Daniel Lehmann

Théorie de Morse en géométrie finslérienne

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 3, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A3_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE VOL. VI
Séminaire dirigé par C. EHRESMANN
AVRIL 1964

THEORIE DE MORSE EN GEOMETRIE FINSLERIENNE

par Daniel LEHMANN

Dans cet article, on adapte au cas finslérien la théorie relative aux géodésiques des variétés riemanniennes, telle qu'elle est exposée par Milnor ~~[1]. Plut~~ôt que d'appliquer la théorie générale de Palais et Smale [2] relative aux variétés de dimension infinie, nous avons préféré utiliser la connexion finslérienne d'E. Cartan, qui s'avère aussi maniable dans le cas général que la connexion riemannienne qui en est un cas particulier.

1. Notations.

On se donne :

- une variété différentiable [3] U de dimension n, (cf. [3]),

- une sous-variété ouverte $\mathcal{T}$ de la variété des vecteurs non nuls tangents à U, telle que si $v \in \mathcal{T}$ et si $\lambda > 0$ alors $\lambda v \in \mathcal{T}$, et pour laquelle la projection naturelle $p : \mathcal{T} \to U$ est surjective,

- une fonction différentiable $L : \mathcal{T} \to R$, à valeurs positives, positivement homogène de degré I (c'est-à-dire vérifiant $L(\lambda v) = \lambda L(v)$ $\forall v \in \mathcal{T}$, $\forall \lambda > 0$).

Notons :

$\mathfrak{D} \xrightarrow{q} U$ le fibré des directions orientées de U correspondant aux $v \in \mathcal{T}$,

$\eta : \mathcal{T} \to \mathfrak{D}$ l'application canonique surjective,

$Tp \to \mathcal{T}$ (resp. $Tq \to \mathfrak{D}$) l'image réciproque par p (resp. q) du fibré vectoriel tangent $T(U) \to U$,

$\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ le sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel tangent $T(\mathcal{T}) \to \mathcal{T}$ formé des vecteurs dv tels que $p(dv) = 0$ ($\mathcal{V}_v = T_v(\mathcal{T}_{p(v)})$ où $\mathcal{T}_x$ désigne, pour tout point x de U, la fibre $p^{-1}(x)$ de $\mathcal{T}$).

$j_v : T_{p(v)} \xrightarrow[=]{\;\;} \mathcal{V}_v$ l'isomorphisme d'espace vectoriel associé à la structure affine plate canonique induite par l'espace vectoriel $T_{p(v)}(U)$ sur son ouvert $\mathcal{T}_{p(v)}$ (on en déduit un isomorphisme de fibrés vectoriels $j : Tp \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}$).

V la section canonique de $Tp \to \mathcal{T}$ définie par $V(v) = v$.

Soit $X \in T_x U$. Notons jX le champ de vecteurs tangent à $\mathcal{T}_x$, égal à $j_v(X)$ en $v \in \mathcal{T}_x$. (Si X et $X' \in T_x U$, on a évidemment $[jX, jX'] = 0$). On définit une métrique riemannienne g sur le fibré vectoriel Tp, en posant :

$$g_v(X, X') = (j_v X).(jX').\tfrac{1}{2}L^2 \qquad \forall v \in \mathcal{T}, \text{ et } \forall X, X' \in (Tp)_v = T_{p(v)}(U).$$

On supposera cette métrique définie positive, et l'on dira que $(\mathcal{T}, L)$ définit sur U une *structure finslérienne*. On réservera le terme de *variété finslérienne* au cas où $\mathcal{T}$ est toute la variété des vecteurs non nuls tangents à U. (cf. [4]).

2. La connexion finslérienne.

Soit D la loi de dérivation covariante d'une connexion sur le fibré vectoriel $Tp \to \mathcal{T}$, et soit $\mathcal{H}$ le sous-fibré vectoriel de $T(\mathcal{T})$ formé des vecteurs H tels que $D_H V = 0$. Suivant [5], on dira que la connexion D est *régulière*, si $T(\mathcal{T})$ est somme de Whitney de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{V}$. Un vecteur dv appartenant à $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{V}$) sera dit «horizontal» (resp. «vertical»).

Une forme α appartenant à l'espace $\overset{r}{\Lambda}(\mathcal{T}, E)$ des r-formes sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans un fibré vectoriel différentiable $E \to \mathcal{T}$, sera dite de *type* (i, j) (où $i, j \geq 0$ et $i + j = r$) si $\alpha(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_r) = 0$ chaque fois que, parmi les r vecteurs $\hat{X}_\lambda$, il y en a au moins $i+1$ horizontaux ou au moins $j+1$ verticaux. Soit $\overset{i,j}{\Lambda}(\mathcal{T}, E)$ l'espace des formes de type (i, j) à valeurs dans E. Si D est régulière, il est clair que $\overset{r}{\Lambda}(\mathcal{T}, E) = \bigoplus_{i+j=r} \overset{i,j}{\Lambda}(\mathcal{T}, E)$.

Soit T la 2-forme $\in \overset{2}{\Lambda}(\mathcal{T}, Tp)$, appelée *torsion* de la connexion D, définie par $T(\hat{X}, \hat{Y}) = D_{\hat{X}}\, p\hat{Y} - D_{\hat{Y}}\, p\hat{X} - p([\hat{X}, \hat{Y}])$ $\forall \hat{X}, \hat{Y}$ champs de vecteurs sur $\mathcal{T}$.

Exactement comme dans le cas d'une variété finslérienne [5], on démontre, pour toute structure finslérienne, que :

Il existe sur $Tp \to \mathcal{T}$ une connexion D, régulière, et une seule ayant les propriétés suivantes :

(i) *D est l'image réciproque par η d'une connexion sur Tq*

(ii) *$Dg = 0$*

(iii) *la torsion T est de type $(1,1)$ et vérifie :*

$$g_v(T(\hat{X}, H), pH') = g_v(T(\hat{X}, H'), pH) \qquad \forall \hat{X} \in T_v(\mathcal{T}) \qquad \forall H, H' \in \mathcal{H}_v.$$

C'est toujours de cette connexion (appelée la connexion finslérienne attachée à L) qu'il s'agira dans la suite.

Sa torsion vérifie en outre : $T(\hat{X}, v^*) = 0$ $\forall \hat{X} \in T_v(\mathcal{T})$ et $v^* \in T_v(\mathcal{T})$ vérifiant $p(v^*) = v$. On en déduit, d'après (iii), que $g_v(T(\hat{X}, \hat{Y}), v) = 0$ $\forall \hat{X}, \hat{Y} \in T_v(\mathcal{T})$.

Si R, P, Q désignent respectivement les composantes de type (2,0), (1,1) et (0,2) de la 2-forme de courbure $K \in \overset{2}{\Lambda}(\mathcal{T}, End\ Tp)$, on a aussi :

$P(\hat{X}, v^*) = 0$ et $Q(\hat{X}, v^*) = 0$ $\quad \forall \hat{X} \in T_v(\mathcal{T})$, $\quad \forall v^* \in T_v(\mathcal{T})$ vérifiant $p(v^*) = v$.

3. L'espace Ω et la fonction longeur $\mathfrak{L}$.

Soient a et b deux points de U. On notera $\Omega_{(a,b)}$ (ou Ω s'il n'y a pas d'ambiguïté sur a et b) l'ensemble des courbes $c : [0,1] \to U$ qui sont :

(*i*) continues sur $[0,1]$ et différentiables par morceaux,
(*ii*) d'origine a et d'extrémité b,
(*iii*) telles que $(\frac{dc}{dt})_{t_o^+} \in \mathcal{T}$ $\forall t_o \in [0,1[$ et $(\frac{dc}{dt})_{t_o^-} \in \mathcal{T}$ $\forall t_o \in]0,1]$,
(*iv*) telles que $g_{\frac{dc}{dt}}(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt})$ soit une fonction constante (donc égale à $[\int_o^1 L(\frac{dc}{dt})dt]^2$) le long de c. (cf. [6]).

Sur Ω on définit la fonction longueur $\mathfrak{L} : \Omega \to R^+$ par

$$\mathfrak{L}(c) = \int_o^1 L(\frac{dc}{dt})dt .$$

Soit $c \in \Omega$ une courbe différentiable en dehors de $\{t_o = 0, t_1, \dots, t_k = 1\}$. On appelle relèvement canonique de c l'application $\hat{c}$ de $\complement_{[0,1]}\{t_o, \dots, t_k\}$ dans $\mathcal{T}$ définie par $\hat{c}(t) = \frac{dc}{dt}$: c'est une courbe de $\mathcal{T}$, ayant un nombre fini de discontinuités, différentiable entre ces discontinuités, vérifiant $p(\frac{d\hat{c}}{dt}) = \hat{c}(t)$.

Une courbe c de Ω est dite *géodésique*, si elle est différentiable sur tout $[0,1]$. et si tous les vecteurs tangents à $\hat{c}$ sont horizontaux (c'est-à-dire $D_{\frac{d\hat{c}}{dt}} \frac{dc}{dt} = 0$).

Pour toute courbe c de Ω, on appelle *variation de c* (sous-entendu à *1* paramètre) une application $\bar{\alpha} : [-\varepsilon, +\varepsilon] \to \Omega$ (ε est un nombre > 0) telle que:

(*i*) $\bar{\alpha}(0) = c$
(*ii*) l'application $\alpha : [0,1] \times [-\varepsilon, +\varepsilon] \to U$, qui à (t, u) associe $(\bar{\alpha}(u))(t)$, est continue, et il existe une subdivision $\{t_o = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ de $[0,1]$ telle que la restriction de α à $\complement_{[0,1]}\{t_o, \dots, t_k\} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$ soit différentiable (une telle subdivision sera dite *adaptée* à α)
(*iii*) $\forall t \in [0,1]$ l'application $u \to \alpha(t,u)$ de $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ dans U est différentiable et l'application $(t,u) \to \frac{\partial \alpha}{\partial u}(t,u)$ est continue sur $[0,1]$.

(c'est parfois l'application α, qu'on appellera la variation de c).

On appellera *vecteur tangent à Ω en c* un champ de vecteurs X tangent à U, défini le long de c, tel qu'il existe une variation α de c pour laquelle

$$(\frac{\partial \alpha}{\partial u})_{(t,0)} = X_t \qquad \forall t \in [0,1] .$$

On appellera relèvement canonique de la variation α l'application différentiable $\hat{\alpha} : \complement_{[0,1]}\{t_o, \dots, t_k\} \times [-\varepsilon, +\varepsilon] \to \mathcal{T}$ définie par $\hat{\alpha}(t,u) = (\frac{\partial \alpha}{\partial t})_{(t,u)}$ et on appellera relèvement canonique du vecteur X tangent à Ω en c vérifiant $X = (\frac{\partial \alpha}{\partial u})_{u=0}$ le champ de vecteurs $\hat{X}$ tangent à $\mathcal{T}$ défini le long de $\hat{c}$ par $\hat{X}_t = (\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial u})_{(t,0)}$. (On vérifie que $\hat{X}$ ne dépend que de X, et non de la variation α telle que $X = (\frac{\partial \alpha}{\partial u})_{u=0}$). Plus généralement on peut définir un champ de vecteurs $\hat{X}$ tangent à $\mathcal{T}$ le long de $\hat{c}$, pour tout champ de vecteurs X tangent à U, défini le long de c, continu et différentiable par morceaux.

Notons alors $\mathcal{J}(X)$ la section de $Tp \to \mathcal{T}$ définie au dessus de $\hat{c}$ par :

$$\mathcal{J}(X) = R(\hat{X}, \frac{dc}{dt}).\frac{dc}{dt} + D_{\frac{d\hat{c}}{dt}} D_{\frac{d\hat{c}}{dt}} X .$$

On vérifie, lorsque c est une géodésique, que le champ de vecteurs X, nul en a et b, est un vecteur tangent à Ω en c, si et seulement si $g_{\frac{dc}{dt}}(\mathcal{J}(X), \frac{dc}{dt}) = 0$ le long de $\hat{c}$.

L'ensemble $T_c\Omega$ des vecteurs tangents à Ω en c possède une structure naturelle d'espace vectoriel réel. Il est clair que :
L'application $X \to \hat{X}$ de $T_c\Omega$ dans l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs tangents à $\mathcal{T}$ définis le long de $\hat{c}$, est linéaire et vérifie : $p(\hat{X}) = X$.

4. Variation première de $\mathfrak{L}$.

Soient $c \in \Omega$, α une variation de c, $\{t_o = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ une subdivision de $[0,1]$ adaptée à α, et $X \in T_c\Omega$ le vecteur tangent à Ω défini par α : $X = (\frac{\partial \alpha}{\partial u})_{u=0}$.

THEOREME 1. *La fonction $u \to \mathfrak{L}(\bar{\alpha}(u))$ est dérivable pour $u = 0$.*

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}(\bar{\alpha}(u))}{du}\right)_{u=0} = -\frac{1}{\mathfrak{L}(c)}\left[\sum_{i=1}^{k-1} \Delta_{t_i}\left[g_{\hat{c}}(X, \frac{dc}{dt})\right] + \int_o^1 g_{\hat{c}(t)}(X, D_{\frac{d\hat{c}}{dt}} \frac{dc}{dt})dt\right] \qquad (cf.\ [7])$$

COROLLAIRES.

1°) La dérivée $(\frac{d\mathfrak{L}\,\bar{\alpha}(u)}{du})_{u=0}$ ne dépend que du vecteur $X \in T_c\Omega$ et non de la variation α telle que $X = (\frac{\partial \alpha}{\partial u})_{u=0}$: on notera $\mathfrak{L}^c_*(X)$ cette dérivée. L'application $\mathfrak{L}^c_* : T_c\Omega \to R$ est une forme linéaire sur $T_c\Omega$ qu'on appellera la différentielle *de $\mathfrak{L}$ en c.*

2°) La courbe c est une géodésique si et seulement si $\mathfrak{L}^c_* = 0$. On retrouve ainsi le résultat classique : les géodésiques de la connexion finslérienne sont les extrémales du problème de calcul des variations attaché à la fonction L.

5. Variation seconde de $\mathfrak{L}$. Hessien d'une géodésique.

Pour toute courbe $c \in \Omega$, on appellera *variation de c à 2 paramètres* une application $(u_1, u_2) \overset{\bar{\bar{\alpha}}}{\to} \bar{\alpha}(u_1, u_2)$ de $[-\varepsilon, +\varepsilon]^2$ dans Ω, telle que :

(*i*) $\bar{\alpha}(0,0) = c$

(*ii*) l'application $[0,1] \times [-\varepsilon, +\varepsilon]^2 \xrightarrow{\alpha} U$ vérifiant $\alpha(t, u_1, u_2) = (\bar{\alpha}(u_1, u_2))(t)$ est continue. Il existe une subdivision $t_o = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de $[0,1]$ (dite adaptée à α) telle que la restriction de α à $\complement_{[0,1]}\{t_o, \dots, t_k\} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]^2$ soit différentiable

(*iii*) $\forall\, u_1$ (resp. u_2) $\in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, l'application $u_2 \to \bar{\alpha}(u_1, u_2)$ de $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ dans Ω (resp. $u_1 \to \bar{\alpha}(u_1, u_2)$) est une variation de $\bar{\alpha}(u_1, 0)$ (resp. $\bar{\alpha}(0, u_2)$) à *1* paramètre.

Soient alors c une géodésique de Ω, α une variation à 2 paramètres de c, $t_o < t_1 < \dots < t_k$ une subdivision de $[0,1]$ adaptée à α et X_1, X_2 les vecteurs $\in T_c\Omega$ égaux respectivement à $(\frac{\partial \alpha}{\partial u_1})_{u_1 = u_2 = 0}$ et à $(\frac{\partial \alpha}{\partial u_2})_{u_1 = u_2 = 0}$.

THEOREME 2. *La fonction* $(u_1, u_2) \to \mathfrak{L}(\bar{\alpha}(u_1, u_2))$ *est 2 fois différentiable.*

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{L}(\bar{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 . \partial u_2}\right)_{u_1 = u_2 = 0} = -\frac{1}{\mathfrak{L}(c)}\left[\sum_{i=1}^{k-1} g_{\hat{c}(t_i)}(X_2, \Delta_{t_i}(D_{\hat{X}_1}\frac{\partial \alpha}{\partial t})) + \int_o^1 g_{\hat{c}(t)}(X_2, \mathfrak{J}(X_1))dt\right]$$

(*cf.* [7])

cf. § 3 la définition de $\mathfrak{J}(X)$.

COROLLAIRES.

1°) Cette dérivée seconde ne dépend que de X_1 *et de* X_2 *: on la notera désormais* $\mathfrak{L}^c_{**}(X_1, X_2)$.

2°) L'application $(T_c\Omega)^2 \xrightarrow{\mathfrak{L}^c_{**}} R$ *est une forme bilinéaire symétrique, que l'on appellera le* hessien *de la géodésique* c.

3°) Si α' *est une variation de la géodésique* c *à 1 paramètre, et si* $X' = (\frac{\partial \alpha'}{\partial u})$ *on a alors :* $\mathfrak{L}^c_{**}(X', X') = \left(\frac{d^2 \mathfrak{L}(\bar{\alpha}'(u))}{du^2}\right)_{u=0}$

Comme toute forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel, $\mathfrak{L}^c_{**}$ a un indice λ (entier ≥ 0 ou éventuellement infini) que l'on appellera *l'indice de la géodésique* c. Elle a aussi un noyau que nous allons étudier [8].

6. Champs de Jacobi.

Soit c une géodésique $\in \Omega$. On dira qu'un champ de vecteurs J tangent à U, défini le long de c et différentiable, est un *champ de Jacobi* s'il vérifie $\mathfrak{J}(J) = 0$. Les champs de Jacobi le long de c forment un espace vectoriel réel $\mathfrak{J}_c$ de dimension $2n$: chaque champ $J \in \mathfrak{J}_c$ est entièrement déterminé par les données de J_{t_o} et de $(D_{\frac{d\hat{c}}{dt}} J)_{t_o}$ en un point t_o arbitraire de $[0,1]$. On démontre que le noyau du hessien $\mathfrak{L}^c_{**}$ est égal à $\mathfrak{J}_c \cap T_c\Omega$. . La dimension (finie) de cet espace vectoriel sera appelée *l'ordre de conjugaison* de a et b le long de c. On démontre aussi que $J \in \mathfrak{J}_c$ si et seulement si il existe une famille à 1 paramètre de géodésiques $u \to \bar{\alpha}(u)$ telle que $J = (\frac{\partial \alpha}{\partial u})_{u=0}$ (si l'on suppose, en outre, que les géodésiques $\bar{\alpha}(u)$ ont toutes mêmes extrémités a et b, J appartient alors à $\mathcal{J}_c \cap T_c\Omega$).

7. Théorème de l'indice (cas d'une variété finslérienne).

Soit $c : [0, 1] \to U$ une géodésique d'extrémités a et b, et soit c^t la géodésique définie par la restriction de c à $[0, t]$ (reparamétrée de 0 à 1 proportionellement à l'arc) : $c^t \in \Omega_{(a, c(t))}$.

Si a et $c(t)$ sont conjugués d'ordre k_t le long de c^t et si $k_t > 0$, on dira que $c(t)$ est un *point focal* de a, d'ordre k_t, relativement à c.

THEOREME 3 (théorème de l'indice). *Si U est une variété finslérienne, il n'y a qu'un nombre fini de points focaux de a relativement à c, et l'indice λ de la géodésique c est égal à $\sum_{t \in [0,1]} k_t$ (en particulier, λ est fini).*

Si U est une variété finslérienne, il existe un recouvrement $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de $c([0, 1])$ par des ouverts U_i de U, et il existe une subdivision $t_o = 0 < t_1 < \ldots < t_k$ de $[0, 1]$ tels que :

(*i*) $c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i \quad \forall i = 1, \ldots, k$

(*ii*) deux points de U_i peuvent être joints par une géodésique d'indice 0 incluse dans U_i et par une seule.

Notons :

c^i la restriction de c à $[t_{i-1}, t_i]$,

$T_c^{\mathcal{J}}\Omega$ le sous-espace vectoriel de $T_c\Omega$ formé des champs X dont la restriction à chaque c^i appartient à $\mathcal{J}_{c^i}$ ($T_c^{\Omega}\Omega$ est de dimension $n.(k-1)$).

$T_c^o\Omega$ le sous-espace vectoriel de $T_c\Omega$ formé des champs X tels que $X_{t_i} = 0$ $\forall\, i = 0, 1, \ldots, k$.

Pour démontrer le théorème 3, on utilise le

THEOREME 4.

$T_c\Omega$ est somme directe de $T_c^{\mathcal{J}}\Omega$ et de $T_c^o\Omega$,

$T_c^{\mathcal{J}}\Omega$ et $T_c^o\Omega$ sont orthogonaux relativement à $\mathcal{L}^c_{**}$,

la restriction de $\mathcal{L}^c_{**}$ à $(T_c^o\Omega)^2$ est définie positive.

COROLLAIRE. *Le noyau et l'indice de $\mathcal{L}^c_{**}$ sont égaux respectivement au noyau et à l'indice de la restriction de $\mathcal{L}^c_{**}$ à $(T_c^{\mathcal{J}}\Omega)^2$. En particulier, l'indice λ est un nombre fini.*

8. Théorème fondamental (cas d'une variété finslérienne, complète).

Supposons que $\mathcal{T}$ est toute la variété des vecteurs tangents à U non nuls, et que la métrique finslérienne est complète. Utilisant le théorème de Hopf-Rinow qui reste valable en Géométrie finslérienne [9], on démontre, comme Milnor dans le cas riemannien, que l'identité dans Ω est une équivalence d'homotopie entre Ω muni de la C^0 et de la C^1-topologie. Comme Milnor, on construit une rétraction par déformations de $\mathfrak{L}^{-1}(-\infty, l[)$ muni de la C^0 ou de la C^1-topologie sur une sous-variété B^l de dimension finie, composée de géodésiques brisées, admettant $T_c^{\mathfrak{J}}\Omega$ comme espace tangent en une certaine géodésique $c \in B^l$ pour une subdivision $t_0, \dots t_k$ suffisamment fine de $[0, 1]$. On en déduit, utilisant la théorie de Morse sur une variété de dimension finie :

THEOREME 5. *Si a et b ne sont conjugués le long d'aucune géodésique de longueur $\leq l$, l'espace $\Omega^l = \mathfrak{L}^{-1}(-\infty, l\,])$, muni de la C^0 ou de la C^1-topologie, a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini, ayant une cellule de dimension λ pour toute géodésique d'indice λ, d'extrémités a et b, et de longueur $\leq l$.*

et

Si a et b ne sont conjugués le long d'aucune géodésique, l'espace $\Omega_{(a,b)}$, muni de la C^0 ou de la C^1-topologie, a le type d'homotopie d'un CW-complexe dénombrable ayant une cellule de dimension λ pour toute géodésique d'indice λ et d'extrémités a et b.

Comme dans [1], on démontre aussi que :

Pour tout point a de U, l'ensemble des points b tels que a et b soient conjugués le long d'une géodésique est de mesure nulle.

9. Variétés à courbure négative (théorème de Cartan).

Soit $(L, \mathfrak{J})$ une *structure* finslérienne sur U. Pour tout $X \in T_x(U)$ et $v \in \mathfrak{J}_x$, soient v^* et $\hat{X} \in T_v(\mathfrak{J})$ vérifiant $p(v^*) = v$ et $p(\hat{X}) = X$. Notons $R_{v,X}$ la quantité $g_v(R(\hat{X}, v^*)v, X)$ (qui ne dépend que des composantes horizontales de v^* et $\hat{X}$). *Si, $\forall (v, X)$, $R_{v,X} \leq 0$, deux points quelconques de U ne sont conjugués le long d'aucune géodésique.*

Dans le cas où U est une *variété* finslérienne *complète*, on en déduit :

Deux points quelconques de U peuvent être joints par une géodésique et une seule, nécessairement d'indice 0. Le revêtement universel de U ne peut qu'être difféomorphe à R^n.

10. Variétés à courbure positive (théorème de Myers).

Pour tout $v \in \mathfrak{J}$, notons K_v la trace de la forme quadratique $X \to g_v(R(\hat{X}, v^*)v, X)$ (notations du § 9).

Si U est muni d'une *structure* finslérienne, et

si $K_v \geq \frac{n-1}{r^2}$ $\quad \forall\, v$ vérifiant $g_v(v, v) = 1$ (en particulier si $R_{v,X} \geq \frac{1}{r^2}$ $\quad \forall (v, X)$), *toute géodésique de* U *de longueur* $> \pi r$ *est d'indice* ≥ 1.

Si U est une *variété* finslérienne *complète,* on en déduit :

si $K_v \geq \frac{n-1}{r^2}$ $\forall\, v \in \mathcal{T}$ *vérifiant* $g_v(v, v) = 1$, U *est compacte et de diamètre* $\leqslant \pi r$. *Le groupe fondamental* $\pi_1(U)$ *ne peut alors qu'être fini, et le premier nombre de Betti* $b_1(U)$ *ne peut qu'être nul.* [10].

Références.

[1] J. MILNOR. Morse Theory (Annals of Mathematics Studies n° 51, Princeton 1963).

[2] PALAIS et SMALE. A generalized Morse theory (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 70, n° 1, 1964, p. 165).

[3] « différentiable » signifiera toujours : de classe C^∞.

[4] Le cas où $\mathcal{T}$ n'est pas toute la variété des vecteurs tangents à U non nuls, peut effectivement se présenter. Par exemple, si L_o est une fonction non homogène à valeurs positives définie sur la variété des vecteurs tangents à une variété U' de dimension $n-1$, A. LICHNEROWICZ lui associe canoniquement une fonction L définie sur la variété $\mathcal{T}$ des vecteurs (du', dt) tangents à $U = U' \times R$ vérifiant $dt > 0$, en posant :

$$L(du', dt) = L_o\left(\frac{1}{dt}\, du'\right)dt \qquad (dt \in T_t(R) = R).$$

Il est clair que L est positivement homogène de degré 1. A toute courbe $c' : t \to c'(t)$ dans U', on associe canoniquement la courbe $c : t \to (c'(t), t)$ dans U, et

$$\int_{t_o}^{t_1} L_o\left(\frac{dc'}{dt}\right) dt = \int_{t_o}^{t_1} L\left(\frac{dc}{dt}\right) dt .$$

[5] A. LICHNEROWICZ. Espaces de Finsler (cours du Collège de France, 1959-60). H. AKBAR-ZADEH. Thèse (Annales scientifiques de l'ENS, 1963).

[6] La fonction L étant positivement homogène de degré 1, l'intégrale $\int_{t_o}^{t_1} L\left(\frac{dc}{dt}\right) dt$ prend la même valeur pour deux paramétrages t et t' d'une même courbe, pourvu que t' soit une fonction différentiable de t à dérivée première partout positive. On peut donc choisir le paramètre de façon aussi commode que possible, d'où la condition (iv).

[7] Si $\varphi : \complement_{[0,1]}\{t_o, \dots, t_k\} \to E$ est une fonction bornée à valeurs dans un espace normé E, on note $\Delta_{t_i}\varphi$ sa discontinuité $\varphi(t_i^+) - \varphi(t_i^-)$ en t_i.

[8] Au lieu de considérer la fonction $\mathcal{L}$, on aurait pu utiliser la fonction énergie $c \to \mathcal{E}(c) = \int_0^1 L^2\left(\frac{dc}{dt}\right) dt$. Mais L^2 n'étant plus homogène de degré 1, il aurait fallu varier $\mathcal{E}$ dans l'espace Ω' de toutes les courbes paramétrées $[0, 1] \to U$ joignant a et b, et non plus seulement dans l'espace Ω des courbes paramétrées proportionnellement à l'arc. On aurait alors obtenu une différentielle $\mathcal{E}_*^c$ définie sur $T_c\Omega'$, nulle si et seulement si c est une géodésique. Les résultats ultérieurs de

la théorie auraient été inchangés car :

- d'une part, le hessien $\mathcal{E}^{c}_{**}$ d'une géodésique c a une restriction à $(T_c \Omega)^2$ de la forme $k . \mathcal{L}^{c}_{**}$ (où k est un nombre > 0),
- d'autre part, Ω est un rétracte par déformations de Ω' muni de la C^0 ou de la C^1-topologie.

[9] F. MOALA. Espaces de Finsler complets (Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 1964 t. 258, n° 8, p. 2251 et n° 10 p. 2734).

[10] L. AUSLANDER. On curvature in Finsler Geometry (Transactions of the American Mathematical Society, vol. 79, 1955, p. 378).