j(x_j) = y$. Considérons alors la classe à deux éléments $\{(y, i), (y, j)\}$ et la famille d'applications g_k définie par les relations stratifiées :

$$g_j(X_j) = \{(y, j)\}$$

$$g_k(X_k) = \{(y, i)\} \text{ pour } k \neq j.$$

Appliquons la définition 1 : il existe une application g telle que $g_k = g \circ f_k$. En particulier nous aurons les deux relations :

$$g_i(x_i) = g \circ f_i(x_i) = g(y) = (y, i)$$

$$g_j(x_j) = g \circ f_j(x_j) = g(y) = (y, j).$$

Ces égalités ne sont vérifiées que si $i = j$.

Réciproquement, soit g_i une famille d'applications de X_i dans $\mathcal{C}'$. Considérons l'application g de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ définie par la réunion des graphes

$$G_i = \{(x, g_i(\tau_y(f_i(y) = x)))\}.$$

g satisfait à la définition 1.

COROLLAIRE. *Soit une famille* X_i *de somme directe* $(f_i, \mathcal{C})$ *telle que* $X_i \neq \emptyset$ *pour* $i \varepsilon J$. *La famille* X_i $(i \varepsilon Cj)$ *est alors somme directe de* $(f_i, \mathcal{C})$.

En effet, $f_i(X_i)$ $(i \varepsilon CJ)$ forment une partition de $\mathcal{C}$ et les applications f_i sont des injections.

I. CLASSE DES ENSEMBLES.

1°) Le signe $\in$ a la même signification intuitive que ε mais s'applique seulement aux ensembles. Il est souhaitable que les ensembles soient des classes particulières, pour cela introduisons l'axiome :

$$A_4 \qquad (\forall x)(\forall X)(x \in X \Longrightarrow x \varepsilon X).$$

La relation «$x \varepsilon X \Longrightarrow x \in X$» est stratifiée.

DEFINITION 1. *La classe des ensembles est la classe :*

$$\mathfrak{S} = \{X : (\forall x)(x \varepsilon X \Longrightarrow x \in X)\}.$$

Un élément de cette classe s'appelle un ensemble.

EXEMPLE. $\emptyset \varepsilon \mathfrak{S}$: en effet $x \varepsilon \emptyset$ est fausse, donc $x \varepsilon \emptyset \Longrightarrow x \in \emptyset$ est vraie.

Si X est un ensemble $x \varepsilon X \Longleftrightarrow x \in X$ d'après A_4.

PROPOSITION 1. *Si* X *et* Y *sont des ensembles*

$$(\forall x)(x \in X \Longleftrightarrow x \in Y) \Longrightarrow X = Y.$$

En effet, $x \in X \Longleftrightarrow x \varepsilon X$ et $x \in Y \Longleftrightarrow x \varepsilon Y$; donc, d'après l'axiome A_1, $X = Y$.

PROPOSITION 2. *Si* X *est un ensemble*

$$(\forall x)(x \in X \Longleftrightarrow x \varepsilon Y) \Longrightarrow X = Y.$$

En effet, $x \in X \Longleftrightarrow x \,\varepsilon\, X$ et d'après A_1, $X = Y$.

REMARQUE. La relation $x \in X \Longleftrightarrow x \,\varepsilon\, Y$ peut être vérifiée sans que X soit égal à Y. Par exemple : $x \in V$ est une relation classifiante. Si V était la classe correspondante, V serait un ensemble. Nous verrons que cela est impossible. La classe $Y = \{x, x \in V\}$ satisfait donc à $x \in V \Longleftrightarrow x \,\varepsilon\, Y$, bien que Y soit différent de V.

2°) Relations collectivisantes.

DEFINITION 2. *Une relation R est collectivisante en x si R est classifiante en x et si la classe correspondante est un ensemble. La relation R est collectivisante en x x s'écrira $coll_x\, R$.*

PROPOSITION 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que R soit une relation collectivisante en x, est que la relation*

$$(\exists X)((\forall x)(x \in X \Longleftrightarrow R) \text{ et } X \,\varepsilon\, \mathfrak{E})$$

soit vraie.

En effet, si $X \,\varepsilon\, \mathfrak{E}$, $x \in X$ est équivalent à $x \,\varepsilon\, X$.

EXEMPLES. 1) La relation $x \in y$ et $y \,\varepsilon\, \mathfrak{E}$ est évidemment collectivisante en x.

2) La relation $x \notin x$ et $x \,\varepsilon\, \mathfrak{E}$ n'est pas collectivisante.

Supposons qu'elle le soit, et désignons par a l'ensemble correspondant. Nous aurions $(\forall x)(x \notin x \Longleftrightarrow x \in a)$, et en prenant $x = a$

$$a \notin a \Longleftrightarrow a \in a$$

qui est évidemment contradictoire.

PROPOSITION 4. *Si R est une relation collectivisante, la relation $(\forall x)((x \in X) \Longleftrightarrow R$ et $X \,\varepsilon\, \mathfrak{E})$ est fonctionnelle en x, et*

$$[\{x : R\} = \tau_X (\forall x)(x \in X) \Longleftrightarrow R)] .$$

En effet, d'après la proposition 3,

$$(\exists X)((\forall x)((x \in X) \Longleftrightarrow R) \text{ et } X \,\varepsilon\, \mathfrak{E}).$$

D'autre part, la proposition 1 montre que la relation

$$(\forall x)(x \in X \Longleftrightarrow R)$$

est univoque en X, quand $X \,\varepsilon\, \mathfrak{E}$.

Enfin $\{x : R\}$ est un ensemble, donc $x \in \{x : R\} \Longleftrightarrow R$, de même

$$x \in \tau_X (\forall x)((x \in X) \Longleftrightarrow R.$$

3°) Axiome de l'ensemble à deux éléments

A_5 $\quad (\forall x)(\forall y)(\{z : z = x \text{ ou } z = y\} \, \varepsilon \mathfrak{E})$.

Les classes à deux éléments sont donc des ensembles. De plus, l'axiome A_5 montre que les classes à un élément (obtenues en posant $x = y$) appartiennent aussi à $\mathfrak{E}$.

4°) Schéma de sélection et réunion.

S_1 $\quad (\forall y)(\exists X)((\forall x)(R \Longrightarrow x \in X) \text{ et } X \, \varepsilon \mathfrak{E}$

$\Longrightarrow (\forall Y)(Y \, \varepsilon \mathfrak{E} \Longrightarrow coll_X((\exists y)((y \in Y) \text{ et } R)))$.

PROPOSITION 5. *Soient P une relation, A un ensemble. La relation :*

$$P \text{ et } x \in A$$

est collectivisante en x.

Désignons par R la relation «P et $x = y$».

$(\forall x)(R \Longrightarrow (x \in \{y\}))$ est vraie. $\{y\}$ étant un ensemble, l'axiome S_1 appliqué à la relation R, pour $X = \{y\}$ et $Y = A$, donne :

$$coll_X((\exists y)(y \in A \text{ et } P \text{ et } x = y)).$$

Ainsi la relation P et $x \in A$, équivalente à $(\exists y)(y \in A \text{ et } P \text{ et } x = y)$, est collectivisante en x.

REMARQUE. $V \notin \mathfrak{E}$; en effet, dans le cas contraire, toute relation $R(x)$ serait collectivisante d'après la proposition 5.

PROPOSITION 6. *Soient T un terme et A un ensemble; la relation $(\exists x)(y = T$ et $x \in A)$ est collectivisante.*

Soit R la relation $y = T$. La relation $(\forall y)(R \Longrightarrow y \in \{T\})$ est vraie, et le résultat est obtenu en appliquant S_1 pour $Y = A$.

PROPOSITION 7. *Si X est un ensemble et si $Y \subset X$, Y est aussi un ensemble.*

En effet, nous avons $x \, \varepsilon Y \Longrightarrow x \, \varepsilon X \Longrightarrow x \in X$. La relation $x \, \varepsilon Y$ et $x \in X$, qui est équivalente à $x \, \varepsilon Y$, est collectivisante d'après la proposition 5. Il existe donc $Z \, \varepsilon \mathfrak{E}$ tel que $x \, \varepsilon Y \Longleftrightarrow x \in Z$, et Y, égal à Z, est élément de $\mathfrak{E}$.

Conséquence immédiate : si A est un ensemble et si $X \subset A$, $C_A X \subset A$ est aussi un ensemble.

PROPOSITION 8. *Si X et Y sont deux ensembles $X \times Y$ est aussi un ensemble.*

En utilisant la proposition 6, la relation $z = (x, y)$ et $x \in X$ est collectivisante en z et définit un ensemble A_y.

Le schéma S_1, appliqué à $z \in A_y$, montre que :

$$(\exists y)((y \in Y) \text{ et } z \in A_y)$$

est collectivisante en x. Or cette relation est équivalente à $z=(x,y)$ et $(\exists x)(\exists y)$ $(y \in Y$ et $x \in X)$, ou encore à $z=(x,y)$ et $(\exists x)(\exists y)(y \in Y$ et $x \in X)$, X et Y étant des ensembles.

PROPOSITION 9. *Si A est un ensemble et si $A \subset \mathfrak{S}$, $\bigcup_{a \in A} a$ est aussi un ensemble.*

Si $A \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset$, $\cap A$ est un ensemble.

En prenant pour $R : x \in a$, nous avons : $(\forall x)(R \Longrightarrow x \in a)$. S_1 appliqué à R montre alors la première partie. La deuxième partie est imédiate : en effet, si $x \in A \cap \mathfrak{S}$, $\cap A \subset x$.

5) Correspondance.

PROPOSITION 10. *Si un graphe G est un ensemble, $pr_1 G$ et $pr_2 G$ sont des ensembles, ainsi que le graphe réciproque $\overset{-1}{G}$. Le composé de deux graphes qui sont des ensembles est un ensemble.*

La relation $(\exists y)((x,y) \in G)$ peut encore s'écrire $(\exists z)(x = pr_1 z$ et $z \in G)$, qui est collectivisante d'après la proposition 6.

D'autre part, $pr_1 G = pr_2 \overset{-1}{G}$ est un ensemble ainsi que $pr_2\, G = pr_1 \overset{-1}{G}$ et $\overset{-1}{G} \subset pr_1 G \times pr_2\, G$.

Enfin $pr_1 G' \circ G \subset pr_1 G$ et $pr_2\, G' \circ G \subset pr_2\, G'$.

PROPOSITION 11. *Si f est une fonction de graphe F et $pr_1 F$ un ensemble, F est un ensemble.*

En effet, $F = \{z : (\exists x)(z = (x, f(x))$ et $x \in F)\}$ qui est un ensemble d'après la proposition 6.

PROPOSITION 12. *Soient A un ensemble et T un terme, la relation «$x \in A$ et $y = T$» admet un graphe en (x,y), et ce graphe est fonctionnel.*

La relation $x \in A$ et $z=(x,T)$ est collectivisante d'après la proposition 6, et d'autre part, $x \in A$ et $y = T$ est fonctionnelle en y.

Si f est une application de A dans B et si X est un ensemble contenu dans A, $\hat{f}(X)$ est un ensemble.

D'après la proposition 6, $(\exists x)(x \in X$ et $f(x) = y)$ est collectivisante.

6) Relation d'équivalence dans un ensemble.

PROPOSITION 13. *Pour toute relation d'équivalence dans un ensemble E il existe une classe quotient qui est un ensemble.*

D'après la proposition 1 du § F, il suffit que $R(x,y)$ admette un graphe dans E, ce qui est toujours le cas d'après la proposition 5.

D'autre part, il existe une application de E dans $\frac{E}{R}$, qui à x fait correspondre la classe d'équivalence (proposition 12). D'après la proposition 11, $\frac{E}{R}$ est un ensemble.

7) Ensemble des parties d'un ensemble.

$$A_5 \qquad (X \in \mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{P}(X) \in \mathfrak{S})$$

PROPOSITION 14. *Pour que $\mathfrak{P}(X)$ soit un ensemble, il faut et il suffit que X soit un ensemble.*

La condition est nécessaire d'après A_5.

La condition est suffisante. En effet, si $X \in X$, $\{x\}$ est élément de $\mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{P}(X)$ contient $Y = \{y; (\exists x)(x \in X \text{ et } y = \{x\}\}$, qui est donc un ensemble. Enfin, $\cup Y = X$ est un ensemble d'après la proposition 9.

8) Produit et somme d'une famille d'ensembles.

PROPOSITION 15. *Une famille X_i d'ensembles dont la classe d'indice I est un ensemble, admet une somme et un produit.*

En effet, le produit est alors l'ensemble des applications f de I dans $\cup X_i$ tel que $f(i) \in X_i$, les f_i étant définies par $f_i(f) = f(i)$.

La somme est la réunion des produits $X_i \times \{i\}$, les applications f_i étant les premières projections.

3. Application au langage des catégories.

Ce qui fait la difficulté logique du langage des catégories, est l'utilisation d'expression de la forme : catégorie des ensembles, catégories des groupes, où des « classes », classe des ensembles, classe des groupes, sont considérées sans que le mot classe ait une définition précise. Ce mot maintenant peut prendre le sens du paragraphe précédent, et il reste à vérifier que tous les objets considérés habituellement, entrent dans le cadre que nous venons de construire.

A chaque fois qu'est introduite la définition d'une nouvelle classe, il faut vérifier que la relation considérée dans cette définition est bien classifiante. En particulier il ne suffit pas de définir une fonction par un terme, il faut encore vérifier que le graphe de cette fonction existe bien. Ces démonstrations sont le plus souvent immédiates; nous donnons ci-dessous un exemple d'objet contradictoire, c'est-à-dire un objet dont la définition suppose un axiome contradictoire.

X étant donné, désignons par $\gamma(X)$ le graphe de l'application de X dans $\mathfrak{P}(X)$ qui à chaque élément x de X fait correspondre $\{x\}$. L'application $X \to \gamma(X)$ pour X élément de $\mathfrak{S}$ est contradictoire. La contradiction est amenée par l'axiome implicite

$$(1) \qquad \mathrm{Class}_y \ (\exists X)(y = (X, \gamma(X)) \text{ et } X \in \mathfrak{S}).$$

Désignons par V' la classe $\{z : (\exists y)(z = \{y\} \text{ et } y \in V)\}$ et par G le graphe de l'application contradictoire. V' est contenu dans $\mathfrak{S}$; les éléments de V' étant de la forme $\{y\}$, $\gamma(z)$ se réduit à $\{(y, \gamma(y)\}$. L'une des conséquences de l'axiome (1), est:

$$Class_t(\exists z)((z,t) \varepsilon G \text{ et } z \varepsilon V').$$

Considérons donc $\bigcup_{x \varepsilon V'} \gamma(x)$; c'est le graphe de l'application de $y \to \{y\}$ où $y \varepsilon V$; nous avons montré qu'elle était contradictoire.

Appendice.

RELATION STRATIFIEE.

Pour les démonstrations métamathématiques de cet appendice, nous sommes obligés d'écrire les assemblages d'une manière stricte, afin d'éviter l'introduction du signe «parenthèse». C'est-à-dire :

A ou B s'écrira ou AB	$A = B$ s'écrira $= AB$
$A \varepsilon B$ s'écrira εAB	(A, B) s'écrira $\supset AB$
$A \in B$ s'écrira $\in AB$	

Les assemblages apparaissant alors dans une construction formative sont de trois sortes: les lettres, les assemblages de la forme $\tau_x(A)$, et les assemblages de la forme $sA_1 \dots \dots A_n$ (s représente un signe logique ou un signe spécifique, $A_1 \dots A_n$ des assemblages qui précèdent $sA_1 \dots A_n$, et n un entier associé à s : par exemple pour $non, n = 1$ pour ou, $\in$, ε, $=$, et, $n = 2$).

LEMME 1. *Si A et B sont deux assemblages apparaissant dans deux constructions formatives, et s'il y a deux assemblages A' et B' tel que AA' soit BB', A et B sont le même assemblage.*

Raisonnons par récurrence sur le nombre de signes de l'assemblage A. Si A est un signe, A est une lettre, B commence donc par cette lettre et se réduit à A.

Supposons la proposition vraie pour les assemblages de moins de p signes avec $p \geq 2$. Si A est un assemblage de p signes, il ne peut se réduire à une lettre.

a) S'il est de la forme $sA_1 \dots A_i \dots A_n$, B qui commence aussi par s sera de la forme $sB_1 \dots B_i \dots B_n$, et nous avons $sA_1 \dots A_i \dots A_n A'$ qui est identique à $sB_1 \dots B_i \dots B_n B'$ ou encore $A_1 \dots A_i \dots A_n A'$ est identique à $B_1 \dots B_i \dots B_n B'$ et d'après l'hypothèse de récurrence A_1 et B_1 sont identiques. Par récurrence sur i, on constate que A_i et B_i sont identiques pour tout i, et par suite A et B sont identiques.

b) Si A est de la forme $\tau_x(A(x))$, B sera de la forme $\tau_y(B(y))$, dans ce cas $A_1(\square)A'$ et $B_1(\square)B'$ sont identiques, et, si z est une lettre n'apparaissant pas dans ces assemblages, $A_1(z)A'$ est $B_1(z)B'$, ce qui montre que $A_1(z)$ et $B_1(z)$ sont identiques, ainsi que $\tau_z(A_1(z))$ et $\tau_z(B_1(z))$.

COROLLAIRE. *Un assemblage A d'une construction formative, qui n'est pas une lettre et qui ne commence pas par un τ, s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*

$s A_1 \dots A_i \dots A_n$, où $A_1, A_2 \dots A_n$ sont des termes ou des relations.

En effet, A faisant partie d'une construction formative est bien de la forme $s A_1 \dots A_i \dots A_n$. Supposons que $s B_1 \dots B_i \dots B_n$ soit aussi A. $B_1 \dots B_i \dots B_n$ serait alors le même assemblage que $A_1 \dots A_i \dots A_n$, et d'après le lemme 1, B_1 et A_1 sont identiques. Ce qui démontre le corollaire.

DEFINITION I. *Une construction formative est stratifiée, si, à chaque terme de la construction, on peut associer un indice entier tel que:*

a) Si un terme est de la forme $\tau_x(R(x))$, l'indice de ce terme est le même que l'indice de x.

b) Si un terme est de la forme $\supset A B$, les indices de A et de B sont les mêmes.

c) Si une relation est de la forme $= A B$ les indices de A et de B sont les mêmes.

d) Si une relation est de la forme $\in A B$, ou $\varepsilon A B$, l'indice de A est inférieur d'une unité à celui de B.

DEFINITION II. *Une relation est stratifiée, s'il existe une construction formative stratifiée à laquelle elle appartient.*

DEFINITION III. *R étant une relation, une construction formative minimum associée à R est une construction formative dont le dernier assemblage est R, et qui satisfait à la règle :*

Si A est un assemblage de la construction, l'un des assemblages suivant A est de la forme $s A_1 \dots A_i \dots A_n$ où A est l'un des A_i, ou de la forme $\tau_x(A)$.

REMARQUE. Une construction formative minimum ne contient pas un nombre d'assemblages minimum. En particulier, cette définition n'exclut pas la répétition d'un assemblage.

REGLE I. Pour obtenir une construction formative minimum associée à une relation R, on élimine dans une construction formative contenant R, tous les assemblages qui suivent R. Puis, en commençant par le dernier, on examine les assemblages, en éliminant ceux qui ne satisfont pas à la règle de la définition III.

DEFINITION IV. *Une construction formative est appelée régulière, si pour tout assemblage A de cette construction commençant par un τ, il y a une relation $R(x)$ précédant A, telle que A soit $\tau_x R(x)$, et que x n'apparaisse pas dans les assemblages qui suivent $\tau_x(R(x))$.*

LEMME II. *Soit $\mathcal{C}$ une construction formative régulière minimum associée à R, et $\mathcal{C}'$ une construction formative contenant R. A chaque assemblage A de $\mathcal{C}$, on peut asso-*

cier un assemblage A' de $\mathcal{C}'$, tel que A' soit $(y_1/x_1)(y_2/x_2)\dots(y_n/x_n)A$, où $x_1, x_2 \dots x_n$ sont toutes les lettres qui apparaissent dans $\mathcal{C}$.

Pour démontrer ce lemme, numérotons les assemblages de $\mathcal{C}$ en commençant par la fin, et définissons A' et les lettres y'_i par récurrence sur le rang de A.

L'assemblage de rang 1 est R; associons lui l'assemblage R de $\mathcal{C}'$. Pour cela, quand x_i appartient à R nous choisirons x_i pour y_i; dans le cas contraire, y_i sera une lettre quelconque. R est bien identique à $(y_i/x_i)R$.

Soit A l'assemblage de rang r. Supposons que pour tout assemblage B de rang inférieur à r, B' soit déterminé. Sont aussi déterminés implicitement tous les y_i tels que x_i appartiennent à l'un de ces assemblages, les autres y_i pouvant être quelconques. La construction formative $\mathcal{C}$ étant minimum, deux cas sont possibles :

- L'un des assemblages, B, précédant A, est de la forme $sA_1A_2\dots A_p$ où l'un des A_k est A. Il existe alors un B' qui est identique à $(y_i/x_i)B$, et il peut s'écrire $sA_1\dots A'_p$ où A'_k est $(y_i/x_i)A_k$. D'après le corollaire du lemme 1, les A'_k appartiennent à $\mathcal{C}'$, donc A', c'est-à-dire $(y_i/x_i)A$, appartient aussi à $\mathcal{C}'$. Les lettres apparaissent aussi dans B, donc les y_i correspondant sont déterminés, les autres y_i étant quelconques.

- L'un des assemblages, B, est de la forme $\tau_{x_j}(A(x_j))$. Dans ce cas, B' peut s'écrire $(y_i/x_i)\,\tau_{x_j}(A(x_j))$.Mais B' faisant partie de $\mathcal{C}'$, cette construction formative contient un assemblage A', tel que B' soit $\tau_y A'(y)$. x_j n'appartient à aucun assemblage suivant A, d'après l'hypothèse de régularité faite sur $\mathcal{C}$; y_j n'a donc pas encore été choisi. En prenant y pour y_j, A' est $(y_i/x_i)A$.

PROPOSITION. *Pour qu'une relation R soit stratifiée, il faut et il suffit que toutes les constructions formatives régulières minimum associées à R soient stratifiées.*

La condition est suffisante d'après la définition II.

La condition est nécessaire. En effet, supposons que R appartienne à une construction formative stratifiée $\mathcal{C}'$, et soit $\mathcal{C}$ une construction formative régulière minimum associée à R. D'après le lemme II, à chaque assemblage A de $\mathcal{C}$ correspond un assemblage A' de $\mathcal{C}'$, tel que A' soit $(y_i/x_i)A$. En associant à chaque terme A de $\mathcal{C}$ le même indice qu'au terme A', il est immédiat que $\mathcal{C}$ est stratifié.

Pour savoir si une relation R est stratifiée, il suffit donc de trouver une construction formative régulière minimum associée à R, et de vérifier qu'elle est stratifiée.

EXEMPLE. La relation $\tau_x\,(x \in y) = \tau_y\,(x \in y)$ est stratifiée.

En effet, la construction est stratifiée avec les indices

$$y$$
$$t$$
$$t \in y$$
$$\tau_t(t \in y)$$
$$x$$
$$u$$
$$x \in u$$
$$\tau_u(x \in u)$$
$$\tau_t(t \in y) = \tau_u(x \in u)$$

x	0
u	1
y	2
t	1
$\tau_t(t \in y)$	1
$\tau_u(x \in u)$	1

REGLE II. Pour obtenir une construction formative régulière contenant une relation R, on considère une construction $\mathcal{C}$ quelconque contenant R. Les assemblages commençant par un τ sont numérotés dans l'ordre où ils se trouvent. Un indice $i(0 \leq i \leq n)$ est donc associé à chacun de ces assemblages qui seront désignés par A_i. On définit alors par récurrence des constructions $\mathcal{C}_i$ de la manière suivante :

- $\mathcal{C}_o$ est constitué par les assemblages précédents A_1.

- $\mathcal{C}'_{i-1}$ représentant l'assemblage obtenu en remplaçant dans $\mathcal{C}_{i-1}$ toutes les lettres qui n'apparaissant pas dans A_i par des lettres distinctes entre elles et n'apparaissant pas dans $\mathcal{C}$ ou dans $\mathcal{C}_{i-1}$, $\mathcal{C}_i$ est obtenu en écrivant successivement $\mathcal{C}_{i-1}$, $\mathcal{C}'_{i-1}$, A_i, puis les assemblages figurant dans $\mathcal{C}$ entre A_i et A_{i+1}.

$\mathcal{C}_n$ sera la construction cherchée.

DEMONSTRATION. Il est facile de démontrer par récurrence que $\mathcal{C}_i$ est une construction formative. En effet, si $\mathcal{C}_{i-1}$ en est une, il en est de même de $\mathcal{C}'_{i-1}$; d'autre part dans $\mathcal{C}_{i-1}$ sont écrits tous les assemblages de $\mathcal{C}$ qui précèdent A_i; $\mathcal{C}_{i-1}$ suivi de A_i et des assemblages compris entre A_i et A_{i+1}, constituent donc une construction formative.

De même, montrons par récurrence que $\mathcal{C}_i$ est régulière. Pour cela, prenons comme hypothèse de récurrence :

il est possible d'associer à chaque assemblage de $\mathcal{C}_i$ commençant par un τ, une lettre satisfaisant à la définition IV, et n'apparaissant pas dans $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}_o$ ne contenant aucun τ, satisfait à cette hypothèse.

Supposons que $\mathcal{C}_{i-1}$ satisfasse aussi à cette hypothèse. A chaque τ de $\mathcal{C}_{i-1}$ est associé une lettre qui n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Dans $\mathcal{C}'_{i-1}$, ces lettres seront donc remplacées par d'autres lettres distinctes entre elles, et n'apparaissant pas dans $\mathcal{C}$; nous pourrons les associer à chaque τ de $\mathcal{C}'_{i-1}$. A_i est de la forme $\tau_x B(x)$, où $B(x)$ appartient à $\mathcal{C}_{i-1}$; $B(y)$ appartiendra à $\mathcal{C}'_{i-1}$ et nous associerons à A_i la lettre y; cette lettre n'apparaît pas dans $\mathcal{C}$ et en particulier n'apparaît dans aucun des assemblages de

$\mathcal{C}$ compris entre A_i et A_{i+1}. A chacun des assemblages de $\mathcal{C}_i$, commençant par un τ, est associé une lettre qui satisfait bien à l'hypothèse de récurrence.

Une construction formative minimum extraite par la règle I d'une construction régulière, est encore régulière. En effet, si un assemblage, commençant par un τ, n'a pas été éliminé, il en est de même de la relation qui lui est associée par la définition IV. Nous en déduisons la règle III.

REGLE III. Pour obtenir une construction formative minimum régulière associée à R, on applique successivement à une construction formative contenant R, la règle II et la règle I.

Références.

[1] P. BERNAYS et A. FRAENKEL. Axiomatic set theory. Part I. North-Holland Publishing Company» 1958, Amsterdam.

[2] N. BOURBAKI. Théorie des ensembles. Chap. I. Hermann et C^{ie}, 1954.

[3] N. BOURBAKI. Théorie des ensembles. Chap. II. Hermann et C^{ie}, 1954.

[4] J.B. ROSSER. Logic for mathematicians. Mac Graw Hill, 1953, New-York.