

TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

VALENTIN POENARU

Sur les variétés tridimensionnelles ayant le type d'homotopie de la sphère S_3

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann,
tome 6 (1964), exp. n° 1, p. 1-67

http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A1_0

© Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Topologie et géométrie différentielle. Cahiers
du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann » implique l'accord avec les conditions gé-
nérales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale
ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou im-
pression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES VARIETES TRIDIMENSIONNELLES
AYANT LE TYPE D'HOMOTOPIE DE LA SPHERE S_3 .

par Valentin POENARU

(Thèse de Doctorat soutenue le 23 Mars 1963)

INTRODUCTION.

Un des «problèmes classiques» de la Topologie est l'hypothèse de Poincaré, qui affirme :

«Toute variété* compacte à trois dimensions ayant le type d'homotopie de S_3 , est homéomorphe à S_3 ». (voir [11], [17]).

D'une manière analogue, on peut formuler l'hypothèse de Poincaré, généralisée :

«Toute variété compacte à n dimensions, ayant le type d'homotopie de S_n , est homéomorphe à S_n ».

Assez récemment, on s'est rendu compte que le cas des grandes dimensions était beaucoup plus facile. De très beaux travaux de S. Smale [20], [21], [22], [23], J. Stallings [29], [25], E.C. Zeeman [34], [33] et A.H. Wallace [27] ont prouvé l'hypothèse généralisée de Poincaré pour les dimensions ≥ 5 . Les cas $n = 3, 4$ restent ouverts et il semble bien qu'ils demandent des techniques nouvelles. Le but principal de ce travail est de donner une démonstration complète du théorème suivant :

THEOREME 1. Soit V_3 une variété compacte à 3 dimensions, ayant le type d'homotopie de S_3 . Il existe alors un nombre $n(V_3)$ tel que si l'on enlève de V_3 les intérieurs de

* Toutes les variétés qu'on va considérer dans ce travail seront à structure différentiable (C^∞).

$n(V_3)$ boules tridimensionnelles, plongées d'une façon C^∞ , disjointes, et l'on multiplie le résultat par un disque à deux dimensions, on obtient une variété difféomorphe au produit de S_3 dont on a enlevé le même nombre $n(V_3)$ d'intérieurs de boules disjointes multipliée toujours par un disque à deux dimensions. C'est-à-dire :

$$(V_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i) \times D_2 = (S_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } \bar{D}_3^i) \times \bar{D}_2.$$

(Bien entendu ces deux variétés à bord ont des angles; mais il y a des procédés standard pour les arrondir [2], [9]).

Le théorème I peut être considéré comme une approximation à un facteur- $[0, 1]$ - près de l'hypothèse de Poincaré, car on peut prouver (voir chapitre IV) que cette dernière est équivalente à l'assertion suivante :

$$(V_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i) \times D_1 = (S_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } \bar{D}_3^i) \times \bar{D}_1$$

La démonstration du théorème I occupera les trois premiers chapitres de ce travail. Une esquisse de cette démonstration est apparue dans [14]. D'autre part, le second chapitre de [14] était plutôt heuristique et a été remplacé ici par des considérations plus rigoureuses, liées à un travail à paraître [15].

L'idée très générale de la démonstration est la suivante: construire tout d'abord une suite de complexes (qui ne seront en général plus des variétés):

$$V_3 = K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)} \dots K^{(n)} = S_3$$

qui se déduisent l'un de l'autre par des opérations élémentaires. Donner ensuite un procédé canonique de grossissement des $K^{(i)}$ en des variétés à bord, de telle façon que pour les cas extrêmes ses grossissements soient justement des produits cartésiens par des disques.

J.H.C. Whitehead [28], [29], [30] a été le premier à employer une idée de ce genre mais avec des techniques très différentes de celles employées ici; les résultats qu'il pouvait obtenir sur V_3 étaient beaucoup plus faibles.

Des idées de ce genre ont été reprises assez récemment, par voies et méthodes différentes (mais ayant tout de même une série de remarquables parentés), par B. Mazur et moi-même. Je me réfère tout spécialement à un grand mémoire sous presse de B. Mazur [8], dont quelques résultats se trouvent dans les notes [6].

Le premier chapitre contient la description de la chaîne $K^{(i)}$ et des opérations élémentaires.

Le second chapitre est consacré à quelques résultats de la théorie des immersions. Une première moitié de ce chapitre suit un travail à paraître [15]; elle a de fortes intersections avec les travaux de M. Hirsch [4], [3].

Le troisième chapitre décrit le grossissement canonique. Il donne notamment un foncteur, «le produit cartésien régularisé par un carré» qui émousse d'une manière fonctorielle les singularités d'une catégorie assez vaste de complexes à trois dimensions. Ses valeurs seront toujours des variétés 5-dimensionnelles, C^∞ , à bord, et coïncideront avec les valeurs du foncteur

$$K_3 \rightarrow K_3 \times D_2$$

si et seulement si K_3 n'a pas de singularités ($K_3 = \text{variété}$). Le dernier chapitre contient des compléments divers.

Je suis heureux d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. le Professeur Charles Ehresmann pour l'aide massive et multilatérale qu'il m'a prodiguée pendant la rédaction de cette thèse et pendant toute une période très cruciale pour moi. Je désire aussi lui exprimer ma profonde gratitude de m'avoir permis d'exposer ce travail en détail dans son séminaire, de l'avoir publié et de m'avoir aidé d'une façon si essentielle à le présenter comme thèse de doctorat.

Je suis heureux d'exprimer ma profonde reconnaissance à M. le Professeur Henri Cartan pour l'aide importante qu'il m'a donnée et pour avoir bien voulu être le Président du Jury de cette thèse.

En même temps je désire exprimer ma profonde reconnaissance à M. le Professeur Jacques Lions d'avoir accepté de faire partie du Jury, de m'avoir indiqué le sujet de la seconde thèse, et pour son bienveillant intérêt de toujours.

Enfin je désire exprimer toute ma gratitude à Mlle Elsa Gomide pour ses bons soins dans la préparation du texte imprimé.

CHAPITRE I

QUELQUES CONSTRUCTIONS COMBINATOIRES

Ce chapitre, comme nous l'avons déjà dit, sera principalement consacré à certaines formes très spéciales d'espace-quotient par lesquelles on va représenter une variété V_3 compacte, ayant le type d'homotopie de S_3 . Nous allons commencer par quelques définitions :

DEFINITION 1.1. Soit V_3 une variété compacte quelconque à trois dimensions. Nous allons appeler «représentation spéciale» de V_3 , une paire $(F(V_3), \Phi)$, constituée par un espace $F(V_3)$ et une relation d'équivalence Φ sur cet espace, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $F(V_3)$ est un sous-complexe 3-dimensionnel, contractible, pur (c'est-à-dire tel que tout simplexe de dimension $i < 3$ est face d'un simplexe de dimension $i + 1$) de E_3 .

b) Les simplexes à deux dimensions de la frontière de $F(V_3)$ ($Fr F(V_3)$) sont disposés en paires $(x, x')^*$; pour chaque paire (x, x') un isomorphisme simplicial:

$$T_{x, x'} : x \rightarrow x'$$

est donné. $T_{x, x'} = T_{x', x}^{-1}$. De plus, les $\{T_{x, x'}\}$ sont compatibles avec la structure simpliciale de $F(V_3)$. Ce qui veut dire que, si une arête de $Fr F(V_3)$ est invariante pour une composition quelconque de transformations $T_{x, x'}$, chaque point de cette arête est invariant pour la même composition.

c) Φ est par définition la plus fine des relations d'équivalence pour lesquelles $T_{x, x'}(p) \equiv p$. D'une façon symbolique, si x, y sont identifiés par Φ nous écrirons $\Phi(x, y) = \Phi(y, x) = 1$. Au cas contraire nous écrirons $\Phi(x, y) = 0$.

d) $F(V_3)/(\Phi) = V_3$.

Il est bien connu que pour toute variété compacte V_3 , il existe une «représentation spéciale» $(F(V_3), \Phi)$, telle que $F(V_3) = D_3$.

Nous avons appelé les représentations ci-dessus «spéciales» pour réserver le nom de «représentations» tout court, pour des objets un peu plus généraux.

DEFINITION 1.2. Nous allons maintenant définir les «représentations» par induction.

Considérons une suite d'espaces :

$$X^i = (\alpha^i, \beta^i) (\alpha^{i-1}, \beta^{i-1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3) \\ i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad X^0 = F(V_3),$$

*) $(x')' = x$

tels que :

a) X^i est espace-quotient de X^{i-1} . On désignera par φ^{i-1} l'application canonique :

$$\varphi^{i-1} : X^{i-1} \rightarrow X^i.$$

b) α^i, β^i sont deux simplexes de la même dimension de $\text{Fr } X^{i-1}$; ils sont identifiés quand on passe de X^{i-1} à X^i .

c) $\text{Fr } X^i$ est définie par induction. C'est par définition, l'image par φ^{i-1} du plus petit sous-complexe de $\text{Fr } X^{i-1}$ qui contient

$$\text{Fr } X^{i-1} - (\alpha^i \cup \beta^i).$$

d) Il existe des relations d'équivalence

$$\Phi^i = (\alpha^i, \beta^i) \dots (\alpha^1, \beta^1) \Phi \quad (\Phi^0 = \Phi)$$

définies sur X^i . Φ^i est canoniquement induite par Φ^{i-1} .

e) Les (α^i, β^i) constituent un «élément fixe» de (X^{i-1}, Φ^{i-1}) . Ceci veut dire la chose suivante :

il existe un isomorphisme simplicial :

$$\tau^i : \alpha^i \rightarrow \beta^i,$$

tel que :

- $\Phi^{i-1}(\tau^i(p), p) = 1$,
- on passe de X^{i-1} à X^i en identifiant chaque p avec $\tau^i(p)$,
- il existe un point $q \in \alpha^i \cap \beta^i$,
- pour tout point $\bar{q} \in \alpha^i \cap \beta^i$, $\tau^i(\bar{q}) = \bar{q}$.

Alors $(X^n, \Phi^n) = ((\alpha^n, \beta^n) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), (\alpha^n, \beta^n) \dots (\alpha^1, \beta^1) \Phi)$ sera une «représentation» de V_3 .

On remarque bien que $(\alpha^n, \beta^n) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3)$ est un espace quotient intermédiaire entre $F(V_3)$ et V_3 . C'est-à-dire qu'il y a un diagramme commutatif, dont toutes les flèches sont des projections d'espace quotient :

$$\begin{array}{ccc}
 & F(V_3) & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 & V_3 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 (\alpha^i, \beta^i) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3) & \rightarrow & (\alpha^{i+j}, \beta^{i+j}) \dots (\alpha^i, \beta^i) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3)
 \end{array}$$

Pour la commodité, on écrira :

$$((\alpha^n, \beta^n) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

au lieu de $((\alpha^n, \beta^n) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), (\alpha^n, \beta^n) \dots (\alpha^1, \beta^1) \Phi) \dots^*)$

On utilisera la convention de calcul suivante :

$$\dots (\omega, \omega') (\alpha, \beta) (\bar{\omega}, \bar{\omega}') \dots (\alpha, \beta) \dots = \dots (\omega, \omega') (\bar{\omega}, \bar{\omega}') \dots (\alpha, \beta) \dots$$

De même :

$$\dots (\alpha, \beta) \dots = \dots (\beta, \alpha) \dots$$

Deux représentations $(X, \Phi), (Y, \Psi)$ de V_3 seront dites égales s'il existe un homéomorphisme l.p.m. $h = X \longleftrightarrow Y$ tel que

$$\Phi(p, q) = \Psi(h(p), h(q)).$$

On va utiliser aussi la notation symbolique suivante

$$(\cup \alpha_i, \cup \beta_i) = (\alpha_f, \beta_f) \dots (\alpha_1, \beta_1).$$

Il est à remarquer enfin que si (F, Φ) est une représentation de V_3 , alors le complémentaire de l'ensemble des singularités de F (singularités = points dans lesquels F n'est pas une variété à bord) admet une structure univoquement déterminée de variété C^∞ . Cette structure est compatible avec l'application canonique

$$\pi: F \rightarrow (\alpha, \beta)F$$

dans le sens que π est de classe C^∞ (là où cette notion a un sens).

Tous les morphismes de ce travail seront des applications semilinéaires, C^∞ , par rapport à la structure différentiable de F -singularités.

DEFINITION 1.3. Soient K_3 un complexe à 3-dimensions, σ_2 une face de K_3 , σ_1 une arête de σ_2 . Soient p, q les extrémités de σ_1 et $\alpha(t), \beta(t)$ deux arcs de Jordan dans K_3 , qui coïncident respectivement avec σ_1 et $\text{Fr } \sigma_2 - \sigma_1$: $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha(1) = \beta(1) = q$.

Désignons par $\rho(t)$ le segment de σ_2 , d'extrémités $\alpha(t), \beta(t)$. $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)K_3$ sera par définition l'espace quotient de K_3 , obtenu en identifiant chaque $\rho(t)$ avec un seul point.

Il est évident que si K_3 est une variété V_3 , $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)V_3 = V_3$ (l'égalité bien entendu n'est pas l'application canonique). On laisse au lecteur le soin de construire une triangulation canonique de $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)K_3$.

LEMME 1.1. Soit $(F(V_3), \Phi)$ une représentation spéciale d'une variété compacte V_3 . Soit L_1 un arc simple contenu dans $\text{Fr } F(V_3)$, d'extrémités P, Q . Supposons que

*) En général d'ailleurs, dans ce qui s'ensuit, une représentation (X, Φ) subira des transformations : $(X, \Phi) \rightarrow (TX, T\Phi)$. Pour des raisons de commodité on écrira (TX, Φ) au lieu de $(TX, T\Phi)$.

$\Phi(P, Q) = 1$ et qu'il n'y ait pas d'autre relation $\Phi(x, y) = 1$, $x, y \in L_1$. Soit $\varphi: F(V_3) \rightarrow V_3$ l'application canonique. Supposons que $\varphi(L_1)$ soit homotope-0 dans V_3 . On peut alors construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 F(V_3) & \xrightarrow{\varphi} & V_3 \\
 \psi_1 \downarrow & & \downarrow p \\
 \varphi(L_1) F(V_3) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \varphi(L_1) V_3 \\
 \tilde{\varphi} \downarrow & \nearrow \varphi' & \\
 (\beta_1^n, \gamma_1^n) \dots (\beta_1^1, \gamma_1^1) \varphi(L_1) F(V_3) & &
 \end{array}$$

où : a) toutes les flèches sont des applications d'espace quotient. ψ_1 et p représentent un nombre fini du type $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$. (Donc $\varphi(L_1) V_3$ est homéomorphe à V_3). Toute opération $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$ correspondant à ψ_1 a la propriété que $\text{int } \sigma_2 \subset \text{int } F(V_3)$. $\varphi, \bar{\varphi}, \varphi'$ sont des projections correspondant à des représentations ($\varphi, \bar{\varphi}$ à des représentations spéciales).

b) $\tilde{\varphi}\psi_1(P) = \tilde{\varphi}\psi_1(Q)$.

c) Il existe une triangulation de $\text{Fr } F(V_3)$, telle que $\psi_1|_{\text{Fr } F(V_3)}$ soit simpliciale et n'abaisse la dimension d'aucun simplexe. On a :

$$\psi_1(\text{Fr } F(V_3)) = \text{Fr}(\varphi(L_1) F(V_3)).$$

Si σ_2, σ'_2 sont des simplexes à deux dimensions de la triangulation plus haut considérée de $\text{Fr } F(V_3)$:

$$\Phi(\sigma_2, \sigma'_2) = (\varphi(L_1)\Phi)(\psi_1(\sigma_2), \psi_1(\sigma'_2))$$

($\varphi(L_1)\Phi$ est la relation d'équivalence qui fait de $\varphi(L_1) V_3$ un espace quotient de $\varphi(L_1) F(V_3)$).

Si x, y sont des points de $\text{Fr } F(V_3)$:

$$\Phi(x, y) \leq (\varphi(L_1)\Phi)(x, y).$$

DEMONSTRATION. Considérons tout d'abord une variété tridimensionnelle quelconque W_3 et $\gamma_1 \subset W_3$ une courbe simple, homotope à 0 de W_3 . Soient $\sigma_1^1, \sigma_1^2, \dots, \sigma_1^{k+1} = \sigma_1^1$ les simplexes unidimensionnels de γ_1 , dans leur ordre circulaire naturel, orientés de telle manière que $\sum_i \partial \sigma_1^i = 0$.

Nous allons considérer le groupoïde $^*)$ des chemins de $W_3, \mathcal{L}$, avec la loi de composition définie de la manière habituelle (entre un chemin qui finit dans $x \in W_3$ et un chemin qui commence en x). Nous identifierons les chemins qui se déduisent l'un

$^*)$ Loi de composition non toujours définie.

de l'autre par changement de paramètre, ou par multiplication avec un chemin de la forme $f(t)f(1-t)$, ($t \in [0, 1]$)^{**}). On obtient un groupeïde facteur de $\mathcal{L}$, $\overline{\mathcal{L}}$. Soit $\rho: \mathcal{L} \rightarrow \overline{\mathcal{L}}$ la projection.

Je dis qu'on peut trouver un espace quotient de W_3 , que je désignerai par $\gamma_1 W_3$, tel que :

- la projection $\psi: W_3 \rightarrow \gamma_1 W_3$ s'obtient par un nombre fini d'opérations du type $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$.

- $\rho(\psi(\sigma_1^1)\psi(\sigma_1^2)\dots\psi(\sigma_1^k)) = 1 \in \overline{\mathcal{L}}$, ($\overline{\mathcal{L}}$ c'est ici le $\overline{\mathcal{L}}$ de $\gamma_1 W_3$).

Pour prouver ceci il faut utiliser une forme spéciale à laquelle on peut amener le disque singulier $f(D_2) \subset W_3$, de frontière γ_1 . En effet on peut prouver qu'on peut toujours s'arranger de telle manière que f soit une immersion et n'ait pas de points de multiplicité supérieure à 2, et que toute composante connexe de l'ensemble singulier (l'image réciproque, dans D_2 , des points multiples) soit un arc. Ceci est facile à prouver. Bien entendu une telle forme spéciale ne sera pas univoquement déterminée. (Ce qui fera que $(\gamma_1 W_3; \psi)$ n'est pas univoquement déterminé. Quand nous écrivons $\gamma_1 W_3$ nous entendons l'un des $\gamma_1 W_3$ qui satisfait aux propriétés ci-dessus). En partant d'un $f(D_2)$, de forme spéciale, $\gamma_1 W_3$ se construit par des raisonnements standard. On voit bien que

$$\gamma_1 W_3 = \Omega(\bar{\sigma}_2^f, \bar{\sigma}_1^f) \dots \Omega(\bar{\sigma}_2^f, \bar{\sigma}_1^f) W_3$$

où $\bar{\sigma}_2^1, \bar{\sigma}_1^1, \dots$ sont tous les simplexes 2-dimensionnels de la forme $f(\bar{\sigma}_2^i)$ où $\bar{\sigma}_2^1, \bar{\sigma}_2^2 \dots$ sont des simplexes à deux dimensions de D_2 , dans un certain ordre. Les $\bar{\sigma}_1^i$, arêtes de $\bar{\sigma}_2^i$, sont choisies d'une manière convenable. Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier cet ordre et ce choix.

Considérons maintenant la représentation spéciale $(F(V_3), \Phi)$ de l'énoncé. Comme précédemment on peut construire un espace quotient

$$\varphi(L_1)V_3 = \Omega(\bar{\sigma}_2^f, \bar{\sigma}_1^f) \dots \Omega(\bar{\sigma}_2^1, \bar{\sigma}_1^1)V_3$$

correspondant à un certain disque singulier $f(D_2)$ de frontière $\varphi(L_1)$ (de forme spéciale). On peut toujours s'arranger de telle manière que

$$\dim(\varphi^{-1}f(D_2) \cap Fr F(V_3)) \leq 1.$$

Si cette condition est remplie, pour chaque paire $(\bar{\sigma}_2^i, \bar{\sigma}_1^i)$, la paire $(\varphi^{-1}\bar{\sigma}_2^i, \varphi^{-1}\bar{\sigma}_1^i)$ est univoquement déterminée.

Par abus de langage on posera :

$$\varphi(L_1)F(V_3) = \Omega(\varphi^{-1}\bar{\sigma}_2^f, \varphi^{-1}\bar{\sigma}_1^f) \dots \Omega(\varphi^{-1}\bar{\sigma}_2^1, \varphi^{-1}\bar{\sigma}_1^1)F(V_3).$$

^{**}) Nous écrivons la composition des chemins d'une façon multiplicative.

Il faut prouver l'existence de

$$(\beta_1^n, \gamma_1^n) \dots (\beta_1^1, \gamma_1^1) \varphi(L_1) F(V_3).$$

Pour cela on doit analyser $p \mid \varphi(L_1)$.

Nous allons introduire la notation suivante: si K est un complexe à 1 dimension, α et β deux arêtes de point commun p ^{*}), nous allons désigner par $(\alpha, \beta)K$ l'espace quotient de K , obtenu ainsi: on considère un isomorphisme linéaire $\tau: \alpha \rightarrow \beta$ tel que $\tau(p) = p$; on identifie chaque $q \in \alpha$ avec $\tau(q) \in \beta$.

On voit sans peine qu'il existe un diagramme commutatif dont toutes les flèches représentent des projections d'espace-quotient:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi(L_1) & \\ \xi \swarrow & & \searrow p \\ (x_1^N, y_1^N) \dots (x_1^1, y_1^1) \varphi(L_1) & \xrightarrow{\eta} & p(\varphi(L_1)) \end{array}$$

x_1^i, y_1^j sont différents deux à deux et leur réunion est justement $\varphi(L_1)$ (où ce qui revient à la même chose, $(x_1^N, y_1^N) \dots (x_1^1, y_1^1) \varphi(L_1)$ est contractible).

Considérons maintenant une courbe fermée simple Γ_1 , un sommet marqué A de Γ_1 et un espace quotient $(x_1^N, y_1^N) \dots (x_1^1, y_1^1) \Gamma_1$ contractible, avec les x, y différents deux à deux. Un raisonnement par induction, qui n'est pas difficile, prouve alors la chose suivante: il existe un opérateur égal à $(\bar{x}_1^N, \bar{y}_1^N) \dots (\bar{x}_1^1, \bar{y}_1^1)$, différent éventuellement de $(x_1^N, y_1^N) \dots (x_1^1, y_1^1)$ mais ayant les mêmes propriétés, tel que:

- les espaces quotients

$$\begin{aligned} & (x_1^N, y_1^N) \dots (x_1^1, y_1^1) \varphi(L_1) \\ & (\bar{x}_1^N, \bar{y}_1^N) \dots (\bar{x}_1^1, \bar{y}_1^1) \varphi(L_1) \end{aligned}$$

coïncident.

- pour aucun i , l'image canonique de A dans $(\bar{x}_1^{i-1}, \bar{y}_1^{i-1}) \dots (\bar{x}_1^1, \bar{y}_1^1) \varphi(L_1)$ n'épuise $\bar{x}_1^i \cap \bar{y}_1^i \subset (\bar{x}_1^{i-1}, \bar{y}_1^{i-1}) \dots (\bar{x}_1^1, \bar{y}_1^1) \varphi(L_1)$.

Cette remarque s'applique à la situation précédente, avec

$$\varphi(L_1) = \Gamma_1, \quad \varphi(P) = \varphi(Q) = A.$$

Soit $(\bar{x}_1^N, \bar{y}_1^N) \dots (\bar{x}_1^1, \bar{y}_1^1)$ l'opérateur correspondant. Alors, en posant $N = n$,

$$\beta_1^i = \psi_1 \varphi^{-1}(\bar{x}_1^i), \quad \gamma_1^i = \psi_1 \varphi^{-1}(\bar{y}_1^i)$$

on a c.q.f.d. .

^{*}) Pour des raisons qui deviendront très vite claires, nous allons considérer des complexes K , ayant des arêtes distinctes α, β telles que $\text{Fr } \alpha = \text{Fr } \beta$.

(On a fait ici un abus de langage, $\varphi^{-1}(\bar{x}_1^i)$ n'est pas univoquement déterminé. En réalité au lieu de $\varphi^{-1}(\bar{x}_1^i)$ il aurait fallu mettre $\varphi^{-1}(\bar{x}_1^i) \cap L_1$. De même pour $\bar{y}_1^i$).

En général, si une représentation spéciale $(F(V_3), \Phi)$ est donnée, et P, Q sont deux points de $Fr F(V_3)$ tels que $\Phi(P, Q) = 1$, il n'existe pas d'arc L_1 qui les relie comme dans l'énoncé du lemme 1.1. Nous allons modifier maintenant la représentation spéciale $(F(V_3), \Phi)$, un peu, de telle façon que L_1 puisse être construit.

LEMME 1.2. Soit $(F(V_3), \Phi)$ une représentation spéciale d'une variété compacte V_3 , sans bord. On peut construire, pour toute paire de points $P, Q \in Fr F(V_3)$ satisfaisant $\Phi(P, Q) = 1$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 F(V_3) & \xrightarrow{\varphi} & V_3 \\
 \psi'_1 \downarrow & & \downarrow p' \\
 F'(V_3) & \xrightarrow{\bar{\varphi}'} & V'_3 \\
 \tilde{\varphi}' \downarrow & \nearrow \varphi'' & \\
 (({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1), \dots, ({}^1\beta_1, {}^1\gamma_1))F'(V_3) & &
 \end{array}$$

tel que :

a) Toutes les flèches sont des applications d'espace-quotient. ψ'_1 et p' représentent un nombre fini d'opérations $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$. (Donc V'_3 est homéomorphe à V_3). Toute opération $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$ correspondant à ψ'_1 a la propriété que $\text{int } \sigma_2 \subset \text{int } F(V_3)$. $\varphi, \bar{\varphi}', \varphi''$ sont des projections correspondant à des représentations spéciales (en particulier, $(({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots ({}^1\beta_1, {}^1\gamma_1))F'(V_3)$ peut être réalisé comme sous-espace de E_3).

b) Les points $\tilde{\varphi}'\psi'_1(P)$ et $\tilde{\varphi}'\psi'_1(Q)$ de $Fr(({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots ({}^1\beta_1, {}^1\gamma_1))F'(V_3)$ peuvent être reliés par un arc

$$L'_1 \subset Fr(({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots ({}^1\beta_1, {}^1\gamma_1))F'(V_3)$$

qui a la propriété que $(\tilde{\varphi}'\psi'_1(P), \tilde{\varphi}'\psi'_1(Q))$ est la seule paire de points (x, y) , $x, y \in L'_1$ satisfaisant :

$$({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots ({}^1\beta_1, {}^1\gamma_1)\Phi(x, y) = 1.$$

$(\Phi', ({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots \Phi'$ sont les relations d'équivalence définies sur $F'(V_3)$, $(({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots F'(V_3)$, pour obtenir l'espace quotient sur V_3).

c) Une assertion analogue à l'assertion a) du lemme 1.1 est vraie, $(F'(V_3)$ au lieu de $\varphi(L_1)F(V_3)$) c.q.f.d.

DEMONSTRATION. Avant de commencer la démonstration, nous allons introduire les

notations suivantes : soit K_n un complexe pur n -dimensionnel, p un sommet de K_n . On désignera par $\Sigma_n(K_n, p)$ l'étoile de p , par $\Sigma_{n-1}(K_n, p)$ la frontière de l'étoile de p , $(\Sigma_n(K_n, p))$ est le cône de sommet p sur $\Sigma_{n-1}(K_n, p)$. De même, si σ_i est un simplexe de K_n , $\Sigma_n(K_n, \sigma_i)$ sera l'étoile de σ_i , $\Sigma_{n-1}(K_n, \sigma_i)$ la frontière de l'étoile de σ_i . $\Sigma_n(K_n, \sigma_i)$ est le cône sur $\Sigma_{n-1}(K_n, \sigma_i)$, de sommet le barycentre de σ_i . On désigne par $\Sigma^{n-i}(K_n, \sigma_i)$ la «section transversale» de $\Sigma_n(K_n, \sigma_i)$ par l'hyperplan de dimension $n-i$, passant par le barycentre de σ_i , transversal à σ_i . On désigne par $\Sigma^{n-i-1}(K_n, \sigma_i)$, l'ensemble $\Sigma^{n-i}(K_n, \sigma_i) \cap \Sigma_{n-1}(K_n, \sigma_i)$.

On a :

$$\Sigma_{n-1}(K_n, \sigma_i) = \Sigma^{n-i-1}(K_n, \sigma_i) * \partial \sigma_i.$$

(On désigne par $*$ le «joint» de deux espaces). Si $i = 1$,

$$\Sigma_{n-1}(K_n, \sigma_i) = S(\Sigma^{n-2}(K_n, \sigma_i)).$$

(On désigne par SX la suspension sur X , par CX le cône sur X . Quand on voudra préciser les pôles de la suspension sur le pôle du cône, on écrira $S_{p,q} X, C_p X$). Soit K_3 un complexe pur à trois dimensions, et un plongement $i : K_3 \rightarrow E_3$ donné. Soit Γ_1 un arc simple (courbe simple) de $Fr K_3$. On dira que Γ_1 est une γ -courbe (γ -arc) si la condition suivante est remplie pour chaque sommet p de Γ_1 :

Soient σ'_1, σ''_1 les deux segments de Γ_1 , incidents à p .

$$\partial \sigma'_1 = p - Q', \partial \sigma''_1 = p - Q''.$$

(On a évidemment $Q', Q'' \in Fr \Sigma_2(K_3, p) \subset \Sigma_2(E_3, p)$). Alors, sur la sphère $\Sigma_2(E_3, p)$ on a un arc l_1 joignant Q' et Q'' tel que :

$$(int l_1) \cap \Sigma_2(K_3, p) = \emptyset.$$

Je dis que toute paire de points P, Q sur la frontière d'un complexe pur, contractible K_3 , plongé dans E_3 (la notion de γ -arc est définie pour un complexe K_3 , doué d'un plongement dans E_3) peut être unie par un γ -arc simple de $Fr K_3$ après une éventuelle «modification non essentielle» du plongement i . (On verra dans ce qui s'ensuit ce qu'on entend par «modification non essentielle» du plongement i).

Nous allons esquisser la preuve de cette assertion. Les notations et les définitions que nous allons utiliser pour cela seront utiles plus tard aussi.

Comme d'habitude nous désignons par $X \vee Y$, la réunion de deux espaces X, Y qui ont exactement un seul point en commun. Considérons la décomposition :

$$K_3 = K_3^1 \vee K_3^2 \vee \dots K_3^g$$

en «composantes irréductibles». On dira qu'un plongement $j : K_3 \rightarrow E_3$ est obtenu par une modification non essentielle du plongement $i : K_3 \rightarrow E_3$ si pour chaque h ,

$$i|_{K_3^b} \quad \text{et} \quad j|_{K_3^b}$$

coïncident (à un homéomorphisme de E_3 près). (Voir figure 1).

Figure 1.



Considérons K_3^i . Une arête σ_1 de K_3^i sera appelée singulière (de multiplicité μ) si $\Sigma(K_3^i, \sigma_1)$ est non connexe (et a μ composantes connexes). On peut toujours supposer que si σ_1', σ_1'' sont singulières :

$$\Sigma_3(E_3, \sigma_1') \cap \Sigma_3(E_3, \sigma_1'') \subset \sigma_1' \cap \sigma_1''.$$

Soit

$$\tilde{K}_3^i = K_3^i \cup (\bigcup_{\sigma_1} \Sigma_3(E_3, \sigma_1))$$

où $\cup$ est étendu à tous les simplexes singuliers σ_1 de K_3^i . $\tilde{K}_3^i$ possède un plongement naturel dans E_3 , n'a plus d'arêtes singulières et peut être obtenu de K_3^i à l'aide de dilatations de Whitehead [28]. Si p est un sommet de $\tilde{K}_3^i$, $\Sigma_2(\tilde{K}_3^i, p)$ sera une sphère percée :

$$\Sigma_2(\tilde{K}_3^i, p) = S_2(p) - \bigcup_1^{\nu(p)} \text{int } D_2^i(p)$$

($D_2^i \cap D_2^j = \emptyset$). Si $\nu(p) \geq 2$ on dira que p est singulier. On peut toujours supposer que si p', p'' sont singuliers :

$$\Sigma_3(E_3, p') \cap \Sigma_3(E_3, p'') = \emptyset.$$

Soit

$$\tilde{\tilde{K}}_3^i = \tilde{K}_3^i \cup (\bigcup_p (\Sigma_3(E_3, p) - C(\text{int } D_2^2(p))))$$

où la somme $\bigcup_p$ est étendue à tous les points p singuliers. On voit bien que $\tilde{\tilde{K}}_3^i$ est une variété à bord ayant le même type d'homotopie que K_3^i (donc un disque à 3 dimensions), que $\tilde{\tilde{K}}_3^i$ peut être obtenue de $\tilde{K}_3^i$ à l'aide de dilatations de Whitehead, et que la paire $(E_3, \tilde{\tilde{K}}_3^i)$ est indépendante de la manière de numérotter les disques $D_2^i(p)$ à une homéomorphie de E_3 près. Nous allons définir maintenant $\tilde{K}_3$ et $\tilde{\tilde{K}}_3$.

Par définition :

$$\tilde{K}_3 = \tilde{K}_3^1 \vee \tilde{K}_3^2 \vee \dots \vee \tilde{K}_3^g.$$

On considère enfin $\tilde{K}_3$ et on lui applique des opérations analogues à celles qui ont fait passer de $\tilde{K}_3^b$ à $\tilde{\tilde{K}}_3^b$. On obtient $\tilde{\tilde{K}}_3$ qui sera un disque à trois dimensions.

Maintenant, pour construire un γ -arc reliant P, Q , il suffit de considérer le cas où P, Q appartiennent à une même composante irréductible, disons K_3^1 de K_3 . On peut de même supposer que $P, Q \in Fr K_3^1 \cap Fr \tilde{\tilde{K}}_3^1$.

On a des projections (rétractions de déformations) naturelles :

$$p_1 : \tilde{\tilde{K}}_3^1 \rightarrow \tilde{K}_3^1; p_2 : \tilde{K}_3^1 \rightarrow K_3^1.$$

On peut prouver facilement les deux assertions suivantes :

- Si L_1 est un arc simple de $Fr \tilde{\tilde{K}}_3^1 = S_2$, il existe une projection p'_1 (dépendant de L_1) isotope à p_1 , $p'_1 : \tilde{\tilde{K}}_3^1 \rightarrow \tilde{K}_3^1$, et un arc L'_1 de mêmes extrémités que L_1 , $L'_1 \subset Fr \tilde{\tilde{K}}_3^1$, L'_1 étant isotope à L_1 sur $Fr \tilde{\tilde{K}}_3^1$ (par une petite isotopie) tels que $int p'_1(L'_1) \subset Fr \tilde{K}_3^1$ ne contienne pas de points singuliers de $\tilde{K}_3^1$ et que $p'_1(L'_1)$ soit simple.

- Si L_1 est un arc simple de $Fr \tilde{K}_3^1$ il existe une projection p'_2 (dépendant de L_1) isotope à p_2 , $p'_2 : \tilde{K}_3^1 \rightarrow K_3^1$, et un arc $L'_1 \subset Fr \tilde{K}_3^1$ isotope à L_1 (par une petite isotopie), de mêmes extrémités que L_1 , tels que $p'_2(L'_1)$ soit simple.

En combinant ces propositions on prouve l'existence du γ -arc reliant P, Q .

Donc si la représentation spéciale $(F(V_3), \Phi)$ est donnée, à toute paire de points $P, Q \in Fr F(V_3)$, $\Phi(P, Q) = 1$, on peut associer un γ -arc $L_1 \subset Fr F(V_3)$ reliant P, Q . On peut supposer, sans perdre la généralité, que $\varphi(L_1) \subset V_3$, s'obtient de L_1 de la manière suivante : il existe sur L_1 $2n + 2$ points distincts :

$$p_o = P, p_1, \dots, p_n; q_o = Q, q_1, \dots, q_n$$

et $\varphi(L_1)$ est obtenu de L_1 en identifiant p_i à q_i , ($\varphi(p_i) = \varphi(q_i)$). Considérons deux petits segments de L_1 de sommet commun $p_1 : x_i, y_i$ (le même $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ de sommet commun q_i , $i \geq 1$). Il existe un espace-quotient de V_3, V'_3 obtenu par une suite finie d'opérations $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$, tel que :

- Pour aucune des $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$ considérées, on n'a $\varphi^{-1}(\sigma_2) \subset Fr F(V_3)$.

- Si p' est la projection canonique $p' : V_3 \rightarrow V'_3$, alors :

$$p'(\varphi(L_1)) = ((x_n, y_n) \dots (x_1, y_1)(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \dots (\bar{x}_1, \bar{y}_1) \varphi(L_1))$$

A V'_3 on associe une représentation spéciale $(F'(V_3), \Phi')$, de la même manière que $(\varphi(L_1)F(V_3), \varphi(L_1)\Phi)$ a été associée à $\varphi(L_1)V_3$ (lemme 1.1). On aura $m = 2n$,

$$\begin{aligned}
{}^i\beta_1 &= ((\bar{\varphi}')^{-1}\bar{x}_i) \cap \psi'_1(L_1) & i \leq n \\
{}^i\gamma_1 &= ((\bar{\varphi}')^{-1}\bar{y}_i) \cap \psi'_1(L_1) \\
{}^{n+i}\beta_1 &= ((\bar{\varphi}')^{-1}x_i) \cap \psi'_1(L_1) \\
{}^{n+i}\gamma_1 &= ((\bar{\varphi}')^{-1}y_i) \cap \psi'_1(L_1)
\end{aligned}$$

et l'on observe sans peine comment le fait que L_1 est γ -arc [ce qui fait que $\psi'_1(L_1)$ est un γ -arc (pour le plongement $F'(V_3) \subset E_3$ naturellement induit par $F(V_3) \subset E_3$)] implique que $({}^m\beta_1, {}^m\gamma_1) \dots F'(V_3)$ peut être naturellement plongé dans E_3 . En effet si $\alpha \cup \beta$ ($\alpha \cup \beta =$ le point p) est un γ -arc de $K_3 \subset E_3$, $(\alpha, \beta)K_3^{(*)}$ est naturellement plongé dans E_3 . L'arc L'_1 sera

$$\overline{\tilde{\varphi}'\psi'_1(L_1) \cup \bigcup_i \tilde{\varphi}'({}^i\gamma_1)}.$$

Le lemme est prouvé.

En combinant les lemmes 1.1 et 1.2 on peut montrer que :

LEMME 1.3. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions, ayant le type d'homotopie de S_3 . Il existe alors une représentation de $V_3 : ((\alpha_2^l, \beta_2^l) \dots (\alpha_2^1, \beta_2^1) F(V_3), \Phi)$ ($\dim \alpha_2^i = \dim \beta_2^i = 2$) telle que :

$$Fr(\alpha_2^l, \beta_2^l) \dots (\alpha_2^1, \beta_2^1) F(V_3) = 0^{**}).$$

Pour que la démonstration de 1.3 soit complète, il faut prouver encore le lemme suivant :

LEMME 1.4. Soit une variété tridimensionnelle V_3 quelconque et une représentation :

$$\begin{aligned}
&((\alpha_2^n, \beta_2^n)(x_1^n, y_1^n)(\alpha_2^{n-1}, \beta_2^{n-1})(x_1^{n-1}, y_1^{n-1}) \dots (\alpha_2^1, \beta_2^1)(x_1^1, y_1^1) F(V_3), \Phi) \\
&(\dim \alpha = \dim \beta = 2, \dim x = \dim y = 1; \text{ quelques unes des paires } (\alpha_2^i, \beta_2^i), (x_1^i, y_1^i) \\
&\text{peuvent être «vides»; d'une manière formelle une paire } (\xi, \eta) \text{ est «vide» dans} \\
&\dots(\rho, \rho')(\xi, \eta)(\pi, \pi') \dots \text{ si } \xi = \eta \text{ dans } (\pi, \pi') \dots).
\end{aligned}$$

Il existe alors une autre représentation de V_3

$$\begin{aligned}
&((\xi_2^{2n}, \eta_2^{2n})(\xi_2^{2n-1}, \eta_2^{2n-1}) \dots (\xi_2^1, \eta_2^1) F(V_3), \Phi) = \\
&= ((\alpha_2^n, \beta_2^n)(x_1^n, y_1^n) \dots F(V_3), \Phi).
\end{aligned}$$

DEMONSTRATION. Si toutes les paires (x_1^i, y_1^i) sont vides, il n'y a rien à prouver. S'il existe une paire $(x_1^{i_0}, y_1^{i_0})$ qui n'est pas vide, on fait l'opération suivante :

Désignons tout d'abord (par un abus de langage) $x_1^{i_0}, y_1^{i_0}$ deux simplexes de $F(V_3)$ dont les images canoniques dans

$$(\alpha_2^{i_0-1}, \beta_2^{i_0-1})(x_1^{i_0-1}, y_1^{i_0-1}) \dots F(V_3)$$

*L'espace quotient de K_3 obtenu en identifiant α, β par un homéomorphisme qui préserve tout $p \in \alpha \cap \beta$; ce symbole ne sera utilisé que si $\alpha \cap \beta = \phi$.

**Ceci revient à dire que

$$(\alpha_2^l \beta_2^l) \dots F(V_3) = V_3.$$

sont x_1^i, y_1^i . Considérons $\Sigma^2(F(V_3), x_1^i)$: c'est une réunion de disques à deux dimensions $d_2^1, d_2^2, \dots, d_2^X$, ayant exactement un point q en commun.

$$(\Sigma^2(F(V_3), x_1^i)) \cap (F(V_3) - \Sigma_3(F(V_3)x_1^i))$$

est une collection de segments $\sigma_1^i \subset Fr d_2^i - q$. Considérons un point $p \in Fr d_2^1 - (q \cup \sigma_1^1)$ et unissons-le, à l'intérieur de d_2^1 , par un arc λ_1 avec p . L'arc λ_1 coupe d_2^1 en deux disques, d_1' et d_1'' , d_1' contenant σ_1^1 .

Comme on l'a déjà remarqué

$$\Sigma_3(F(V_3), x_1^i) = S\Sigma^2(F(V_3), x_1^i) = (S(d_2' \cup d_2^2 \cup d_2^3 \cup \dots \cup d_2^X)) \cup Sd_2^n.$$

Les deux parties ont en commun les deux disques à deux dimensions dans lesquels $S\lambda_1$ s'est séparé : $(S\lambda_1)'_{i_0} \subset d_2'$ $(S\lambda_1)''_{i_0} \subset d_2^n$. Appelons :

$$\begin{aligned} (x_1^i)' &= (Sp)_{i_0}' \subset (S\lambda_1)'_{i_0} \\ (x_1^i)'' &= (Sp)_{i_0}'' \subset (S\lambda_1)''_{i_0}. \end{aligned}$$

Découpons Sd_1^n de $F(V_3)$ et recollons-le, mais en identifiant $(x_1^i)''$ avec y_1^i , non avec $(x_1^i)'$. En répétant la même opération avec tous les couples (l'opération a un sens même pour les couples vides) (x, y) , on obtient une nouvelle représentation spéciale $(F'(V_3), \Phi)$ et une représentation générale :

$$\begin{aligned} ((\alpha_2^n, \beta_2^n)((S\lambda_1)'_n, (S\lambda_1)''_n)(\alpha_2^{n-1}, \beta_2^{n-1}) \dots F'(V_3), \Phi') = \\ ((\alpha_2^n, \beta_2^n)(x_1^n, y_1^n) \dots (F(V_3), \Phi)). \end{aligned}$$

Le lemme 1.3 n'est pas complètement satisfaisant pour le but que nous avons en vue, nous allons l'améliorer un peu. Pour cela nous allons prouver plusieurs lemmes :

LEMME 1.5. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions, quelconque, $(F(V_3), \Phi)$ une représentation spéciale de V_3 . Il existe toujours une représentation spéciale de V_3 , $(F^*(V_3), \Phi^*)$ ayant les propriétés suivantes :

a) Si λ_1, λ_1' sont deux arêtes de $F(V_3)$ dont l'une au moins est singulière, telles que $\Phi(\lambda_1, \lambda_1') = 1$, alors $\lambda_1 \cap \lambda_1' = \emptyset$ (dans $F^*(V_3)$).

b) Il existe une représentation

$$\begin{aligned} ((\alpha_2^m, \beta_2^m) \dots (\alpha_2^1, \beta_2^1) F^*(V_3), \Phi^*) = (F(V_3), \Phi) \\ (\dim \alpha = \dim \beta = 2). \end{aligned}$$

DEMONSTRATION. Nous allons considérer le cas où $F(V_3)$ est irréductible, c'est-à-dire n'admet pas de décomposition :

$$F(V_3) = A_3 \vee B_3 \vee \dots$$

En effet le cas $F(V_3) = A_3 \vee B_3 \vee \dots$ peut être aisément ramené au cas irréductible de

la façon suivante : il suffit de transformer $F(V_3)$ de telle façon que les points de la forme $A_3 \cap B_3, \dots$, ne soient pas contenus dans des arêtes singulières. Considérons donc $p = A_3 \cap B_3$. Dans $\Sigma_3(A_3, p)$ on va considérer un disque d_2 dont la frontière ∂d_2 soit la réunion de deux arcs a_1, b_1 d'extrémités communes, et tel que :

- $\text{int } d_2 \subset \text{int } \Sigma_3(A_3, p)$
- $\text{int } a_1 \subset \text{int } \Sigma_3(A_3, p)$
- $b_1 \subset \text{Fr } \Sigma_3(A_3, p) \quad p \in \text{int } b_1$
- sauf au point p , $\Sigma_3(A_3, p)$ est variété à bord en tout point de d_2 .

Découpons d_2 en deux exemplaires d'_2, d''_2 ayant en commun a_1 . p se dédouble en $p' \in d'_2, p'' \in d''_2$. L'un de ces points, disons p' , n'est plus contenu dans aucun arc singulier. Identifions $p \in B_3$ avec p' et itérons cette construction. Après un nombre fini de telles opérations on a un complexe contractible de E_3 :

$$\rho(V_3) = A'_3 \vee B'_3 \vee \dots$$

tel que :

- $(\alpha^m, \beta^m) \dots \rho(V_3) = F(V_3) \quad \dim \alpha = \dim \beta = 2$
- aucun point de la forme $A'_3 \cap B'_3$ n'est contenu dans une arête singulière.

En utilisant toujours les notations de la démonstration du lemme 1.2, si l'on a deux complexes $K'_3, K''_3 \subset E_3$, tels que $K'_3 = \tilde{K}'_3, K''_3 = \tilde{K}''_3$, alors on peut définir sans aucune peine la «somme connexe» $K'_3 + K''_3$, en considérant des disques $d'_2 \subset \text{Fr } K'_3, d''_2 \subset \text{Fr } K''_3$ et en les identifiant. On doit seulement prendre garde à ce que ces disques ne contiennent aucune singularité. Nous allons distinguer deux cas :

Cas I : $\widetilde{F(V_3)} =$ somme connexe d'un nombre (fini évidemment) de cônes sur des sphères percées $(S_2 - \bigcup_1^n \text{int } D_2^i)$.

Cas II : $\widetilde{F(V_3)}$ n'est pas somme connexe ... (voir par exemple fig. 2).



Fig. 2

Nous allons commencer par faire la démonstration pour le cas I : analysons tout d'abord la manière dont on passe de $\widetilde{F(V_3)}$ à $F(V_3)$. Le passage peut être décrit ainsi : on considère dans $\widetilde{F(V_3)}$ un nombre de disques $d_2^1, d_2^2, \dots, d_2^h$, à deux dimensions, tels que :

$$\text{- int } d_2^i \subset \text{int } \widetilde{F(V_3)}, \text{Fr } d_2^i \subset \text{Fr } \widetilde{F(V_3)}$$

- $Fr d_2^i$ est décomposée pour chaque i en deux arcs α_1^i, β_1^i , d'extrémités communes. Ces extrémités peuvent être des points singuliers de $F(V_3)$ mais pas d'autres points.

- $d_2^i \cap d_2^j = \emptyset$ ou $d_2^i \cap d_2^j = \alpha_1^i = \alpha_1^j$ ou $d_2^i \cap d_2^j \subset \alpha_1^i \cap \beta_1^i \cap \alpha_1^j \cap \beta_1^j$.

- Pour passer de $\widetilde{F(V_3)}$ à $F(V_3)$ on fait l'opération suivante :

$$F(V_3) = \Omega(d_2^1, \alpha_1^1) \Omega(d_2^2, \alpha_1^2) \dots \widetilde{F(V_3)}$$

- Les $\Omega(d_2^j, \alpha_1^j)$ permutent.

En raisonnant par induction sur b , on prouve qu'il existe dans $F(V_3)$ un disque à deux dimensions δ_2^1 *) ayant les propriétés suivantes :

- $int \delta_2^1 \subset int F(V_3)$, $Fr \delta_2^1 \subset Fr F(V_3)$.

- En tout point de δ_2^1 , $F(V_3)$ est variété à bord, sauf exactement en un point $p^1 \in \delta_2^1$ qui est barycentre d'une arête singulière, soit σ_1^1 , de $F(V_3)$.

- δ_2^1 est transversale sur σ_1^1 . Donc, après une petite isotopie, $\delta_2^1 \cap \Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^1)$ est le cône de sommet p^1 sur une des composantes connexes, soit λ_1^1 , de $\Sigma^1(F(V_3), \sigma_1^1)$. Choisissons pour chaque arête singulière σ^1 de $F(V_3)$, une fois pour toutes, une extrémité $a(\sigma^1)$ et désignons l'autre extrémité par $b(\sigma^1)$.

Faisons maintenant les coupures suivantes :

- coupons $(\delta_2^1 - C_{p_1}(\lambda_1^1))$ en deux : $(\delta_2^1 - C_{p_1}(\lambda_1^1))'$ et $(\delta_2^1 - C_{p_1}(\lambda_1^1))''$ les deux parties ayant en commun λ_1^1 .

- coupons $C_{a(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1) \subset \Sigma_2(F(V_3), \sigma_1^1)$ en deux : $(C_{a(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1))'$ et $(C_{a(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1))''$. (Les deux parties ont en commun $a(\sigma_1^1)$).

- coupons de même $C_{b(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1) \dots$

- coupons σ_1^1 en deux :

$$(\sigma_1^1)' \subset S_{a(\sigma_1^1)b(\sigma_1^1)} C_{p_1}(\lambda_1^1)$$

$$(\sigma_1^1)'' \subset S_{a(\sigma_1^1)b(\sigma_1^1)} C_{p_1}(\Sigma^1(F(V_3), \sigma_1^1) - \lambda_1^1)$$

les deux parties ayant $a(\sigma_1^1)$ en commun. On obtient de cette façon un complexe contractible ${}_1F(V_3)$, contenu dans E_3 , ayant les propriétés suivantes :

- ${}_1F(V_3) = (S_{a(\sigma_1^1)b(\sigma_1^1)} C_{p_1}(\lambda_1^1)) \vee {}^1F(V_3)$

- $F(V_3)$ est un espace quotient de ${}_1F(V_3)$ de la forme suivante :

$$F(V_3) = ((\delta_2^1 - C_{p_1}(\lambda_1^1))', (\delta_2^1 - C_{p_1}(\lambda_1^1))'') \\ ((C_{a(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1))', (C_{a(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1))'') ((C_{b(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1))', (C_{b(\sigma_1^1)}(\lambda_1^1))'') \\ ((\sigma_1^1)', (\sigma_1^1)'') {}_1F(V_3)$$

*) On remarque aisément que l'hypothèse du cas I intervient dans la première étape de l'induction ($h = 1$).

- ${}^1F(V_3)$ entre dans le cas I.

- La somme des multiplicités des arêtes singulières de ${}^1F(V_3)$ = somme des multiplicités des arêtes singulières de $F(V_3) - 1$.

Ceci nous permet de continuer par induction, jusqu'à ce qu'on arrive à un complexe $\Psi(V_3)$ ayant les propriétés suivantes :

- $\Psi(V_3)$ est contractible et contenu dans E_3 .

- $F(V_3) = (\alpha, \beta)(\alpha', \beta') \dots \Psi(V_3)$ où $\alpha, \beta \dots$ sont de dimensions 1 et 2.

- Si $\lambda_1^i, \dots, \lambda_{\mu_i}^i$ sont toutes les composantes connexes de $\Sigma^1(F(V_3), \sigma_1^i)$, où σ_1^i est une arête singulière quelconque de $F(V_3)$ (p_1^i barycentre de σ_1^i), alors :

$$\begin{aligned} \Psi(V_3) = & S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)} C_{p_1^i}(\lambda_1^i) \vee S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)} C_{p_1^i}(\lambda_2^i) \\ & \vee \dots S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)} C_{p_1^i}(\lambda_{\mu_i}^i) \vee \dots \end{aligned}$$

On fait maintenant la construction suivante : on remplace dans $\Psi(V_3)$ exprimé sous la forme $\dots \vee \dots \vee \dots$ comme ci-dessus, chaque

$$S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)} C_{p_1^i}(\lambda_1^i) \vee \dots \vee S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)} C_{p_1^i}(\lambda_{\mu_i}^i)$$

par $\Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i)$. On obtient un nouvel espace $\Phi(V_3) = \Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i) \vee \dots$ ayant les propriétés suivantes :

$\alpha) \Phi(V_3)$ est contractible et contenu dans E_3 .

$\beta) F(V_3) = (\xi^m, \eta^m)(\xi^{m-1}, \eta^{m-1}) \dots \Phi(V_3)$

$$\dim \xi = \dim \eta = 2.$$

On a : $\Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i) \cap (\Phi(V_3) - \Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i)) = a(\sigma_1^i)$.

Faisons l'opération suivante : dans le triangle $C_{p_1^i}(\lambda_1^i)$ considérons une sécante $\bar{\lambda}_1^i$, parallèle à λ_1^i . Découpons $\Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i) \subset \Phi(V_3)$, par $S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(\bar{\lambda}_1^i)$ de telle façon que

$$\begin{aligned} (S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(\bar{\lambda}_1^i))' & \subset (\Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i) - S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(C_{p_1^i}(\lambda_1^i) - C_{p_1^i}(\bar{\lambda}_1^i))) \\ \text{et } (S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(\bar{\lambda}_1^i))'' & \subset S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(C_{p_1^i}(\lambda_1^i) - C_{p_1^i}(\bar{\lambda}_1^i)) \end{aligned}$$

aient en commun $b(\sigma_1^i)$ exactement.

De plus, on fait la coupure de telle façon que :

$$\begin{aligned} (\Phi(V_3) - \Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i)) \cap (\Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i) - S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(C_{p_1^i}(\lambda_1^i) - C_{p_1^i}(\bar{\lambda}_1^i))) &= \phi \\ (\Phi(V_3) - \Sigma_3(F(V_3), \sigma_1^i)) \cap S_{a(\sigma_1^i)b(\sigma_1^i)}(C_{p_1^i}(\lambda_1^i) - C_{p_1^i}(\bar{\lambda}_1^i)) &= a(\sigma_1^i). \end{aligned}$$

On a obtenu de cette façon un nouveau complexe $\pi(V_3)$, jouissant des propriétés α, β , et tel que, de plus, deux arêtes singulières quelconques de $\pi(V_3)$ soient disjointes.

On voit alors aisément que pour le cas I le lemme est prouvé ($\pi(V_3) = F^*(V_3)$ etc.).

Nous allons prouver maintenant que le cas II peut être réduit au cas I. Si K_3 est un complexe à trois dimensions, et σ_1 une arête de K_3 , on désignera par $\Omega(\sigma_1)K_3$ l'espace quotient de K_3 obtenu en contractant σ_1 en un point. On voit, comme précédemment (quand on a décrit le passage de $\widetilde{F(V_3)}$ à $F(V_3)$) que

$$(*) \quad F(V_3) = \Omega_k \Omega_{k-1} \dots \Omega_1 D_3$$

où chaque Ω_i est un $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$ ou un $\Omega(\sigma_1)$. On voit aussi qu'après une éventuelle subdivision, les σ_2, σ_1 peuvent être pris arbitrairement petits. (Je veux dire que si K'_3 est une subdivision de K_3 , il existe un espace $\Omega_b \Omega_{b-1} \dots \Omega_1 K'_3$ qui est combinatoirement équivalent à ΩK_3). D'autre part, si K_3 est un cône, $\Omega_b \Omega_{b-1} \dots \Omega_1 K_3$ est toujours dans le cas I. Dans (*) on peut toujours supposer que D_3 est une triangulation du disque à trois dimensions, qui par des contractions de Whitehead, se réduit à un point. il existe alors un complexe contractible de $E_3, \mathcal{D}_3$, ayant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{D}_3 = A_3 \vee B_3 \vee \dots H_3$$

où chaque $A, B, \dots$ est un cône.

$$(\alpha^m, \beta^m) \dots \mathcal{D}_3 = D_3 \quad \dim \alpha = \dim \beta = 2.$$

$$\text{On a } *) : F(V_3) = \Omega_k \Omega_{k-1} \dots (\alpha^m, \beta^m) \dots \mathcal{D}_3 = (\alpha^m, \beta^m) \dots \Omega_k \Omega_{k-1} \dots \mathcal{D}_3 = \\ = (\alpha^m, \beta^m) \dots (\Omega_k^1 \dots \Omega_1^1 A_3 \vee \Omega_k^2 \dots \Omega_1^2 B_3 \vee \dots).$$

Chaque ensemble $\Omega_k^1 \dots \Omega_1^1 A_3, \dots$ entre, comme nous l'avons remarqué, dans le cas I. Le raisonnement peut se continuer maintenant sans peine, afin de prouver le lemme.

Le lemme 1.5 une fois prouvé, nous allons faire un dernier changement afin d'amener la représentation du lemme 1.3 à une forme définitive.

LEMME 1.6. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions admettant une représentation

$$((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

telle que :

$$a) Fr(\alpha^m, \beta^m) \dots F(V_3) = 0.$$

$$b) \dim \alpha = \dim \beta = 2.$$

c) Si λ_1, λ'_1 sont deux arêtes de $F(V_3)$, dont l'une au moins est singulière, telles que $\Phi(\lambda_1, \lambda'_1) = 1$, alors $\lambda_1 \cap \lambda'_1 = \phi$ (dans $F(V_3)$).

Dans ces conditions il existe une autre représentation

$$((\xi^n, \eta^n) \dots (\xi^1, \eta^1) * F(V_3), * \Phi)$$

*) Pour assurer la commutativité des $\Omega, (\alpha, \beta)$ on doit prendre soin que les α, β et σ_2 (σ_2 de $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$) soient transversaux.

ayant les propriétés a) - c), et de plus la propriété suivante :

d) Toute arête singulière de $*F(V_3)$ a la multiplicité 2. Pour toute arête singulière λ_1 de $*F(V_3)$ il existe exactement une autre arête de $*F(V_3)$ (évidemment toujours singulière) $\bar{\lambda}_1$, telle que $*\Phi(\lambda_1, \bar{\lambda}_1) = 1$. Si l'on désigne par $*\varphi: *F(V_3) \rightarrow V_3$ la projection canonique, $*\varphi(\Sigma_3(*F(V_3), \lambda_1))$ et $*\varphi(\Sigma_3(*F(V_3), \bar{\lambda}_1))$ sont transversales dans V_3 .

DEMONSTRATION. Désignons par $\varphi: F(V_3) \rightarrow V_3$ la projection canonique. Soient $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_p$ les arêtes de V_3 telles que $\varphi^{-1}(\nu_i)$ contient au moins une arête singulière. Désignons les arêtes de $F(V_3)$ qui constituent $\varphi^{-1}(\nu_i)$ par $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{k_i}^i$. Désignons les composantes connexes de $\Sigma^1(F(V_3), \lambda_j^i)$ par λ_j^i , leurs barycentres par lp_j^i , l'ensemble fini de points $\cup_l (lp_j^i)$ par π_j^i . Evidemment $D_2^i = \Sigma^2(V_3, \nu_i) = \cup_j \varphi(\Sigma^2(F(V_3), \lambda_j^i))$. Considérons dans D_2^i , les complexes $C_o(\varphi(\pi_j^i)) = 0$, ($0 = D_2^i \cap \nu_i$). En écartant un peu de 0 chacun des pôles des cônes $C_o(\varphi(\pi_j^i))$, c'est-à-dire en remplaçant chaque cône $C_o(\varphi(\pi_j^i))$ par un cône $C_{x_j^i}(\varphi(\pi_j^i))$ ($x_j^i \neq 0, \in D_2^i$), on peut faire en telle sorte que pour chaque $q \in C_{x_j^i}(\varphi(\pi_j^i)) \cap C_{x_l^i}(\varphi(\pi_l^i))$ il existe un segment de $C_{x_j^i}(\dots)$ et un segment de $C_{x_l^i}(\dots)$ qui se coupent en $q(x_j^i \neq x_l^i)$. Il est facile maintenant de construire des complexes à deux dimensions $\omega_j^i \subset D_2^i$, ayant les propriétés suivantes :

- $\cup_j \omega_j^i = D_2^i$, $\text{int } \omega_j^i \cap \text{int } \omega_l^i = \emptyset$
- $\omega_j^i \cap \text{Fr } D_2^i = \varphi(\Sigma^2(F(V_3), \lambda_j^i)) \cap \text{Fr } D_2^i$
- $C_{x_j^i}(\varphi(\pi_j^i)) \subset \omega_j^i$; par des contractions de Whitehead ω_j^i peut-être réduit à $C_{x_j^i}(\dots)$.
- $C_{x_j^i}(\dots)$ est contenu à l'intérieur de ω_j^i , sauf pour ceux de ses points qui appartiennent aussi aux autres $C_{x_l^i}(\dots)$. Ces points sont les seuls où ω_j^i n'est pas une variété à bord. Au voisinage d'un tel point, ω_j^i est un cône sur deux segments disjoints.

- pour tout point «singulier» q (voir ci-dessus), de ω_j^i , il existe un autre ω_l^i , auquel ce point appartient. Evidemment, q est aussi singulier pour ω_l^i , et en q , ω_j^i et ω_l^i se coupent. Désignons par $\partial \omega_j^i = \omega_j^i \cap \text{Fr } D_2^i$. On voit bien que $S \partial \omega_j^i$ est naturellement isomorphe à $S \Sigma^1(F(V_3), \lambda_j^i)$. Considérons le complexe :

$$*F(V_3) = F(V_3) - \cup \Sigma_3(F(V_3), \lambda_j^i) + \cup S \omega_j^i$$

où $S \Sigma^1(F(V_3), \lambda_j^i) \subset F(V_3) - \cup \Sigma_3(F(V_3), \lambda_j^i)$ est identifiée, par l'isomorphisme naturel ci-dessus, avec $S \partial \omega_j^i \subset S \omega_j^i$. On voit sans peine que $*F(V_3)$ est contractible et naturellement plongé dans E_3 . De plus il existe une représentation spéciale de V_3 : $(*F(V_3), *\Phi)$ où $*\Phi$ est définie comme suit : pour $\text{Fr } F(V_3) \cap \text{Fr } *F(V_3)$, $*\Phi$ coïn-

cide avec Φ_i . Pour $\cup S\omega_j^i \subset *F(V_3)$, $*\Phi$ est l'identification qui fait de $\cup_j S\omega_j^i$, $\Sigma_3(V_3, \nu^i)$. Φ et $*\Phi$ coïncident évidemment sur la partie commune de leur domaine de définition. $(\xi^n, \eta^n) \dots (\xi^1, \eta^1)$ est obtenu à partir de $(\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1)$ en remplaçant chaque paire (α^i, β^i) , $\alpha^i \subset \Sigma_3(F(V_3), \lambda_j^i)$, $\beta^i \subset \Sigma_3(F(V_3), \lambda_j^i)$ par $(x_1^i, x_1^i) \dots (x_f^i, y_f^i)$ où $(1 \dots f)$ est un ordre convenablement choisi.

$$\cup x = \omega_j^i \cap \omega_j^i, \subset \omega_j^i$$

$$\cup y = \omega_j^i \cap \omega_j^i, \subset \omega_j^i$$

On voit bien que toutes les propriétés requises sont satisfaites. En combinant les lemmes 1.3, 1.4 et 1.5 on arrive au résultat final suivant :

LEMME 1.6. Soit V_3 une variété compacte à 3 dimensions, ayant le même type d'homotopie que S_3 . Il existe alors une représentation de V_3 :

$$((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

ayant les propriétés suivantes :

$$1^\circ) \dim \alpha = \dim \beta = 2.$$

$$2^\circ) Fr(\alpha^m, \beta^m) \dots F(V_3) = 0.$$

3°) Tout côté singulier de $F(V_3)$ a la multiplicité 2. Pour tout côté singulier λ_1 de $F(V_3)$ il existe exactement un autre λ'_1 , tel que $\Phi(\lambda_1, \lambda'_1) = 1$. λ'_1 est aussi singulier et les images canoniques de $\Sigma_3(F(V_3), \lambda_1)$, $\Sigma_3(F(V_3), \lambda'_1)$ dans V_3 se traversent.

$$4^\circ) \text{ Si } \lambda_1 \text{ et } \lambda'_1 \text{ sont deux arêtes comme ci-dessus, } \lambda_1 \cap \lambda'_1 = \phi \text{ (dans } F(V_3)).$$

CHAPITRE II

**QUELQUES RESULTATS DE LA THEORIE DES IMMERSIONS.
APPLICATIONS.**

Soient V_n, W_k deux variétés différentiables^{*)}. Une application différentiable $f: W_k \rightarrow V_n$ sera dite une «immersion» si la matrice jacobienne est de rang partout maximum ($k \leq n$). Deux immersions $f, \varphi: W_k \rightarrow V_n$ seront dites «régulièrement homotopes» s'il existe une homotopie f_t qui les relie, telle que :

- pour chaque t , f_t est une immersion.
- l'homotopie induite pour le fibré tangent est continue.

Nous allons appeler (k, r) - W_k -figure, l'objet suivant :

- une immersion $\varphi: W_k \rightarrow V_n$.
- r champs transversaux, indépendants, de classe C^∞ , dans le fibré normal à $\varphi(W_k): f_1 \dots f_r$ ($k+r \leq n$).

Une homotopie régulière de deux (k, r) - W_k -figures $(\varphi^0; f_1^0 \dots f_r^0), (\varphi^1; f_1^1 \dots f_r^1)$ sera par définition l'objet suivant :

- une homotopie régulière (d'immersions) φ^t reliant φ^0, φ^1 .
- une homotopie de champs transverses $f_i^t; \dots f_r^t$, reliant $(f_i^0), (f_i^1); (f_i^t)$ sera un ensemble de r champs transverses, de classe C^∞ , indépendants, du fibré normal de $\varphi^t(W_k)$.

Une (k, r) - S_k -figure sera dite «basique» si $(\varphi; (f_i))$ sont donnés sur le pôle sud de S_k . De la même façon, on dira qu'une homotopie régulière de (k, r) - S_k -figures est basique, si elle est basique pour chaque valeur de t .

Soient F et G deux (k, r) - S_k -figures basiques et $E_{k+r}(V_n)$ le fibré des $(k+r)$ -repères linéairement indépendants, tangents à V_n ^{**)}. Par une homotopie régulière suffisamment petite, on peut faire en telle sorte que les $(\varphi; (f_i))$ de F , (respectivement de G), coïncident sur un petit voisinage, W , difféomorphe à un disque, du pôle sud de S_k . F, G induisent deux applications :

$$(S_k - \text{int } W) \rightarrow E_{k+r}(V_n)$$

coïncidant sur $Fr W$. Les k premiers vecteurs sont un repère tangent à $\varphi_F(S_k - (\text{int } W))$, respectivement à $\varphi_G(S_k - \text{int } W)$; les r autres vecteurs sont des f_i respectifs.

^{*)} Sauf mention contraire différentiable signifie C^∞ ..

^{**)} non orientés. La fibre sur la variété de Stiefel $V_{n, k+r}$ non orientée ($V_{n, n-1}$ = l'espace projectif, non la sphère).

De cette façon, on a associé à la paire (F, G) une sphère singulière, à point de base, de $E_{k+r}(V_n)$. La classe d'homotopie de cette sphère sera désignée par :

$$\Omega^r(F, G) \in \pi_k(E_{k+r}(V_n))$$

Si V_n = espace euclidien, $r = 0$, on obtient l'invariant Ω de Smale.

THEOREME 2.1. Deux (k, r) - S_k -figures basiques F, G sont régulièrement homotopes (par une homotopie régulière basique) si et seulement si $\Omega^r(F, G) = 0$. Si $\alpha \in \pi_k(E_{k+r}(V_n))$ et une (k, r) - S_k -figure basique F sont données, il existe une (k, r) - S_k -figure basique G , telle que $\Omega^r(F, G) = \alpha$.

On peut définir d'une façon naturelle une structure de groupe (abélien si $k > 1$ ou si V_n est parallélisable) sur les (k, r) figures basiques. Cette structure est compatible avec l'homotopie basique et en passant au quotient on obtient justement $\pi_k(E_{k+r}(V_n))$.

Si $\pi_r(E_{k+r}(V_n)) = 0$ tout ce qui est dit plus haut reste vrai, en supprimant le mot «basique».

DEMONSTRATION. La démonstration suit celle de S. Smale [19] .

Soit $\mathcal{D}_k^r$ l'espace des (k, r) - D_k -figures basiques (point de base sur ∂D_k) avec la C^p topologique ($p \geq 2$), et $\mathcal{S}_k^r$ l'espace des (k, r) - S_k -figures basiques. Il existe une projection naturelle :

$$\pi : \mathcal{D}_k^r \rightarrow \mathcal{S}_{k-1}^{r+1}.$$

obtenue en prenant la restriction à la frontière $S_{k-1} = \partial D_k$ et en ajoutant le champ transverse radial sur cette frontière.

On va prouver tout d'abord que $(\mathcal{D}_k^r, \pi, \mathcal{S}_{k-1}^{r+1})$ a la propriété du relèvement des homotopies pour les cubes. On va utiliser le théorème suivant :

THEOREME 2.2. (Smale [19], Thom [26]). $(\mathcal{D}_k^0, \pi, \mathcal{S}_{k-1}^1)$ a la propriété du relèvement des homotopies pour les cubes.

Soit maintenant une homotopie $h_t : P \rightarrow \mathcal{S}_{k-1}^{r+1}$ où $t \in [0, 1]$ et P est un cube. Supposons qu'il existe une application $\bar{h} : P \rightarrow \mathcal{S}_k^r$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathcal{S}_k^r \\ & \searrow h_0 & \swarrow \pi \\ & \mathcal{S}_{k-1}^{r+1} & \end{array}$$

Soit $\pi' : \mathcal{S}_{k-1}^{r+1} \rightarrow \mathcal{S}_{k-1}^1$ obtenue en supprimant les r derniers champs^{*)}. Le

^{*)} dans la définition de π on prend soin que le champ radial soit le premier, donc qu'il ne soit effacé par π' .

théorème 2.2 nous assure l'existence d'une application $b'_t : P \rightarrow \mathbb{G}_k^o$, recouvrant $\pi' \circ b_t$. b'_0 sera $\bar{b}$ sans champs transverses. Ce qu'on doit faire, c'est construire un système indépendant de r champs, transversaux, de classe C^∞ , pour chaque $b'_t(p)$, dépendant d'une façon continue de (t, p) , coïncidant avec les champs déjà donnés pour $t = 0$, $x \in \partial b'_t(p)$, $((t, p)$ quelconques).

Soit $X = [0, 1] \times P \times D_k$. Soient de même Y le fibré des k -plans tangents à V_n et Z le fibré de base X , obtenu en considérant les paires constituées par un k -plan tangent et r vecteurs tangents à V_n , au même point (les vecteurs sont indépendants et transversaux au plan). On a une application naturelle $\Psi : X \rightarrow Y$ obtenue en considérant le plan tangent à $b'_t(p)(D_k)$ en $b'_t(p)(x)$. Soient $\pi_1 : Z \rightarrow Y$ la projection, Z' le fibré induit sur X par Ψ , π_2 la projection de ce fibré. L'application fibrée $Z' \rightarrow Z$, qui recouvre Ψ est de classe C^∞ dans les variables de D_k .

On a considéré ci-dessus une certaine section au-dessus de $(0 \times P \times D_k) \cup ([0, 1] \times P \times S_k) = X_1$ du fibré trivial (Z', X) . Elle se prolonge à une section $s(x')$ de X . Si $s(x')$ peut être construite de telle façon qu'elle soit de classe C^∞ dans les variables qui correspondent à D_k , la démonstration est terminée. (Car on attache alors le repère $s(t, p, x)$ à $b'_t(p)(x)$).

On remarque que la fibre de Z' est la variété de Stiefel $V_{n-k, r}$. Considérons un prolongement $C^\infty : \Psi^* : V_{n-k, r} \rightarrow E_N$ (N grand). Soient T_N le voisinage tubulaire normal de $\Psi^*(V_{n-k, r})$ et π^* la projection.

Considérons :

$$\Psi^* \circ s : X_1 \rightarrow E_N.$$

Ecrivons cette application en utilisant les coordonnées de $E_N : x_i = F_i(t, p, x)$ $i = 1, \dots, N$. Nous allons considérer deux voisinages assez petits, $\bar{\mathcal{U}}, \mathcal{U}$ de X_1 dans X , tels que $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U} - \bar{\mathcal{U}}$ sépare X_1 de $X - \mathcal{U}$. Sur $\mathcal{U}$, chaque F_i peut être prolongée de telle façon que :

- sur $\mathcal{U} - \bar{\mathcal{U}}$, $F_i \in C^\infty$.
- $F_i \in C^\infty$ dans les variables D_k .

On peut supposer que l'application $\mathcal{U} \rightarrow E_N$ ainsi obtenue se factorise : $\mathcal{U} \rightarrow T_N \subset E_N$. En composant avec π^* on a une section au dessus de $\mathcal{U}$, avec les propriétés voulues. A partir de là, on peut construire sans peine $s(x')$, de classe C^∞ dans D_k .

Reste à prouver que le prolongement de chaque F_i est possible. Pour cela on va considérer dans $D_k \times [0, 1]$ deux voisinages disjoints de $(S_k \times [0, 1])$, $(D_k \times 0)$: $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2$ définis respectivement par des surfaces de classe C^∞ se coupant le long de $S_k \times 0$. Dans $\mathcal{U}'_1$ on emboîtera une surface «parallèle» à $Fr \mathcal{U}'_1$, qui ait en commun

avec $Fr \mathcal{O}'_1, S_k \times 0$. Elle engendrera un nouveau voisinage $\mathcal{O}'_1 \subset \mathcal{O}_1$ tel que $\mathcal{O}'_1 - \mathcal{O}_1$ sépare $S_k \times [0, 1]$ du reste. D'une manière analogue on construit $\mathcal{O}'_2 \subset \mathcal{O}_2$.

On va prolonger tout d'abord F_i sur les ensembles $\mathcal{O}'_1 \times P = \mathcal{O}_1, \mathcal{O}'_2 \times P = \mathcal{O}_2$, avec les propriétés de différentiabilité requises. Après cela, il sera facile de prolonger F_i autour de «l'angle» $S_k \times P \times 0$, de façon C^∞ (à l'exception de cet angle, bien entendu), et d'une façon compatible avec les prolongements déjà existants sur $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$.

Nous allons étudier seulement le prolongement sur $\mathcal{O}_1$, car celui sur $\mathcal{O}_2$ est aisé. Recouvrons tout d'abord $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_1$ avec une suite d'ouverts U_i tels que : le recouvrement soit localement fini, les U_i s'accumulent vers $S_k \times 0$, $\cup (U_i)$ soit assez proche de $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_1$ et enfin :

$$(\cup (U_i) \cap ((S_k \times [0, 1]) \cup (D_k \times 0))) = \phi.$$

On considère ensuite des ouverts V_i , tels que $V_i \supset \bar{U}_i$ et que le recouvrement $\{V_i\}$ ait les propriétés du recouvrement $\{U_i\}$.

Sur D_k on va introduire un système de coordonnées polaires : $\tau(\text{rayon}) y_1, \dots, y_{k-1}$ (coordonnées de S_{k-1}). Prolongeons tout d'abord $F_i(x)$ définie sur $S_k \times [0, 1] \times P$ sur $\mathcal{O}_i \cup (UV_i)$ en posant :

$$\bar{F}_i(t, p, r, y_1, \dots, y_{k-1}) = F_i(t, p, y_1, \dots, y_{k-1})$$

$\bar{F}_i$ est évidemment de classe C^∞ dans les variables de D_k . On peut modifier $\bar{F}_i$ sur $V_1, V_1 \cup V_2, V_1 \cup V_2 \cup V_3, \dots$ de telle façon que les sections modifiées, $(\bar{F}_i)_1, (\bar{F}_i)_2, \dots$ aient les propriétés suivantes :

- $(\bar{F}_i)_j$ est aussi proche que l'on veut de $\bar{F}_i$.
- $(\bar{F}_i)_j = \bar{F}_i$ sur $\bar{C}(V_1 \cup V_2 \cup \dots V_j)$
- $(\bar{F}_i)_j \in C^\infty$ dans les variables de D_k .

Supposons $(\bar{F}_i)_j$ déjà construite. $(\bar{F}_i)_{j+1}$ peut être obtenue ainsi : on considère une $\Phi(t, p, x) \in C^\infty$ qui soit suffisamment proche de $\bar{F}_i$ sur $\bar{V}_{j+1}$ et $\Psi(t, p, x) = 1$ sur $\bar{U}_{j+1}$ et $\Psi(t, p, x) = 0$ sur $\bar{C} \bar{V}_{j+1}$ ($\Psi \in C^\infty$). On pose :

$$(\bar{F}_i)_{j+1} = (1 - \Psi)(\bar{F}_i)_j + \Psi \Phi$$

C.Q.F.D.

Nous avons donc prouvé que $(\mathcal{D}_k^r, \pi, \mathcal{S}_{k-1}^{k+1})$ a la propriété du relèvement des des homotopies pour les cubes.

Soit maintenant $\Gamma_k^r(f_o)$ l'espace des (k, r) - D_k -figures telles que $d\varphi, \varphi, f_1, \dots, f_r$, coïncident sur S_{k-1} avec les $d\varphi, \varphi, f_1, \dots, f_r$ d'une (k, r) - D_k -figure donnée, f_o .

De même soit $(\Gamma_k^r(f_o))'$ l'espace des applications $D_k \rightarrow E_{k+r}(V_n)$ coïncidant sur S_{k-1} avec l'application suivante :

$$x = (x_1, \dots, x_k) \rightarrow \left(\frac{\partial \varphi^o}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi^o}{\partial x_k}, f_1^o, \dots, f_r^o \right)$$

où $x_1, \dots, x_k$ sont des coordonnées cartésiennes $(\varphi^o, f_1^o, \dots, f_r^o) = f_o$. On a une application naturelle

$$\Phi^r : \Gamma_k^r(f_o) \rightarrow (\Gamma_k^r(f_o))'$$

définie par :

$$\Phi^r(\varphi, f_1, \dots, f_r) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, f_1, \dots, f_r \right).$$

On va prouver que Φ^r est une équivalence homotopique faible, c'est-à-dire qu'elle a les deux propriétés suivantes :

- elle met en correspondance biunivoque les composantes connexes ^{*)} de $\Gamma_k^r(f_o), (\Gamma_k^r(f_o))'$.
- elle induit un isomorphisme des groupes d'homotopie, pour chaque composante.

Tout d'abord, d'une façon analogue aux $\Gamma \dots$, nous pouvons définir des espaces $S_k^r(g_o), (S_k^r(g_o))'$ en considérant des (k, r) - S_k -figures avec $(\varphi, f_1, \dots, f_r)$ fixés sur l'hémisphère sud, au lieu de (k, r) - D_k -figures avec $(\varphi, f_1, \dots, f_r)$ fixés sur la frontière.

D'une façon absolument analogue à Φ on définit une application :

$$\Psi^{r+1} : S_k^{r+1}(g_o) \rightarrow (S_k^{r+1}(g_o))'$$

On va prouver les deux assertions suivantes :

- a) Si $\Phi^r : \Gamma_k^r(f_o) \rightarrow (\Gamma_k^r(f_o))'$ est une équivalence homotopique faible, alors $\Psi^{r+1} : S_k^{r+1}(g_o) \rightarrow (S_k^{r+1}(g_o))'$ est une équivalence homotopique faible.
- b) Si $\Psi^{r+1} : S_k^{r+1}(g_o) \rightarrow (S_k^{r+1}(g_o))'$ est une équivalence homotopique faible, alors $\Phi^r : \Gamma_k^r(f_o) \rightarrow (\Gamma_k^r(f_o))'$ est une équivalence homotopique faible.

Preuve de a) : On considère $\Gamma^* \subset \Gamma$, sous-espace constitué par les immersions telles que les jets de tout ordre sur S_{k-1} coïncident avec ceux de f_o . On voit sans peine que l'inclusion $\Gamma^* \subset \Gamma$ est une équivalence homotopique faible. (Car les jets d'ordre supérieur à 1 sont déterminés, à une homotopie près, par les jets d'ordre 1). Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S_k^{r+1} & \xrightarrow{\Psi} & (S_k^{r+1})' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ (\Gamma^*)'_k & \xrightarrow{\Phi} & (\Gamma_k^r)' \end{array}$$

^{*)} par arcs, bien entendu.

où p, p' sont obtenues en considérant les $\Phi, f_1, \dots, f_{r+1}$ qui définissent $e \in S_k^{r+1}$ restreints à l'hémisphère nord, et en supprimant f_1 (de même pour p'). a) résulte de la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés et du «lemme des cinq» si l'on prouve que $(S, p, \Gamma^*), (S', p', \Gamma')$ sont des espaces fibrés de Serre (c'est-à-dire qui admettent le relèvement des homotopies pour les cubes) et que Ψ induit un homéomorphisme des fibres. On prouve ces deux assertions.

Preuve de b) : On observe que l'espace E de toutes les (k, r) - D_k -figures basiques est contractible. C'est un fibré de Serre sur S , dont la fibre F est faiblement homotopiquement équivalente à Γ . Donc, la suite exacte d'homotopie entraîne que les applications horizontales supérieures du diagramme commutatif suivant sont des bimorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_i(S) & \xleftarrow{\pi} & \pi_i(E, F) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{i-1}(F) & \xrightarrow{\alpha_1} & \pi_{i-1}(\Gamma) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \bar{\Phi} & & \downarrow \Phi \\ \pi_i(S') & \xleftarrow{\pi'} & \pi_i(E', F') & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_{i-1}(F') & \xrightarrow{\alpha'_1} & \pi_{i-1}(\Gamma') \end{array}$$

En même temps (explication de la ligne horizontale inférieure) on considère les espaces $E', F', S', \dots$ obtenus en considérant les applications dans E . On montre facilement que (E', π', S') est un fibré de Serre, que sa fibre a le même type d'homotopie que Γ' , et que E' est contractible.

Donc, les flèches horizontales inférieures sont des bimorphismes aussi. Le diagramme étant commutatif, b) en résulte.

En combinant a) et b), une induction facile, dont la première étape est triviale, prouve le théorème 2.1.

Une conséquence immédiate du théorème 2.1. est la suivante :

THEOREME 2.2. Soient $n > k+1, h+r \leq n, e \in S_{k-1}^{r+1}$ la projection par π d'un élément donné, une fois pour toutes de $\mathbb{D}_k^r$. Soit de même, $f \in S_{k-1}^{r+1}$ quelconque. On a $f \in \pi(\mathbb{D}_k^r)$ si et seulement si $\Omega^r(e, f) = 0$.

Le Ω^{n-1} pour une $(1, n-1)$ - S_1 -figure, f de E_n peut être interprété aussi de la façon suivante : en prenant un champ tangent à S_1 , on a une application naturelle, associée à f , $S_1 \rightarrow O_n$, donc un élément de $\pi_1(O_n)$.

Cet élément est $\Omega^{n-1}(f, e)$.

Si l'on considère une $(1, n-2)$ - S_1 -figure de E_n , f , on lui associe aisément une $(1, n-1)$ - S_1 -figure $\bar{f}$. On a

$$\Omega^{n-1}(\bar{f}) = \Omega^{n-2}(f)$$

(On utilise le fait que les groupes fondamentaux du groupe orthogonal et de l'espace

projectif sont tous les deux Z_2).

A l'aide de 2.1 on va prouver le théorème suivant :

THEOREME 2.3. *Toute variété n -dimensionnelle, parallélisable, ouverte, peut être immergée dans E_n (Hirsch [4] (voir aussi [15])).*

DEMONSTRATION. Si V_n est donnée, on désignera par Σ_k son squelette k -dimensionnel, par R_k une partie de Σ_k , par R_k^1 le voisinage tubulaire de R_k . Je dis que, pour toute V_n , variété ouverte, il existe un $R_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$ tel que :

- Si τ^i est un simplexe de R_{n-1} de dimension $i < n-1$, il existe dans R_{n-1} un simplexe σ^{i+1} ayant τ^i comme face.

- V_n admet R_{n-1} comme rétract de déformation, et la rétraction prend une forme particulière simple (voir ce qui suit).

- $R_{n-1}^1 = V_n$ (à un difféomorphisme près).

On prouvera l'existence de R_{n-1} tout d'abord pour le cas particulier où $V_n = \text{int } W_n$, W_n étant compacte, à bord. ($\partial W_n = F_{n-1}$). On peut supposer (W_n, F_{n-1}) munie d'une triangulation compatible avec la structure différentiable [35]. On définit par induction une suite de sous-complexes de W_n : $K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_f$ tels que :

- $K_0 = W_n$

- $\dim K_i = n \quad (i < f)$

- $K_{i-1} - K_i = \sigma_i = \text{simplexe de dimension } n$

- $\dim K_f = n-1$

- K_i admet K_{i-1} comme rétract de déformation et la rétraction a une structure particulièrement simple (qui sera explicitée ci-dessous).

Supposons K_{i-1} déjà construit. Pour des raisons homologiques évidentes, si $\dim K_{i-1} = n$, il existe au moins un simplexe σ_i de K_{i-1} , de dimension n , qui ait une face $\dot{\sigma}_{i-1}$ telle que aucun autre simplexe n -dimensionnel de K_{i-1} n'admette $\dot{\sigma}_{i-1}$ comme face. On pose $K_i = \overline{K_{i-1} - \sigma_i}$; la déformation est définie ainsi : on fait passer par chaque point de $\dot{\sigma}_{i-1}$ un segment parallèle à la médiane qui correspond à $\dot{\sigma}_{i-1}$ et on la prolonge jusqu'à ce qu'il rencontre $Fr \sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}$. Ces segments définissent la déformation sur $\sigma_i \subset K_{i-1}$. Sur le reste, elle est définie par l'identité. Le cas général se prouve ainsi : Si V_n est ouverte, on peut montrer qu'il existe une suite de variétés compactes à bord, contenues dans V_n : $V_{i_1, i_2, \dots, i_f}$ telles que :

- $\cup V = V_n$, les intérieurs des V étant disjoints.

- $Fr V_{i_1 \dots i_f}$ a $N+1$ composantes connexes. L'une est collée à $Fr V_{i_1, \dots, i_{f-1}}$, les autres aux $Fr V_{i_1 \dots i_{f+1}}$ ($i_{f+1} = 1, \dots, N$). Les V forment un ensemble filtrant, auquel on peut appliquer, par induction, le raisonnement précédent.

Pour prouver notre théorème il suffit de montrer que R'_{n-1} peut être immergé dans E_n .

Soient $R_0, R_1, \dots$ les squelettes consécutifs de R_{n-1} . On peut supposer que R_1 est un bouquet de cercles $C_1, C_2, \dots$ de point commun P .

Le fibré tangent (principal) de V_n a la forme $V_n \times V_{n,n} = V_n \times O_n$. Soit p la projection $p : V_n \times O_n \rightarrow O_n$. Le fibré tangent à R'_1 est $R'_1 \times O_n$. Nous allons construire une immersion $\Psi : R'_1 \rightarrow E_n$ telle que les deux applications suivantes soient homotopes :

- $R'_1 \times O_n \rightarrow O_n$, obtenue en considérant l'application fibrée : $R'_1 \times O_n \rightarrow V_n \times O_n$ et en composant avec p .

$$R'_1 \times O_n \xrightarrow{\Psi} V_n \times O_n \xrightarrow{p} O_n.$$

Pour cela il suffit que l'immersion Ψ ait la propriété suivante : pour chaque cycle γ_1 de R_1 on considère une $(1, n-2)$ - S_1 -figure $\rho(\gamma_1)$ de support γ_1 . $\rho(\gamma_1)$ est complètement caractérisée par un $\Omega^{n-2} \in \pi_1(E_{n-1}(V_n)) = \pi_1(V_n) \times \pi_1(V_{n,n-1})$.

En considérant la projection sur le second facteur, on a un élément

$$p^* \Omega^{n-2} \in \pi_1(V_{n,n-1}) = Z_2$$

caractérisant $\rho(\gamma_1)$. On demande que

$$p^* \Omega^{n-2}(\rho(\gamma_1)) = p^* \Omega^{n-2}(\Psi(\rho(\gamma_1))).$$

Pour cela, il suffit de considérer les $(1, n-2)$ - S_1 -figures ξ_i , attachées aux C_i , et de demander que la condition énoncée précédemment soit satisfaite pour chaque ξ_i .

En effet, une $(1, n-2)$ - S_1 -figure quelconque $\rho(\gamma_1)$ de R'_1 satisfait à :

$$\rho(\gamma_1) = \xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_f}$$

et un calcul immédiat mène au résultat.

On choisit donc une $(1, n-2)$ - S_1 -figure quelconque de support C_i . On considère sur chaque C_i le point P_i , diamétralement opposé à P . Par chaque P_i , il passe une cellule à $n-1$ dimensions D_{n-1}^i transversale à C_i et à ξ_i .

En coupant R'_1 suivant chaque D_{n-1}^i on obtient une cellule D_n qu'on plonge dans E_n . Reste à recoller les deux exemplaires de D_{n-1}^i . On peut toujours le faire de telle façon que la $(1, n-2)$ - S_1 -figure de E_n , obtenue à partir de ξ_i , soit caractérisée par un élément de $\pi_1(V_{n,n-1})$ donné d'avance. Ψ est ainsi construite.

Supposons maintenant que les simplexes de dimensions > 1 aient été ordonnés suivant une famille d'indices appartenant à un ensemble bien ordonné M , de telle façon que, si $\dim \sigma_i > \dim \sigma_j$, $i > j$.

Soit $T_x = R_1 \cup$ (tous les simplexes de R_{n-1} d'indice $\leq x$).

Par induction on va construire une suite d'immersions $\Psi_x : T_x \rightarrow E_n$, telles que :

$$1^\circ . \Psi_o = \Psi$$

$$2^\circ . \text{ Si } \tau < x, \Psi_x|_{T'_\tau} = \Psi_\tau$$

3°. Les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} T'_x \times 0_n & \xrightarrow{\Psi} & V_n \times 0_n \xrightarrow{q} 0_n \\ T'_x \times 0_n & \xrightarrow{x} & E_n \times 0_n \xrightarrow{q} 0_n \end{array}$$

(ce sont deux applications du fibré (principal) tangent à T'_x , $T'_x \times 0_n$ dans 0_n) sont homotopes, par une homotopie compatible avec les homotopies analogues pour les indices inférieurs. On va procéder par induction.

Si $x-1$ n'existe pas, il n'y a aucune difficulté. Si $x-1$ existe, $T_x - T_{x-1}$ est un simplexe de dimension i, σ , dont les faces sont dans T_{x-1} .

Soient dans σ deux sphères de dimensions $i-1$, de classe C^∞ , approximant $Fr \sigma : \sigma_1, \sigma_2$ ($\sigma_1 \subset \text{int } \sigma_2$). Soit $\sigma' = \sigma \times E_{n-1}$. Ψ_x est définie sur $(\sigma - \text{int } \sigma_2)' = (\sigma - \text{int } \sigma_1) \times E_{n-1}$ où elle coïncide avec Ψ_{x-1} (qui est définie sur $(\sigma - \text{int } \sigma_1)'$). Soit α une petite cellule $(i-1)$ -dimensionnelle de σ_1 . Soit une petite sphère σ_3 , de classe C^∞ , telle que :

$$\sigma_3 \cap \sigma_2 = \alpha; \sigma_3 \subset \text{int } \sigma_2 - \text{int } \sigma_1$$

$(\sigma - \text{int } \sigma_1)'$ induit deux $(i-1, n-i+1)$ - S_{i-1} -figures basiques γ_2 et γ_3 , de supports σ_2 et σ_3 (les premiers champs sont transversaux, induits par σ). Il existe une $(i, n-i)$ - D_i -figure $\bar{\gamma}_3$, de support $\text{int } \sigma_3$, contenue dans $(\sigma - \text{int } \sigma_1)'$ telle que $\pi \bar{\gamma}_3 = \gamma_3$.

Dans $T'_x \subset V_n$, $\Omega^{n-i+1}(\gamma_2, \gamma_3) = 0$ car γ_2, γ_3 sont basiquement régulièrement homotopes, par une homotopie de support $\text{int } \sigma_2 - \text{int } \sigma_3 \subset \sigma$. Donc $p^* \Omega^{n-i+1}(\gamma_2, \gamma_3) = 0$, ce qui donne une certaine homotopie dans $V_n, n = 0_n$. Considérons :

$$q : E_n \times 0_n \rightarrow 0_n.$$

Vu les conditions de compatibilité pour Ψ_{x-1} , l'homotopie dont on vient de parler peut être considérée pour $\Psi_{x-1}(\gamma_2), \Psi_{x-1}(\gamma_3)$. Donc

$$q^* \Omega^{n-i+1}(\Psi_{x-1}(\gamma_2), \Psi_{x-1}(\gamma_3)) = 0.$$

Ce qui donne, vu que q^* est un bimorphisme :

$$\Omega^{n-i+1}(\Psi_{x-1}(\gamma_2), \Psi_{x-1}(\gamma_3)) = 0 \text{ (dans } E_n \text{)}.$$

$$\text{Mais } \Psi_{x-1}(\gamma_3) \in \text{Im } \pi, \text{ donc } \Psi_{x-1}(\gamma_2) \in \text{Im } \pi.$$

Il existe donc une $(i, n-i)$ - D_i -figure β (de E_n), telle que $\pi(\beta) = \Psi_{x-1}(\gamma_2)$. On peut considérer que β coïncide, sur un voisinage de σ_2 , avec $\Psi_{x-1}(\text{int } \sigma_2)$. On supposera donc que $(\text{support } \beta) \cup \Psi_{x-1}(\sigma - \text{int } \sigma_2)$ définit Ψ_x . On étend cela immédia-

tement pour σ^1 . 1^0 , 2^0 sont triviales. Les deux applications de 3^0 sont obtenues ainsi :

la première : on écrit que dans V_n , il existe une $(i, n-i)$ - D_i -figure prolongeant la $(i-1, n-i+1)$ -figure γ_2 et qui contient γ_3 (définition de σ). Dans $E_n \times 0_n$, cela devient une homotopie régulière de $\Psi_{x-1}(\gamma_2), \Psi_{x-1}(\gamma_3)$ à laquelle on ajoute le cou-
vercle $\pi(\Psi_{x-1}(\bar{\gamma}_3)) = \gamma_3$. (C'est ce qui nous a permis d'écrire, en E_n :

$$\Omega^{n-i+1}(\Psi_{x-1}(\gamma_2), \Psi_{x-1}(\gamma_3)) = 0).$$

la seconde : est obtenue en « intégrant » l'application précédente puis en « diffé-
rentiant » de nouveau (c'est une $\beta^1 \times 0_n \rightarrow E_n \times 0_n \rightarrow 0_n$). On voit facilement que ces
deux applications sont homotopes. 2.2 est donc prouvé.

En combinant 2.2 avec un théorème classique de Stiefel on a :

THEOREME 2.3. (J.H.C. Whitehead [32]). Toute variété tridimensionnelle V_3 , orien-
table, ouverte, peut être immergée dans E_3 .

Soit f une (i, k) - S_i -figure d'une variété parallélisable V_n . Soit q^* la projec-
tion :

$$q^* : \pi_i(E_{i+k}(V_n)) = \pi_i(V_n) \times \pi_i(V_{n, i+k}) \rightarrow \pi_i(V_{n, i+k}).$$

On désignera $q^* \Omega^i(f)$ par $\omega^i(f)$.

DEFINITION 2.1. Soit V_3 une variété tridimensionnelle orientable, quelconque. Soit V_3^i
son squelette i -dimensionnel, $(V_3^i)'$ un voisinage tubulaire de ce squelette. Une appli-
cation

$$F : (V_3^2) \cap (V_3^1)' \rightarrow E_3$$

qui satisfait aux conditions suivantes, sera dite une « immersion des orientations » :

1^0 . F est une immersion

2^0 . Pour tout sommet $q \in (V_3^2) \cap (V_3^1)'$, les deux paires d'espaces suivantes
sont homéomorphes :

$$(\Sigma_2(V_3, q), V_3^2 \cap (V_3^1)' \cap \Sigma_2(V_3, q)) = (\Sigma_2(E_3, F(q)), F(V_3^2 \cap (V_3^1)' \cap \Sigma_2(E_3, F(q)))$$

On suppose que $(V_3^1)'$ est suffisamment proche de V_3^1 pour que V_3^1 soit un retract de
déformation (par des contractions de Whitehead) de $(V_3^1)' \cap V_3^2$.

3^0 . Pour toute $(1, 1)$ - S_1 -figure de V_3 contenue dans $(V_3^1)' \cap V_3^2$, f , on a :

$$\omega^1(f) = \omega^1(F(f)).$$

Au point 3^0 il y a une petite observation à faire : les $(1, 1)$ - S_1 -figures comme f auront,
non pas un champ transverse C^∞ , mais un champ transverse continu seulement (et C^∞
par morceaux). Un théorème d'approximation facile montre que toute discussion relative
aux (i, k) - M_i -figures à champs transverses continus se ramène au cadre des (i, k) -
 M_i -figures à champs transverses C^∞ .

Une autre observation encore : si V_3 est une immersion des orientations

$$F : (V_3^1)' \cap V_3^2 \rightarrow E_3$$

sont donnés, et si $(g)V_3$ est une subdivision de V_3 , on peut facilement construire une immersion des orientations

$$F(g) : ((g)V_3^1)' \cap (g)V_3^2 \rightarrow E_3$$

qui prolonge F .

Enfin, le théorème 2.3 permet de trouver immédiatement le théorème suivant :

THEOREME 2.4. *Toute variété V_3 orientable possède une immersion des orientations.*

Après avoir étudié un peu de plus près la représentation de la fin du chapitre précédent, on aura l'occasion d'appliquer ces théorèmes.

DEFINITION 2.2. Soit V_3 une variété compacte à 3 dimensions et

$$(\dots (\alpha, \beta) (\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$$

une représentation de V_3 . On dira que la paire (α, β) est une « paire régulière » de

$$((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$$

si $\alpha \cap \beta \subset Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ est contractible.

Considérons maintenant la représentation

$$((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

du lemme 1.6 (V_3 a le type d'homotopie de S_3). Nous allons étudier d'un peu plus près cette représentation. Prouvons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.5. *Il existe une représentation*

$$(({}^p\overline{\Omega}_2, {}^p\overline{\Omega}'_2) \dots ({}^1\overline{\Omega}_2, {}^1\overline{\Omega}'_2) ({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots ({}^1\Omega_2, {}^1\Omega'_2) F(V_3), \Phi) =$$

$$((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

ayant les propriétés suivantes :

1°. $({}^i\Omega_2, {}^i\Omega'_2)$ est toujours une paire régulière.

2°. $X_2 = Fr({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots F(V_3)$ a l'une des deux structures suivantes :

Cas I : $X_2 = S_2$; alors $p = 1$, ${}^1\overline{\Omega}_2, {}^1\overline{\Omega}'_2$ sont deux hémisphères de S_2 , ${}^1\overline{\Omega}_2 \cap {}^1\overline{\Omega}'_2 = \text{équateur}$.

Cas II : X_2 a la description suivante :

C'est un espace quotient $(\bigcup_1^N M_2^i) \cup (\bigcup_1^p \tilde{M}_2^j) / \Phi$

où : $M_2^j = (\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1)$

$$\tilde{M}_2^j = ((x^2 + y^2 \leq 4) - (((x-1)^2 + y^2 < \frac{1}{2}) \cup ((x+1)^2 + y^2 < \frac{1}{2})).$$

Soient $C^{1,i}, C^{2,i}$ les deux cercles frontières de M_2^i . Sur chaque M_2^i on considère deux génératrices ($x = \theta y$) marquées : ${}^i g', {}^i g''$. ${}^i g', {}^i g''$ divisent M_2^i en deux rectangles $\delta^i, {}^i \delta'$, ayant deux côtés opposés en commun.

D'une façon analogue, on considère dans $\tilde{M}_2^i$ les trois « génératrices » obtenues en prenant $(y = 0) \cap \tilde{M}_2^i$. Ces trois génératrices divisent $\tilde{M}_2^i$ en deux hexagones $i\tilde{\delta}, i\tilde{\delta}'$ ayant trois côtés non adjacents en commun. Soient $\tilde{C}^{1,i}, \tilde{C}^{2,i}, \tilde{C}^{3,i}$ les trois cercles frontière de $\tilde{M}_2^i$. Sur chaque cercle $C^{l,m}$ ou $\tilde{C}^{p,q}$, les génératrices déterminent exactement un couple de points que nous allons appeler : points générateurs. La relation d'équivalence a la forme suivante : on partage l'ensemble $\{C^{l,m}, \tilde{C}^{p,q}\}$ en classes, composées de quatre ou de deux éléments. Les cercles de la forme $\tilde{C}$ n'entrent que dans des classes à 2 éléments et il n'y a pas de classe formée seulement par des cercles $\tilde{C}$. Pour deux cercles d'une même classe on se donne toujours un homéomorphisme préservant l'ensemble des points générateurs. S'il y a plusieurs cercles dans une même classe, a, b, c et si $h_{a,b}$ est l'homéomorphisme allant de b à a (a, b, c sont de la forme C ou $\tilde{C}$), alors :

$$h_{a,b} = h_{a,c} \circ h_{c,b}$$

On identifie tous les couples de points $(p, h_{a,b}(p))$ pour obtenir X_2 . Enfin :

$$(p\bar{\Omega}_2, p\bar{\Omega}'_2) \dots ({}^1\bar{\Omega}_2, {}^1\bar{\Omega}'_2) = (P\tilde{\delta}, P\tilde{\delta}') \dots ({}^1\tilde{\delta}, {}^1\tilde{\delta}') (N\delta, N\delta') \dots ({}^1\delta, {}^1\delta').$$

DEMONSTRATION. Soit x un simplexe à deux dimensions quelconque de $Fr F(V_3)$. Soient x_1, x_2, x_3 ses trois côtés, p_1, p_2, p_3 leurs barycentres, x_1^*, x_2^*, x_3^* trois segments, contenus dans $int x_1, int x_2, int x_3$, de centres p_1, p_2, p_3 . On choisit les x_i^* , de telle manière que les conditions suivantes de compatibilité soient satisfaites :

- Si x, y sont deux simplexes à deux dimensions de $Fr F(V_3)$, tels que $x_i = y_j$, alors :

$$x_i^* = y_j^*.$$

- Si x, x' sont deux simplexes à deux dimensions de $Fr F(V_3)$, tels que $\Phi(x, x') = 1$ et si $T_{x, x'}(x_i) = x'_j$ (voir définition 1.1) alors :

$$T_{x, x'}(x_i^*) = (x'_j)^*.$$

Choisissons pour chaque simplexe x et pour chaque paire $(i, j) = (j, i)$ un quadrilatère contenu dans x, x^{ij} tel que :

$$Fr x^{ij} \cap Fr x = x_i^* \cup x_j^*.$$

De même, choisissons pour chaque x , un hexagone contenu dans $x, \hat{x}$, tel que :

$$Fr \hat{x} \cap Fr x = x_1^* \cup x_2^* \cup x_3^*.$$

On fera ce choix de telle façon qu'il soit compatible avec les $T_{x, x'}$.

Considérons maintenant

$$((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

Soit i_1 le plus petit indice pour lequel $(\alpha^{i_1}, \beta^{i_1})$ n'est pas une paire régulière de $((\alpha^{i_1-1}, \beta^{i_1-1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$. $\alpha^{i_1} \cap \beta^{i_1}$ est alors composé de deux ou trois composantes connexes contractibles (voir lemme 2.6 ci-dessus).

En tous cas, en analysant tous les cas qui peuvent se présenter (2 sommets communs, un sommet et une arête opposée, trois sommets) on voit que, ou bien il existe une paire $(\alpha^{i_1})^{lm}, (\beta^{i_1})^{np}$ telle que :

$$-\Phi((\alpha^{i_1})^{lm}, (\beta^{i_1})^{np}) = 1$$

$$-(\alpha^{i_1} - (\alpha^{i_1})^{lm}, \beta^{i_1} - (\beta^{i_1})^{np}) = \text{une suite finie de paires régulières,}$$

ou bien que :

$$-(\alpha^{i_1} - \hat{\alpha}^{i_1}, \beta^{i_1} - \hat{\beta}^{i_1}) \text{ est une suite finie de paires régulières. (On a évidemment } \Phi(\hat{\alpha}^{i_1}, \hat{\beta}^{i_1}) = 1).$$

On voit sans peine que

dans le premier cas :

$$\begin{aligned} & ((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi) = \\ & = ((\alpha^{i_2})^{lm}, (\beta^{i_2})^{np}) (\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^{i_1} - (\alpha^{i_1})^{lm}, \beta^{i_1} - (\beta^{i_1})^{np}) \dots F(V_3), \Phi) \end{aligned}$$

et dans le second :

$$\begin{aligned} & ((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi) = \\ & ((\hat{\alpha}^{i_1}, \hat{\beta}^{i_1}) (\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^{i_1} - \hat{\alpha}^{i_1}, \beta^{i_1} - \hat{\beta}^{i_1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi). \end{aligned}$$

On considère maintenant le plus petit indice i_2 , tel que $(\alpha^{i_2}, \beta^{i_2})$ soit une paire non régulière de

$$((\alpha^{i_2-1}, \beta^{i_2-1}) \dots (\alpha^{i_1} - (\alpha^{i_1})^{lm}, \beta^{i_1} - (\beta^{i_1})^{np}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

respectivement de :

$$((\alpha^{i_2-1}, \beta^{i_2-1}) \dots (\alpha^{i_1} - \hat{\alpha}^{i_1}, \beta^{i_1} - \hat{\beta}^{i_1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi).$$

C.Q.F.D.

Par induction, on arrive à une représentation

$$((A^n, B^n) \dots (A^1, B^1) (\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi) = ((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° . (α^i, β^i) est une paire régulière de

$$((\alpha^{i-1}, \beta^{i-1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi) \quad (i \leq m).$$

2° - Si $\pi(1) \dots \pi(n)$ est une permutation quelconque :

$$((A^{\pi(n)}, B^{\pi(n)}) \dots (A^{\pi(1)}, B^{\pi(1)}) (a^m, b^m) \dots (a^1, b^1) F(V_3), \Phi)$$

a un sens et est égal à

$$((A^n, B^n) \dots (A^1, B^1) (a^m, b^m) \dots (a^1, b^1) F(V_3), \Phi).$$

3° - Pour chaque A^i, B^i il existe une paire de simplexes à deux dimensions x, y de $Fr F(V_3)$ tel que l'une des deux situations suivantes se présente :

$$- A^i = x^{lm}, B^i = y^{np}$$

$$- A^i = \hat{x}, B^i = \hat{y}$$

De plus :

1° $\Phi(x, y) = 1$, (évidemment $\Phi(A^i, B^i) = 1$ et A^i, B^i se correspondent par $T_{x, y}$) et $A^i \cap B^i \subset Fr A^i \cap Fr B^i$.

2° Dans $(a^m, b^m) \dots (a^1, b^1) F(V_3)$,

$$Fr A_i \cap int x = Fr B_i \cap int y.$$

Considérons la permutation $\pi'(1) \dots \pi'(n)$ pour laquelle si $j \leq K$ ($0 \leq K < n$) (A^j, B^j) est une paire régulière de

$$((A^{j-1}, B^{j-1}) \dots (a^m, b^m) \dots (a^1, b^1) F(V_3), \Phi).$$

avec K maximum (par abus de notation, on a supposé que $(A^n, B^n) \dots (A^1, B^1)$ sont les (A^i, B^i) écrits avec la permutation $\pi'(i)$). En posant

$$\begin{aligned} q &= m + K, & p &= n - K \\ ({}^i\Omega_2, {}^i\Omega'_2) &= (a^i, b^i) & i &\leq m \\ ({}^{m+i}\Omega_2, {}^{m+i}\Omega'_2) &= (A^i, B^i) & i &\leq K \\ ({}^i\overline{\Omega}_2, {}^i\overline{\Omega}'_2) &= (A^{K+i}, B^{K+i}) \end{aligned}$$

on a alors C.Q.F.D. Pour que la démonstration soit complète, on a à prouver encore le lemme suivant :

LEMME 2.6. Soit V_3 une variété à trois dimensions, compacte, sans bord, et $(F(V_3), \Phi)$ une représentation spéciale de V_3 . Supposons qu'on ait une représentation spéciale de V_3 :

$$((\alpha^m, \beta^m) (\alpha^{m-1}, \beta^{m-1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$1^\circ. \dim \alpha = \dim \beta = 2$$

$$2^\circ. (\alpha^i, \beta^i) \text{ pour } i \leq m-1 \text{ est une paire régulière de}$$

$$((\alpha^{i-1}, \beta^{i-1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi).$$

3°. dans $((\alpha^{m-1}, \beta^{m-1}) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), \Phi)$ on a :

$$Fr \alpha^m = Fr \beta^m.$$

alors $Fr(\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3) = 0$.

DEMONSTRATION. Le lemme est immédiat vu que

$$H_3((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), Z) = Z.$$

On va étudier maintenant un peu de plus près les paires régulières.

DEFINITION 2.2. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions et

$$(\dots (\alpha, \beta) (\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$$

une représentation. On dira que (α, β) est une paire «canonique» de $((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$ s'il a l'une des trois formes suivantes :

-Forme canonique I : α, β sont deux simplexes à 2 dimensions, et la paire (α, β) est régulière. De plus, aucune arête de α, β n'est singulière et aucune ligne singulière n'est incidente à $\alpha \cup \beta - \alpha \cap \beta$.

-Forme canonique II : il existe tout d'abord dans $(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ deux simplexes à deux dimensions ω_2, ω'_2 ayant en commun exactement une arête λ_1 , tels que

$$(\alpha', \beta') \dots \Phi(\omega_2, \omega'_2) = 1.$$

Soient P, P' les sommets de ω_2, ω'_2 , opposés à λ_1 . Sauf dans P, P' , $(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ est une variété à bord, dans tout point de $\omega_2 \cup \omega'_2$. Considérons des petits voisinages

$$\Sigma_3(P) = \Sigma_3((\alpha', \beta') \dots F(V_3), P)$$

$$\Sigma_3(P') = \Sigma_3((\alpha', \beta') \dots F(V_3), P')$$

(on a choisi une subdivision suffisamment fine pour que $\Sigma_3(P) \cap \Sigma_3(P') = \emptyset$).

Il n'existe pas deux points distincts x, y de $\Sigma_3(P)$, respectivement de $\Sigma_3(P')$, tels que

$$(\alpha', \beta') \dots \Phi(x, y) = 1.$$

(En d'autres termes la restriction de la projection canonique :

$$(\alpha', \beta') \dots F(V_3) \rightarrow V_3$$

est un monomorphisme).

$\Sigma_3(P)$ contient des lignes singulières $\lambda^1, \dots, \lambda^M$

$\Sigma_3(P')$ contient des lignes singulières $\lambda'^1, \dots, \lambda'^M$.

On a : $(\alpha', \beta') \dots \Phi(\lambda^i, \lambda^i) = 1$ et il n'y a pas d'autres paires de lignes singulières satisfaisant ces conditions. Soient $\bar{\lambda}^i$ les moitiés des λ^i incidentes à P , de même $\bar{\lambda}^i$ les moitiés des λ^i incidentes à P' .

$$(\alpha', \beta') \dots \Phi(\bar{\lambda}^i, \bar{\lambda}^i) = 1$$

Soient dans $Fr \Sigma_3((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \bar{\lambda}^i), A^i, B^i, C^i, D^i$ les quatre simplexes à deux dimensions qui contiennent $\bar{\lambda}^i (A^i \cap B^i = \dots = \bar{\lambda}^i)$.

De même A^i, B^i, C^i, D^i dans $Fr \Sigma_3((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \bar{\lambda}^i)$. On suppose que :

$$(\alpha', \beta') \dots \Phi(A^i, A^i) = \dots = 1.$$

Dans ces conditions, l'élément (α, β) de forme canonique II est :

$$(\alpha, \beta) = (A^M, A^M) \dots (A^1, A^1) (B^M, B^M) \dots \\ (C^M, C^M) \dots (D^M, D^M) \dots (\omega_2, \omega_2)$$

Forme canonique III :

$$(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$$

contient quatre tétraèdres : $\tau_3^1, \tau_3^2, \tau_3^3, \tau_3^4$; sur chaque τ_3^j on considère une arête marquée λ^j , et l'ensemble des faces de τ_3^j , opposées à λ^j , qu'on désigne par α^j . Soient $\beta^{1,i}, \beta^{2,i}$ les faces de τ_3^i , incidentes à λ^i . Dans $(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$:

$$\lambda^2 = \lambda^1, \lambda^3 = \lambda^4 \\ (\cup \tau_3^j) \cap (\overline{\cup \tau_3^j}) = \cup \alpha^j.$$

On considère des décompositions

$$\lambda^i = \lambda^{1,i} + \lambda^{2,i} + \lambda^{3,i} \\ (\partial \lambda^i = a - b, \partial \lambda^{1,i} = a - a_1, \partial \lambda^{2,i} = a_1 - a_2, \partial \lambda^{3,i} = a_2 - b).$$

Dans $(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ on a : $\lambda^{i,1} = \lambda^{i,2}, \lambda^{i,3} = \lambda^{i,4}$ ($i = 1, \dots, 4$). De plus $\lambda^{1,1} = \lambda^{1,3}, \lambda^{3,1} = \lambda^{3,3}, (\alpha', \beta') \dots \Phi(\lambda^{2,1}, \lambda^{2,3}) = 1$ ($Fr \lambda^{2,1} = Fr \lambda^{2,3}$).

Soient $(\beta^{i,j})'$ des cellules contenues dans $\beta^{i,j}$, telles que

$$(\beta^{i,j})' \cap Fr \beta^{i,j} = \lambda^{2,j}.$$

Soient A^1, B^1, C^1, D^1 les quatre simplexes à deux dimensions de $Fr \Sigma_3((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \lambda^{2,1})$ ayant $\lambda^{2,1}$ comme arête, de même A^3, B^3, C^3, D^3 . On peut supposer que :

$$A^1 = (\beta^{1,1})', \\ A^3 = (\beta^{1,3})',$$

de plus

$$(\alpha', \beta') \dots \Phi(A^1, A^3) = \dots = 1.$$

Dans $(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$

$$(\tau_3^1 \cup \tau_3^2) \cap (\tau_3^3 \cup \tau_3^4) = \overline{\beta^{1,1} - (\beta^{1,1})'} = \overline{\beta^{1,3} - (\beta^{1,3})'},$$

(Ces deux cellules sont identifiées).

Dans ces conditions, une paire (α, β) de forme canonique III sera :

$$(\alpha, \beta) = (D^1, D^3)(C^1, C^3)(B^1, B^3)(A^1, A^3).$$

On va donner une forme canonique pour les paires non régulières :

DEFINITION 2.3. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions et

$$(\dots (\alpha, \beta)(\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$$

une représentation. (α, β) est une paire non régulière de $((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$. On dira qu'elle est «canonique» (paire non régulière non canonique de $((\alpha', \beta') \dots F(V_3), \Phi)$) si elle a l'une des formes suivantes :

- Forme canonique IV : α, β sont deux quadrilatères de $Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$, ayant dans $Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$, deux côtés opposés en commun. ($\alpha \cup \beta$ = couronne circulaire).

- Forme canonique V : α, β sont deux disques de $Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ ayant dans $Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ toute leur frontière en commun ($\alpha \cup \beta = S_2$).

On peut énoncer le lemme suivant :

LEMME 2.7. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions, ayant le type d'homotopie de S_3 , et soit :

$$(({}^p\overline{\Omega}_2, {}^p\overline{\Omega}'_2) \dots ({}^1\overline{\Omega}_2, {}^1\overline{\Omega}'_2) ({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots ({}^1\Omega_2, {}^1\Omega'_2) F(V_3), \Phi)$$

la représentation du lemme 2.5. Il existe alors une représentation ($b(V_3) \geq 1$)

$$((X^n(V_3), \overline{X}^n(V_3)) \dots (X^1, \overline{X}^1)(Y^g, \overline{Y}^g) \dots (Y^1, \overline{Y}^1)(Z^n(V_3)^{-1}, \overline{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (Z^1, \overline{Z}^1)(T^b, \overline{T}^b) \dots (T^1, \overline{T}^1) F(V_3), \Phi) = (({}^p\overline{\Omega}_2, {}^p\overline{\Omega}'_2) \dots ({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots F(V_3), \Phi)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1°. $(T^i, \overline{T}^i)$ est une paire régulière canonique et

$$(T^b, \overline{T}^b) \dots (T^1, \overline{T}^1) = ({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots ({}^1\Omega_2, {}^1\Omega'_2).$$

2°. $(Z^i, \overline{Z}^i)$ est une paire non régulière canonique de type IV; les images canoniques des Z^i dans V_3 sont disjointes; $(Z^n(V_3)^{-1}, \overline{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (Z^1, \overline{Z}^1)$ a un sens (et est évidemment commutatif) pour toute permutation. (Donc déjà dans $(T^b, \overline{T}^b) \dots F(V_3)$, $Z^i \cup \overline{Z}^i$ est une couronne circulaire).

3°. $(Y^i, \bar{Y}^i)$ est une paire régulière de type I ou II.

4°. $(X^i, \bar{X}^i)$ est une paire non régulière de type IV. Les images canoniques des X^i dans V_3 , sont disjointes.

5°. $(Y^g, \bar{Y}^g) \dots (Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (T^1, \bar{T}^1) \dots F(V_3) = (V_3 - \bigcup_1^n (V_3)^{-1}) \text{ int } D_3^i$ où les D_3^i sont des disques disjoints, plongés d'une manière C^∞ dans V_3 .

DEMONSTRATION. Il est facile de prouver que X, Y, Z tels que :

$$(X^n(V_3), \bar{X}^n(V_3)) \dots (X^1, \bar{X}^1) (Y^g, \bar{Y}^g) \dots (Y^1, \bar{Y}^1) (Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots \\ \dots (Z^1, \bar{Z}^1) = ({}^p\bar{\Omega}_2, {}^p\bar{\Omega}'_2) \dots ({}^1\bar{\Omega}_2, {}^1\bar{\Omega}'_2)$$

existent, et que les propriétés 2°, 3°, 4°, 5° en découlent immédiatement.

Reste à prouver l'existence des $(T^i, \bar{T}^i)$, et 1°. Pour cela on va donner une nouvelle définition :

DEFINITION 2.4. Soit V_3 une variété compacte à 3 dimensions et

$$((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1), F(V_3), \Phi)$$

une représentation de V_3 . On dira qu'un point $p \in ((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1), F(V_3))$ est régulier si $\Sigma_3((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1), F(V_3), p) = \Sigma_3(p)$ a l'une des deux formes suivantes :

- Forme 1° : il n'existe dans $\Sigma_3(p)$ aucune paire de lignes singulières λ, λ' , telles que

$$(\alpha^m, \beta^m) \dots \Phi(\lambda, \lambda') = 1.$$

Tout point de $\Sigma_2((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1), F(V_3), p) = \Sigma_2(p)$ dans lequel $\Sigma_2(p)$ n'est pas une variété à bord, a un voisinage qui est un cône sur deux segments disjoints. On voit alors que si l'on considère l'application canonique

$$\varphi: (\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1), F(V_3) \rightarrow V_3,$$

il existe un plongement univoquement déterminé, (à un homéomorphisme près)

$$\Psi_p: \Sigma_2(p) \rightarrow S_2$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2(p) & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2(V_3, \varphi(p)) \\ & \searrow \Psi_p & \nearrow \chi \\ & S_2 & \end{array}$$

où χ est obtenue par un nombre fini de $\Omega(\sigma_2, \sigma_1)$ avec $\text{int } \sigma_2 \subset S_2 - \Psi(\Sigma_2(p))$.

Ψ_p induit d'une façon naturelle (en prenant le cône) une application (plongement)

$$\Sigma_3(p) \rightarrow D_3$$

(qui prolonge Ψ_p), et que nous désignerons, par abus de langage, toujours par Ψ_p .

- Forme 2° : on considère un carré Q et ses quatre sommets q_1, q_2, q_3, q_4 dans leur ordre naturel. On considère $Q/(\Phi)$ où $q_1 = q_3, q_2 = q_4$.

$$\Sigma_3(p) = \Sigma_3((\alpha^m, \beta^m) \dots (\alpha^1, \beta^1) F(V_3), p) = C_p(Q/(\Phi))$$

et

$$(\alpha^m, \beta^m) \dots \Phi(C_p(q_1), C_p(q_2)) = 1.$$

On va définir pour ce cas aussi une application $\Psi_p : \Sigma_3(p) \rightarrow E_3$ qui est analogue en quelque sorte au Ψ_p au point précédent. Définissons tout d'abord $\widetilde{\Sigma}_3(p)$ (voir lemme 1.2). On considère pour ça $\Sigma_3(\Sigma_3(p), C_p(q_i))$ $i = 1, 2$. Il existe un plongement uniquement déterminé (à un homéomorphisme près) :

$$\Sigma_3(\Sigma_3(p), C_p(q_i)) \xrightarrow{j_i} E_3$$

tel qu'il existe un homéomorphisme $h_i : E_3 \rightarrow \Sigma_3(V_3, \varphi(C_p(q_i)))$, pour lequel le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_3(\Sigma_3(p), C_p(q_i)) & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_3(V_3, \varphi(C_p(q_i))) \\ & \searrow j_i & \nearrow h_i \\ & E_3 & \end{array}$$

Par définition :

$$\widetilde{\Sigma}_3(p) = \Sigma_3(p) \cup \Sigma_3(E_3, j_1(C_p(q_1))) \cup \Sigma_3(E_3, j_2(C_p(q_2)))$$

(où $\rho \in \Sigma_3(\Sigma_3(p), C_p(q_i))$ et $j_i(\rho) \in E_3$ sont identifiés).

On voit aisément que $\widetilde{\Sigma}_3(p)$ est égal à :

$$C_p(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2) \quad (\widetilde{\Sigma}_2(p) = S_1 \times S_1 - \text{int } D_2).$$

On plongera $(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2)$ dans E_3 de la façon suivante : on considère la sphère $(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$ dont on enlève les disques :

$$\gamma_1 = (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \cap (z < -\frac{1}{2})$$

$$\gamma_2 = (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \cap (z > +\frac{1}{2}).$$

On considère ainsi les deux points :

$$a = (x = 0, z = -\frac{1}{2}) \cap (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \cap (y < 0)$$

$$b = (x = 0, z = +\frac{1}{2}) \cap (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \cap (y < 0)$$

et deux petits arcs, centrés en $a, b : \sigma', \sigma''$ sur les cercles $\partial \gamma_1, \partial \gamma_2$. Soit ρ l'arc de grand cercle passant par $a, (0, 1, 0), b$. Considérons l'ensemble de tous les arcs $\{\rho^*\}$, parallèles à ρ situés sur $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, unissant σ', σ'' . On introduit sur chaque ρ^* un paramètre continu (C^∞), variant d'une façon C^∞ avec ρ^* , prenant les valeurs -1 sur σ' , $+1$ sur σ , (et variant de -1 à $+1$). Introduisons les coordonnées polaires (φ, θ, r) et considérons une fonction $f(t)$ ayant les propriétés suivantes :

$f(t)$ est définie pour $[-1, +1]$, ≥ 0 et de classe C^∞ .

$f(-1) = f(+1) = 0$, $f(x) > 0$ pour $x \neq -1, +1$.

Associons à chaque $q \in \rho^*$ avec paramètre t , le point $(\varphi(q), \theta(q), 1 + f(t))$. On obtient de cette manière un plongement C^∞ , η , d'un carré Q dans $E_3 - (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$, ayant deux côtés opposés sur σ', σ'' . Evidemment

$$X_2 = \eta(Q) \cup ((x^2 + y^2 + z^2 = 1) - (\gamma_1 \cup \gamma_2)) = S_1 \times S_1 - \text{int } D_2.$$

Choisissons un difféomorphisme $\bar{\eta} : \tilde{\Sigma}_2(p) \rightarrow X_2$ tel que

$$\bar{\eta}(\Sigma_2(\tilde{\Sigma}_2(p), q_2)) = \eta(Q)$$

$$\bar{\eta}(\tilde{\Sigma}_2(p) - \Sigma_2(\tilde{\Sigma}_2(p), q_2)) = (x^2 + y^2 + z^2 = 1) - (\gamma_1 \cup \gamma_2).$$

Prolongeons cette application à une application $\bar{\eta} : (\Sigma_3(p)) \tilde{\rightarrow} E_3$ en prenant le cône de centre 0. En considérant le plongement $\Sigma_3(p) \rightarrow (\Sigma_3(p)) \tilde{\rightarrow}$ on obtient une application composée :

$$\Psi_p : \Sigma_3(p) \rightarrow E_3.$$

Ψ_p a les propriétés suivantes :

A) Ψ_p est une immersion, sauf au point singulier p .

B) Ψ_p est complètement déterminée, modulo des opérations qu'on définira plus loin, $\bar{\eta}$ est caractérisé par :

- une immersion $\chi : (\Sigma_2(p)) \tilde{\rightarrow} S_2$, définie par $\chi(\pi) = (\varphi(\bar{\eta}(\pi)), \theta(\bar{\eta}(\pi)))$.

S_2 est une sphère (orthogonale $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$) de E_3 .

- $r(\bar{\eta}(\pi)) : (\Sigma_2(p)) \tilde{\rightarrow} E_1^+$. r est centré en (a, b, c) .

Les opérations dont on parlait sont :

- une homotopie régulière pour χ

- le changement de la fonction $r(\bar{\eta}(\pi))$ en toute autre fonction C^∞

$$(\Sigma_2(p)) \tilde{\rightarrow} E_1^+.$$

Cette définition une fois donnée, retournons à la preuve de 1°. Par induction, on peut prouver le résultat suivant : pour chaque $i \leq q$, il existe une représentation générale de V_3 :

$$((T^i, \bar{T}^i)(T^{i-1}, \bar{T}^{i-1}) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3), \Phi)$$

(si $j \leq i$, $(T^j, \bar{T}^j) \dots (T^1, \bar{T}^1)$ est la première partie de $(T^i, \bar{T}^i) \dots (T^1, \bar{T}^1)$ telle que :

1° . $(T^l, \bar{T}^l)$, pour tout l , est une paire régulière canonique.

2° . $(T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3)$ n'a que des points réguliers. (Pour $F(V_3)$ cette condition est déjà satisfaite vu 4° de 1.6).

3° . Il existe un diagramme commutatif, dont toutes les flèches sont des projections d'espaces-quotients :

$$\begin{array}{ccc} ({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots F(V_3) & \longleftarrow & ({}^i\Omega_2, {}^i\Omega'_2) \dots F(V_3) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & (T^i, \bar{T}^i) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3) & \end{array}$$

On a évidemment $h = q$.

$$({}^qT, {}^q\bar{T}) \dots F(V_3) = ({}^q\Omega_2, {}^q\Omega'_2) \dots F(V_3).$$

C.Q.F.D.

Nous allons construire maintenant des applications naturelles :

$$\Psi^i : (T^i, \bar{T}^i) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3) \rightarrow E_3.$$

Pour cela nous allons prouver le lemme suivant :

LEMME 2.8. Pour chaque i , il existe une application :

$$\Psi^i : (T^i, \bar{T}^i) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3) \rightarrow E_3$$

telle que pour chaque $p \in (T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3)$,

$$\Psi^i |_{\Sigma_3((T, \bar{T}) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3), p)} = \Psi_p$$

(voir définition 2.4).

De plus $\Psi^0 =$ le plongement naturel $F(V_3) \subset E_3$.

DEMONSTRATION. Pour faire la démonstration nous allons définir le «support» d'une paire régulière canonique : $\text{supp}(\alpha, \beta)$, qui sera un sous-complexe de $(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$. (Voir définition 2.2). La définition sera très utile au chapitre suivant.

Nous allons étudier chaque cas séparément :

- Forme canonique I : il existe dans $Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ deux disques $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, ayant les propriétés suivantes :

- $\alpha \subset \bar{\alpha}, \beta \subset \bar{\beta}$
 - $\alpha \cap \partial \bar{\alpha} = \alpha \cap \beta = \beta \cap \partial \bar{\beta} = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$
 - dans tout point de $(\bar{\alpha} \cup \bar{\beta} - \alpha \cap \beta), (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ est une variété à bord.
- Considérons alors deux boules à 3 dimensions $\check{\alpha}, \check{\beta} \subset (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ ayant

les propriétés suivantes :

- $\check{\alpha} \cap \check{\beta} = \alpha \cap \beta$
- $\check{\alpha} \cap Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3) = \bar{\alpha}$
- $\check{\beta} \cap Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3) = \bar{\beta}$

On posera alors :

$$\text{supp}(\alpha, \beta) = \check{\alpha} \cup \check{\beta}$$

$$\delta \text{ supp}(\alpha, \beta) = (\check{\alpha} \cup \check{\beta}) \cap ((\alpha', \beta') \dots F(V_3) - (\check{\alpha} \cup \check{\beta}))$$

- Forme canonique II : on peut toujours supposer que $\omega_2 \cap \Sigma_3(p)$ est un petit triangle $^*\omega_2$. Soit $^{**}\omega_2 = \omega_2 - ^*\omega_2$. Au voisinage du segment $^{**}\omega_2 \cap ^*\omega_2, \Sigma_2(p)$ et $Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ sont deux surfaces transversales et $^{**}\omega_2 \cap ^*\omega_2$ fait justement partie de leur intersection. Prenons un petit segment $\xi \subset \Sigma_2(p) \cap (Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3))$ tel que, $^{**}\omega_2 \cap ^*\omega_2 \subset \text{int } \xi$ et que dans tout point de $\xi, (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ soit une variété. Considérons un petit disque $d_2 \subset \Sigma_2(p)$ tel que $\partial d_2 \cap Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3) = \xi$ et que dans tout point de $d_2, (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ soit une variété (à bord bien entendu). On fait les mêmes constructions pour p' . Considérons maintenant un disque à deux dimensions $\omega \subset Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ tel que :

- dans tout point de $\omega, (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ est une variété.
- $^{**}\omega_2 \cup ^{**}\omega'_2 \subset \omega$
- $((\partial ^{**}\omega_2) \cup (\partial ^{**}\omega'_2)) \cap \partial \omega = \xi \cup \xi'$.

Considérons une boule à trois dimensions $\tilde{\omega} \subset (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$, telle que :

- dans tout point de $\tilde{\omega}, (\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ est une variété.
- $\partial \tilde{\omega} \cap Fr(\alpha', \beta') \dots F(V_3) = \omega$
- $\tilde{\omega} \cap \Sigma_3(p) = d_2 \subset \partial \tilde{\omega}$
- $\tilde{\omega} \cap \Sigma_3(p') = d'_2 \subset \partial \tilde{\omega}$.

Par définition :

$$\text{supp}(\alpha, \beta) = \Sigma_3(p) \cup \tilde{\omega} \cup \Sigma_3(p')$$

$$\delta \text{ supp}(\alpha, \beta) = \text{supp}(\alpha, \beta) - ((\alpha', \beta') \dots F(V_3) - \text{supp}(\alpha, \beta))$$

- Forme canonique III :

$$\text{supp}(\alpha, \beta) = \bigcup_1^4 \tau_3^i$$

$$\delta \text{ supp}(\alpha, \beta) = \cup \alpha^j = \text{supp}(\alpha, \beta) - ((\alpha', \beta') \dots F(V_3) - \text{supp}(\alpha, \beta)).$$

Le $\text{supp}(\alpha, \beta)$ a les propriétés suivantes, qui sont essentielles :

- d'une manière naturelle $\text{supp}(\alpha, \beta) \subset E_3$

- $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') \dots F(V_3)$ peut être obtenu de la manière suivante : on observe tout d'abord que si l'on considère la projection suivante d'espace quotient :

$$\pi_{\alpha, \beta} : \text{supp}(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta) \text{supp}(\alpha, \beta),$$

$\pi_{\alpha, \beta} |_{\delta \text{supp}(\alpha, \beta)}$ est un monomorphisme. Alors :

$$(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') \dots F(V_3) = [((\alpha, \beta) \text{supp}(\alpha, \beta)) \cup \text{rest}(\alpha, \beta)] / (\Phi)$$

où $\text{rest}(\alpha, \beta)$ désignera dorénavant

$$(\alpha', \beta') \dots F(V_3) - \overline{\text{supp}(\alpha, \beta)}$$

(Φ) consiste à identifier par l'homéomorphisme naturel :

$$\pi_{\alpha, \beta}(\delta \text{supp}(\alpha, \beta)) \subset (\alpha, \beta) \text{supp}(\alpha, \beta)$$

et

$$\delta \text{supp}(\alpha, \beta) \subset \text{rest}(\alpha, \beta).$$

Pour prouver le lemme 2.8 il suffit de raisonner par induction, en appliquant la proposition suivante :

Soit une immersion donnée

$$f : \text{supp}(\alpha, \beta) \rightarrow E_3$$

il existe alors un «prolongement» de $f, \bar{f}$:

$$\bar{f} : (\alpha, \beta) \text{supp}(\alpha, \beta) \rightarrow E_3$$

tel que :

$$\bar{f} |_{\pi_{\alpha, \beta} \delta \text{supp}(\alpha, \beta)} = f |_{\delta \text{supp}(\alpha, \beta)}$$

- pour chaque $p \in (\alpha, \beta) \text{supp}(\alpha, \beta)$, il existe un petit voisinage de $p, \mathcal{U}_p$ tel que

$$\bar{f} |_{\mathcal{U}_p} = \Psi_p |_{\mathcal{U}_p}.$$

Cette proposition peut être prouvée sans difficulté, en analysant séparément les trois cas; nous en laissons le soin au lecteur.

Considérons maintenant

$$(T^b, \bar{T}^b) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3)$$

(voir lemme 2.7) et sur $Fr(T^b, \bar{T}^b) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3)$, les $n(V_3) - 1$ couronnes circulaires $Z^i \cup \bar{Z}^i$. La frontière de $Z^i \cup \bar{Z}^i$ est composée de deux cercles : $\partial(Z^i \cup \bar{Z}^i) = c_i - c'_i$. $Z^i \cup \bar{Z}^i$ donne naissance à une $(1, 1)$ - S_1 -figure de $(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)$, obtenue ainsi : on considère le cercle c_i comme support, et le champ transversal déterminé par des vecteurs tangents à $Z^i \cup \bar{Z}^i$, normaux à c_i . Désignons cette

$(1, 1)$ - S_1 -figure par $\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle$.

On va prouver le lemme suivant qui sera utile au chapitre suivant :

LEMME 2.9. Soit l'application $\Psi^b : (T^b, \bar{T}^b) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3) \rightarrow E_3$ du lemme précédent. On a :

$$\omega^1(\Psi^b(\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)) = 0 \quad \text{dans } E_3.$$

DEMONSTRATION. Pour prouver ce théorème il y a deux voies isomorphes : l'une utilisant les immersions, l'autre l'immersion des orientations. Dans [14] nous avons utilisé constamment le point de vue de l'immersion des orientations. Ici nous allons utiliser l'autre voie. Mais je pense qu'il n'est pas inutile d'avoir présent à l'esprit l'autre point de vue, et l'isomorphisme entre les deux. On remarque tout d'abord que la proposition de la fin du lemme 2.8 a une réciproque : soit une application

$$\bar{f} : (\alpha, \beta) \text{ supp } (\alpha, \beta) \rightarrow E_3$$

qui coïncide pour chaque p , avec Ψ_p . Elle se « prolonge » à une immersion

$$f : \text{supp } (\alpha, \beta) \rightarrow E_3$$

ayant la propriété :

$$\bar{f}|_{\pi_{\alpha, \beta} \delta \text{ supp } (\alpha, \beta)} = f|_{\delta \text{ supp } (\alpha, \beta)}.$$

Soit T l'application qui associe $\bar{f}$ à f et T' l'application qui associe f à $\bar{f}$. On remarque que $T'(f)$ et f sont régulièrement homotopes, par une homotopie régulière préservant $\delta \text{ supp } (\alpha, \beta)$.

On peut définir une notion régulière pour les applications

$$\bar{f} : K_3 \rightarrow E_3$$

où $K_3 = (\alpha^m, \beta^m) \dots F(V_3)$ et n'a que des points réguliers, et $\bar{f}$ coïncide localement avec Ψ_p . On dira que $\bar{f}_t$ est une homotopie régulière, si pour chaque t fixé

$$\bar{f}_t : K_3 \rightarrow E_3$$

coïncide localement avec Ψ_p et de plus pour chaque $p \in K_3$, $\bar{f}_t|_{\Sigma_3(K_3, p)} : \Sigma_3(K_3, p) \rightarrow E_3$ est une « homotopie régulière ». Si p est de forme 1° , l'« homotopie régulière » est définie de la manière suivante : on rappelle que Ψ_p est complètement caractérisé par :

- une immersion $\chi : (\Sigma_2(p))^\sim \rightarrow S_2$ où S_2 est une sphère

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- une fonction $r : (\Sigma_2(p))^\sim \rightarrow E_1^+$.

Soit $T_{a, b, c, R} : E_3 \rightarrow E_3$ la translation suivie d'une homothétie qui amène $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ en $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$. Alors, une homotopie

régulière $\bar{f}_t : \Sigma_3(K_3, p) \rightarrow E_3$ est donnée par χ_t, r_t où :

$$\chi_t : (\Sigma_2(p))^\sim \rightarrow S_2(t)$$

est telle que $T_{a(t), b(t), c(t), R(t)} \chi_t : (\Sigma_2(p))^\sim \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ est une homotopie régulière.

r_t est de classe C^∞ en (x, y, z, t) . Cette définition une fois donnée, on laisse au lecteur le soin de vérifier, T, T' une fois construites, que $TT'(\bar{f})$ et $\bar{f}$ sont régulièrement homotopes.

Il existe une immersion

$$\begin{aligned} \Phi^0 : (Y^g, \bar{Y}^g) \dots (Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (Z^1, \bar{Z}^1)(T^b, \bar{T}^b) \dots (T^1, \bar{T}^1) F(V_3) = \\ = V_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i \rightarrow E_e. \end{aligned}$$

D'une façon absolument analogue à la construction des Ψ^i , mais en utilisant T' au lieu de T on construit une série d'applications (coïncidant localement avec les Ψ_p)

$$\Phi^i : (Y^{g-i}, \bar{Y}^{g-i}) \dots (Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) \rightarrow E_3$$

puis :

$$\bar{\Phi}^i : (Z^n(V_3)^{-i-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-i-1}) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) \rightarrow E_3$$

($\bar{\Phi}^0 = \Phi^g$). Il est évident que :

$$\omega^1(\bar{\Phi}^n(V_3)^{-1}(\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)) = 0 \quad (\text{dans } E_3).$$

(On observe que :

$$\bar{\Phi}^n(V_3)^{-1} : (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) \rightarrow E_3$$

de même que :

$$\Psi^b : (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) \rightarrow E_3$$

et que localement, ces deux applications coïncident avec Ψ_p). On doit donc prouver que :

$$\omega^1(\Phi^n(V_3)^{-1}(\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)) = \omega^1(\Psi^b(\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)).$$

Soit p un point régulier (forme 2°) quelconque de $(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)$ et

$$\Sigma_3(p) = C_p(Q/(\Phi))$$

(voir définition 2.4). Considérons le segment $C_p(q_1)$ d'extrémités p, q_1 et divisons-le :

$$\begin{aligned} C_p(q_1) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \partial \lambda_1 &= q_1 - \bar{p}, \quad \partial \lambda_2 = \bar{p} - p. \end{aligned}$$

Découpons λ_2 en deux exemplaires λ'_2, λ''_2 , de frontière commune. On obtient un espace $\Sigma_3^\partial(p)$ ayant les propriétés suivantes :

1°. $\Sigma_3(p) = \Sigma_3^\partial(p) / (\Phi)$ où (Φ) est la relation d'équivalence obtenue en identifiant λ'_2, λ''_2 .

2°. Soit $\pi_p : \Sigma_3^\partial(p) \rightarrow \Sigma_3(p)$ l'application canonique. Γ_p restreint à $\pi_p^{-1} \Sigma_2(p)$ est un monomorphisme. Posons $\pi_p^{-1} \Sigma_2(p) = \Sigma_2^\partial(p)$. Ceci nous permet de définir l'espace suivant :

$$Y_3 = \overline{((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) - \bigcup_p \Sigma_3(p)) \cup \bigcup_p \Sigma_3^\partial(p)} / (\Phi)$$

où $\bigcup_p$ s'étend à tous les points de forme 2°, et (Φ) est obtenue par l'identification des $\Sigma_2(p) \subset \overline{(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) - \bigcup_p \Sigma_3(p)}$ avec les $\Sigma_2^\partial(p) \subset \Sigma_3^\partial(p)$.

3°. Φ^b induit une immersion

$$\Phi_{Y_3}^b : Y_3 \rightarrow E_3$$

telle que

$$\Phi^b |_{Y_3 \cap ((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3))} = \Phi_{Y_3}^b |_{Y_3 \cap ((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3))}.$$

4°. Considérons dans chaque $\text{int } \Sigma_3^\partial(p)$ un cercle C_p qui a la propriété suivante : il existe une couronne circulaire $\gamma_p \subset \Sigma_3^\partial(p)$ telle que $\partial \gamma_p = C_p - (\lambda'_2 \cup \lambda''_2)$. A une isotopie près, C_p est univoquement déterminé. Les $\{C_p\}$ engendrent $\pi_1(Y_3)$, c'est-à-dire qu'en tuant les C_p , on tue $\pi_1(Y_3)$.

En utilisant les techniques classiques [12] on peut prouver la chose suivante : pour chaque c_i (voir définition de $\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle$), il existe une immersion :

$$r_i : \underbrace{D_2^i - \bigcup_1^{n(i)} \text{int } d_2^j}_{\text{(disque percé)}} \rightarrow Y_3$$

telle que : $-r_i(S_1^i = \partial D_2^i) = c_i$

- il existe une fonction $(1, \dots, n(i)) \xrightarrow{\rho_i} \{p\} = \text{ensemble des points de forme 2° de } (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)$ satisfaisant à :

$$r_i(S_1^j = \partial d_2^j) = C_{\rho^i(j)}.$$

En fait, r_i ne va pas exactement dans Y_3 , mais dans $\tilde{Y}_3$ qui est obtenu à partir de Y_3 comme K_3 à partir de K_3 (voir lemme 1.2). Il y a évidemment correspondance biunivoque naturelle entre les immersions $Y_3 \rightarrow E_3$ et les immersions $\tilde{Y}_3 \rightarrow E_3$. Il n'y a donc aucune ambiguïté.

Désignons par $\langle r_i(d_2^j) \rangle$ la $(1,1)$ - S_1 -figure de Y_3 formée par $C_{\rho^i(j)}$ et le champ transversal induit par $r_i(D_2^i - \bigcup_1^{n(i)} \text{int } d_2^j)$.

5° . (généralisation de 3°) : toute application $F : (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) \rightarrow E_3$ qui coïncide localement avec Ψ_p induit une immersion univoquement déterminée (à une homotopie régulière près)

$$F_{Y_3} : Y_3 \rightarrow E_3$$

ayant la propriété suivante :

$$F_{Y_3} \mid Y_3 \cap (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) = F \mid Y_3 \cap (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3).$$

Pour toute $(1, 1)$ - S_1 -figure γ de Y_3 , de support C_p , on a :

$$\omega^1(F_{Y_3}(\gamma)) = \omega^1(G_{Y_3}(\gamma)) \quad (\text{dans } E_3)$$

où F, G sont deux applications

$$(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) \rightarrow E_3$$

quelconques, coïncidant localement avec Ψ_p .

On voit aisément que :

$$\begin{aligned} \omega^1(\Psi^b(\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)) &= \omega^1(\Psi^b(\langle r_i(d_2^1) \rangle)) + \omega^1(\Psi^b(\langle r_i(d_2^2) \rangle)) + \dots \\ \omega^1(\bar{\Phi}^n(V_3)^{-1}(\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)) &= \omega^1(\bar{\Phi}^n(V_3)^{-1}(\langle r_i(d_2^1) \rangle)) + \omega^1(\bar{\Phi}^n(V_3)^{-1}(\langle r_i(d_2^2) \rangle)) + \dots \end{aligned}$$

mais compte tenu de 5° :

$$\omega^1(\Psi^b(\langle r_i(d_2^j) \rangle)) = \omega^1(\bar{\Phi}^n(V_3)^{-1}(\langle r_i(d_2^j) \rangle)).$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE III

LE PRODUIT CARTESIEN REGULARISE PAR UN CARRE

Avant de commencer les considérations proprement dites de ce chapitre, je vais rappeler quelques définitions relatives à la chirurgie de Morse (Morse surgery). On trouve des détails dans [22] par exemple.

Soit V_{n-1} une variété compacte à $n-1$ dimensions; soit un difféomorphisme :

$$b^\lambda : S_\lambda \times D_{n-\lambda-1} \rightarrow V_{n-1} .$$

On observe qu'il existe un difféomorphisme naturel :

$$\partial(S_\lambda \times D_{n-\lambda-1}) = S_\lambda \times S_{n-\lambda-2} = \partial(D_{\lambda+1} \times S_{n-\lambda-2}) .$$

On désignera par $(V_{n-1}; b^\lambda)$ l'espace suivant :

$$(V_{n-1} - \text{int } b^\lambda(S_\lambda \times D_{n-\lambda-1})) \cup (D_{\lambda+1} \times S_{n-\lambda-2}) / (\Phi)$$

où $\partial(S_\lambda \times D_{n-\lambda-1})$ et $\partial(D_{\lambda+1} \times S_{n-\lambda-2})$ sont identifiés. D'une façon analogue, si l'on a plusieurs applications $b_i^{\lambda_i}$, telles que les $\text{Im } b_i^{\lambda_i}$ sont disjointes, on pourra définir $(V_{n-1}; b_1^{\lambda_1}, b_2^{\lambda_2}, \dots, b_k^{\lambda_k})$.

Soit maintenant V_n une variété compacte à bord, de bord $V_{n-1} = \partial V_n$. Soit le disque à n dimensions.

$$D_\lambda \times D_{n-\lambda} = D_n$$

$$\partial D_n = S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda} + D_\lambda \times S_{n-\lambda-1}$$

Soit

$$b^{\lambda-1} : S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda} \rightarrow V_{n-1}$$

un difféomorphisme. On désignera par $[V_n; b^{\lambda-1}]$ l'espace $(V_n \cup D_n) / (\Phi)$ où chaque $p \in S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}$ est identifié avec $b^{\lambda-1}(p)$. D'une façon analogue, si l'on a plusieurs $b_i^{\lambda_i}$ à images disjointes, on définit :

$$[V_n; b_1^{\lambda_1}, b_2^{\lambda_2}, \dots, b_b^{\lambda_b}] .$$

Les $(V_{n-1}; b_1^{\lambda_1}, \dots, b_b^{\lambda_b})$ et $[V_n; b_1^{\lambda_1}, \dots, b_b^{\lambda_b}]$ sont des variétés différentielles (après un arrondissement d'angles) et :

$$\partial[V_n; b_1^{\lambda_1}, \dots, b_b^{\lambda_b}] = (V_{n-1}; b_1^{\lambda_1}, \dots, b_b^{\lambda_b}) .$$

Si l'on choisit un système de coordonnées pour $D_{n-\lambda}$, on définit par $b^{\lambda-1}$ une $(\lambda-1, n-\lambda)$ - $S_{\lambda-1}$ -figure de V_{n-1} , de support $b^{\lambda-1}(S_{\lambda-1} \times 0)$ que l'on désignera par $\langle b^{\lambda-1} \rangle$.

Soit $V_{n-1} = S_{n-1}$ et f une (i, l) - S_i -figure quelconque de S_{n-1} , on pose par définition

$$w^l(f) \text{ (dans } S_{n-1}) = w^l(f) \text{ (dans } S_{n-1} - p)$$

où $p \in \text{support } f$.

On prouve sans peine le lemme suivant :

LEMME 3.1. Soit

$$X_5 = [D^5; b_1^1, \dots, b_f^1].$$

Si

$$w^3(\langle b_i^1 \rangle) = 0 \quad (\text{dans } S_4 = \partial D_5)$$

pour tout i , alors X_5 est difféomorphe à $(D_3 - \bigcup_1^f \text{int } d_3^i) \times D_2$ où d_3^i sont plongés d'une façon C^∞ dans D_3 , disjoints, et ne touchent pas ∂D_3 .

Ces préparatifs une fois finis, on va définir un foncteur

$$\Theta : K_3 \rightarrow \mathcal{U}_5$$

où : A) K_3 = la catégorie des complexes finis à 3 dimensions, ayant seulement des points réguliers dans le sens suivant : $\Sigma_2(K_3, p)$ est dans l'une des situations suivantes (voir aussi 1°, 2°, définition 2.4)

$\alpha)$ $\Sigma_2(K_3, p)$ est un complexe fini contenu dans S_2 . C'est une variété à bord dans tous ses points, sauf en un nombre fini d'entre eux ayant des voisinages qui sont des suspensions sur deux segments disjoints.

$\beta)$ $\Sigma_2(K_3(p)) = Q/(\Phi)$ où Q est un carré de sommets q_1, q_2, q_3, q_4 , (dans l'ordre naturel). (Φ) est obtenue en identifiant q_1 et q_3 ; q_2 et q_4 .

$\gamma)$ $\Sigma_2(K_3(p)) = S_2 \times S_2 - \text{int } D_2$.

On demande de plus que tout $K_3 \in K_3$ ait la structure suivante :

1°. Pour chaque $p \in K_3$ une application $\Psi_p : \Sigma_3(K_3, p) \rightarrow E_3$ est définie : pour le cas $\alpha)$, Ψ_p est donnée par un plongement $\Sigma_2(K_3, p) \rightarrow S_2$, pour le cas $\beta)$, Ψ_p se définit comme pour la forme 2° (définition 2.4) en choisissant tout d'abord un plongement

$$\Sigma_2(K_3, p) \rightarrow S_1 \times S_2 - \text{int } D_2 = (\Sigma_2(K_3, p))^\sim,$$

pour le cas $\gamma)$, Ψ_p se définit en assimilant justement $\Sigma_2(K_3, p)$ à un $(\Sigma_2(K_3, p))^\sim$.

On procède comme pour la forme 2° (définition 2.4).

2°. Les Ψ_p sont compatibles dans le sens suivant : sur $\Sigma_3(K_3, p) \cap \Sigma_3(K_3, q)$, Ψ_p, Ψ_q coïncident (à une isotopie près).

On dira que K_3 a une « structure locale ». Les morphismes de K_3 sont les plongements l.p.m. $K_3 \xrightarrow{i} K'_3$, compatibles avec les structures locales $\Psi_{i(p)} \circ i = \Psi_p$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_3(K_3, p) & \xrightarrow{i} & \Sigma_3(K'_3, i(p)) \\
 & \searrow \Psi_p & \swarrow \Psi_{i(p)} \\
 & E_3 &
 \end{array}$$

Il existe une sous-catégorie très importante de $\tilde{K}_3, \tilde{K}_3$: c'est l'ensemble des complexes K_3 pour lesquels $\Sigma_2(K_3, p)$ est toujours une variété à bord. Pour chaque $\Sigma_3(K_3, p)$ il y a alors une seule façon possible de définir les Ψ_p , et on vérifie sans peine que les différents Ψ_p sont bien compatibles. Il existe une application naturelle :

$$\tilde{T} : \tilde{K}_3 \rightarrow \tilde{K}_3 \quad (\tilde{T}^2 = \tilde{T})$$

définie ainsi : si $K_3 \in \tilde{K}_3$ est donné, on définit $(\Sigma_3(K_3, p))^\sim$ pour chaque $\Sigma_3(K_3, p)$; si p est dans le cas α), on fait comme dans le lemme 1.2, si p est dans le cas β), on pose $(\Sigma_3(K_3, p))^\sim = (C_p(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2))$ et on choisit l'inclusion

$$\Sigma_3(K_3, p) \xrightarrow{i} (\Sigma_3(K_3, p))^\sim$$

de telle façon que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_3(K_3, p) & \xrightarrow{i} & (\Sigma_3(K_3, p))^\sim \\
 & \searrow \Psi_p & \swarrow \Psi_p \\
 & E_3 &
 \end{array}$$

on voit que i est univoquement déterminé. (Un tel i et un tel diagramme existe évidemment pour le cas α). Dans le cas γ) on met tout simplement $\Sigma_3(K_3, p) = (\Sigma_3(K_3, p))^\sim$. Il est très facile de former de $\cup \Sigma_3(K_3, p)^\sim$, (en posant des identifications naturelles sur les $\Sigma_2(K_3, p)^\sim$), un complexe $\tilde{T}(K_3) \in \tilde{K}_3$ (on désignera $\tilde{T}(K_3)$ aussi par $\tilde{K}_3$) qui est complètement déterminé par les propriétés suivantes :

- il existe un morphisme naturel $\tilde{\tau} : K_3 \rightarrow \tilde{K}_3$
- $\cup_p (\tilde{\tau}(\Sigma_3(K_3, p))^\sim) = \tilde{K}_3$.

Il est évident que si K_3 est un complexe de E_3 , avec un prolongement donné sans E_3 , $\tilde{K}_3$ défini au cours de la démonstration du lemme 1.2 coïncide avec le $\tilde{K}_3$ défini ici. Une autre sous-catégorie importante de $\tilde{K}_3$ est celle des $(T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3)$ (voir lemme 2.7). On suppose enfin aussi que tout $K_3 \in \tilde{K}_3$ est connexe.

B) $\mathcal{U}_5$ = la catégorie des variétés compactes à 5 dimensions, C^∞ , à bord connexe; les morphismes sont les plongements C^∞ . $\mathcal{U}_5$ admet une structure de semi-groupe, la

*) Pour des raisons typographiques les signes $\sim$ ou $\approx$ placés au-dessus d'un groupe de symboles K sont remplacés par une parenthèse $(K)^\sim$ ou $(K)^\approx$.

loi de composition étant la somme connexe ($\dot{+}$). On peut définir la somme connexe, d'une façon univoque, pour $\tilde{K}_3^+ \subset \tilde{K}_3$ constituée de ces $K_3 \in \tilde{K}_3$, qui n'ont pas de décomposition

$$K_3 = K_3^1 \vee K_3^2 \vee \dots \vee K_3^f$$

ou plus généralement

$$K_3 = (K_3^1 \vee K_3^2 \vee \dots \vee K_3^f) / (\Phi)$$

où (Φ) est obtenue en considérant un nombre fini de points :

$$\begin{aligned} & p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n_1} \\ & p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n_2} \\ & \dots \dots \dots p_{ij} \in K_3^1 \vee \dots \vee K_3^f \\ & p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kn_k} \end{aligned}$$

et en identifiant p_{ij} avec p_{ij}' pour chaque i .

Construction du foncteur Θ : nous allons construire le foncteur Θ , explicitement pour $\tilde{K}_3^+$. Si $K_3 \in \tilde{K}_3$ et a une décomposition $K_3 = K_3^1 \vee K_3^2 \vee \dots \vee K_3^f$, $K_3^i \in \tilde{K}_3^+$ on met par définition :

$$\Theta(K_3) = \Theta(K_3^1) \dot{+} \Theta(K_3^2) \dot{+} \dots \dot{+} \Theta(K_3^f)$$

Si $K_3 = (K_3^1 \vee \dots \vee K_3^f) / (\Phi)$ comme ci-dessus, on met :

$$\Theta(K_3) = [\Theta(K_3^1) \dot{+} \dots \dot{+} \Theta(K_3^f); h_1^o, \dots, h_{(\Sigma n_k) - k}^o]$$

où le choix des h_i^o est quelconque.*)

Enfin, pour les $K_3 \in \tilde{K}_3$, quelconques, on posera

$$\Theta(K_3) = \Theta(\tilde{K}_3).$$

Soit donc $K_3 \in \tilde{K}_3^+$ (donc $K_3 = \tilde{K}_3$). Tout à fait comme dans la démonstration du lemme 1.2 on définit $\tilde{K}_3$. On considère un point $p \in K_3$ pour lequel $\Sigma_2(K_3, p) \subset S_2$. On remplace $\Sigma_3(K_3, p)$ par $(\Sigma_3(K_3, p))^{\sim} = C_p(S_2)$ avec une inclusion naturelle $\Sigma_3(K_3, p) \xrightarrow{i} (\Sigma_3(K_3, p))^{\sim}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_3(K_3, p) & \xrightarrow{i} & (\Sigma_3(K_3, p))^{\sim} \\ & \searrow \Psi_p & \swarrow \\ & E_3 & \end{array}$$

Si $\Sigma_2(K_3, p) = S_1 \times S_1 - \text{int } D_2$, on pose par définition : $\Sigma_3(K_3, p) = (\Sigma_3(K_3, p))^{\sim}$.

*) $\partial(\Sigma \Theta(K_3^i))$ est connexe.

Les $(\Sigma_3(K_3, p))^\sim$ se relie en un $\tilde{K}_3 \in \tilde{K}_3^+$ qui a la propriété que $\Sigma_2(\tilde{K}_3, p)$ est un disque D_2 , une sphère S_2 , ou bien $S_1 \times S_1 - \text{int } D_2$. Soient $p_1, \dots, p_N$ les points de $\tilde{K}_3$ de la dernière forme. Désignons par :

$$X_3 = \tilde{K}_3 - \bigcup_1^N \Sigma_3(\tilde{K}_3, p_i).$$

On va associer à chaque p_i une boule D_4 et une $(2, 1) - (S_1 \times S_1 - \text{int } D_2)$ -figure de $S_3 = \partial D_4$. On plonge $(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2)$ dans $S_3 = \partial D_4$ comme dans la définition 2.4 ($(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2)$ a un rétract de déformation, par des rétractions de Whitehead, $S_1 \vee S_1$: il y a donc essentiellement deux plongements possibles, correspondant à la permutation des deux termes de $S_1 \vee S_1$; on vérifie sans peine que ces deux plongements sont régulièrement homotopes, mais non isotopes).

En choisissant une $(2, 1) - (S_1 \times S_1 - \text{int } D_2)$ -figure de $S_3 = \partial D_4$, de support le plongement suivant, on obtient 4 plongements :

$$(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2) \times D_1 \rightarrow S_3.$$

On vérifie aisément que tous ces quatre plongements sont régulièrement homotopes et que deux seulement, qu'on va désigner par :

$$\varphi_i^j = \Sigma_2(\tilde{K}_3, p_i) \times D_1 \rightarrow S_3 \quad j = 0, 1$$

sont isotopiquement différents.

Définissons :

$$\begin{aligned} \Theta_{41}^{j_1 \dots j_N}(K_3) &= \Theta_{41}^{j_1 \dots j_N}(\tilde{K}_3) = \\ &= \Theta_{41}^{j_1 \dots j_N}(\tilde{\tilde{K}}_3) = ((X_3 \times D_1) \cup (\bigcup_1^N D_4)) / (\Phi) \end{aligned}$$

où $p \in \Sigma_2(\tilde{K}_3, p_i) \times D_1 \subset \partial(X_3 \times D_1)$ et $\varphi_i^{j_i}(p) \in \partial D_4^i$ sont identifiées.

$\Theta_{41}^{j_1 \dots j_N}$ est une variété différentiable compacte à bord connexe, de dimension 4.

Posons par définition :

$$\begin{aligned} \Theta_{51}^{j_1 \dots j_N}(K_3) &= \Theta_{51}^{j_1 \dots j_N}(\tilde{K}_3) = \\ \Theta_{51}^{j_1 \dots j_N}(\tilde{\tilde{K}}_3) &= \Theta_{51}^{j_1 \dots j_N}(\tilde{\tilde{K}}_3) \times D_1. \end{aligned}$$

Je dis que :

$$(*) \quad \Theta_{51}^{j_1 \dots j_N}(K_3) = \Theta_{51}^{j'_1 \dots j'_N}(K_3).$$

Alors on peut poser par définition :

$$\Theta(K_3) = \Theta_{51}^{j_1 \dots j_N}(K_3).$$

Reste à prouver (*). On le fera par des considérations empruntées à [13].

Soient f', f'' , deux sous-variétés de S_3 (plongées d'une façon C^∞), difféomorphes respectivement à $V_2 \times D_1$ où V_2 est une variété bidimensionnelle à bord. Supposons

que (S_3, f') , (S_3, f'') sont dans la situation suivante :

1°) Il existe dans S_3 un sous-ensemble difféomorphe à $D_3 : \tilde{D}_3$, tel que si nous y introduisons un système de coordonnées rectangulaires : $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$, $\tilde{D}_3 \cap f'$ est la réunion des deux ensembles suivants :

$$A = \{ 0 \leq x \leq 4 ; 2 - b \leq y \leq 2 + b ; 3 - b \leq z \leq 3 + b \}$$

$$B = \{ 2 - b \leq x \leq 2 + b ; 0 \leq y \leq 4 ; 1 - b \leq z \leq 1 + b \}$$

$$(A \cap B = \emptyset)$$

2°) Il existe une fonction $X(x, y) : [0, 4]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$X(2, 2) = 2$$

$$X(0, y) = X(4, y) = X(x, 0) = X(x, 4) = 1.$$

Sur chaque segment reliant $(2, 2)$ à la frontière de $[0, 4]^2$, $X(x, y)$ est linéaire.

3°) On choisit un M positif, assez grand, tel que pour $x, y \in [2 - b, 2 + b]$, on a :

$$4 \left[\left(\frac{3+b}{4} \right) X(x, y)^M \right] < 1 - b$$

4°) On considère $A' \subset \tilde{D}_3$:

$$A' = \{ (x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right) X(x, y)^M \right]); (x, y, z) \in A \}$$

$$(A' \cap Fr \tilde{D}_3 = A \cap Fr \tilde{\Phi}_3).$$

5°) Le couple $(S_3; (f' - A) \cup A')$ est difféomorphe au couple $(S_3; f'')$; ceci doit être compris dans le sens suivant : on considère tout d'abord que la fibration $f' = V_2 \times D_1$ coïncide sur A avec la fibration par segments parallèles à l'axe des z . Ceci donne un difféomorphisme

$$V_2 \times D_1 \xrightarrow{i} (f' - A) \cup A'.$$

Par définition, ce difféomorphisme coïncide avec celui qui définit f'' .

Plongeons maintenant S_3 dans S_4 comme équateur, considérons un champ de S_4 , normal à S_3 ; ce champ va donner naissance à deux paires $(S_4, f' \times D_1)$, $(S_4, f'' \times D_1)$ qu'on obtient ainsi : soit $V_2 \times D_1 \xrightarrow{j} S_3$ définissant f' . $(S_4, f' \times D_1) = (S_4, V_2 \times D_1)$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} V_2 \times D_1 \times 0 & \xrightarrow{\tilde{j}'} & S_4 \\ & \searrow i & \nearrow \\ & S_3 & \end{array}$$

On prend tout d'abord un diagramme commutatif comme ci-dessus. On prolonge $\bar{j}$ à $V_2 \times D_1 \times D_1 = V_2 \times D_2$ à l'aide du champ normal à S_3 .

$$\bar{j}' : V_2 \times D_2 \rightarrow S_4 \text{ définit bien } (S_4, f' \times D_1).$$

On fait de même pour $(S_4, f'' \times D_2) : \bar{j}'' : V_2 \times D_2 \rightarrow S_4$. On peut prouver que $\bar{j}'$ et $\bar{j}''$ sont isotopes. On va construire seulement un difféomorphisme $\hat{h}$ (que l'on peut facilement relier par une isotopie à l'identité) tel que :

$$\begin{array}{ccc} & & S_4 \\ & \nearrow \bar{j}' & \downarrow \hat{h} \\ V_2 \times D_2 & & \\ & \searrow \bar{j}'' & \downarrow \\ & & S_4 \end{array}$$

soit commutatif.

On choisit dans S_4 un ensemble E difféomorphe à $D_3 \times E_1$ muni d'un système d'axes :

$$0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4, -\infty < t < \infty$$

tel que : $E \cap S_3 = \tilde{D}_3$; $(x, y, z, 0) \in \tilde{D}_3 \subset S_4$ coïncide avec $(x, y, z) \in \tilde{D}_3 \subset S_3$. Les segments normaux sont $x, y, z = \text{const.}$ $z \in [0, 1]$. Considérons maintenant les difféomorphismes suivants : *)

1°) $h_1 : (x, y, z, t) \rightarrow (x, y, z, t + \kappa \mathcal{X}_1(x, y, z))$ où $\mathcal{X}_1(x, y, z) : E_3 \rightarrow E^+ (\geq 0)$ est telle que :

- $\mathcal{X}_1$ est 0 en dehors de $0 \leq x \leq 4, 2-2b \leq y \leq 2+2b, 3-2b \leq z \leq 3+2b$
- sur A $\mathcal{X}_1 = \frac{x(4-x)}{4}$

κ est un nombre > 0 , assez grand pour que sur

$$2-b \leq x \leq 2+b, 2-b \leq y \leq 2+b, 3-b \leq z \leq 3+b$$

$$\kappa \cdot \mathcal{X}_1(x, y, z) > 2.$$

2°) $h_2 : (x, y, z, t) \rightarrow (x, y, 4[(\frac{z}{4})^{X(x, y)}]^{N^*(t)}, t)$ où $N^*(t)$ est une fonction C^∞ telle que

$$N^*(t) = N_0 \text{ (suffisamment grand) pour } t \geq 2$$

$$N^*(t) = 0 \quad t \leq 1$$

$$0 < N^*(t) < N_0 \text{ pour } (1, 2).$$

3°) $h_3 : (x, y, z, t) \rightarrow (x, y, z, t - \mathcal{X}_2(x, y, z))$ où $\mathcal{X}_2$ est définie ainsi :

*) En réalité on doit encore arrondir un peu ce qui s'ensuit.

On considère tout d'abord :

$$\mu : [0, 4]^3 \rightarrow [0, 4]^3$$

$$\mu : (x, y, z) \rightarrow (x, y, 4(\frac{z}{4})^{X(x, y)} N^*(\kappa \tilde{\mathcal{X}}_1(x, y, z))).$$

Cette application n'est pas biunivoque, mais $\mu|_{A_3}$ est bien biunivoque. $\tilde{\mathcal{X}}_1(x, y, z)$ est une fonction ≥ 0 , C^∞ , définie sur $[0, 4]^3$ nulle en dehors d'un petit voisinage de $\mu(A)$. Si :

$$(x, y, z) \in \mu(A)$$

on considère le point univoquement déterminé $(x_1, y_1, z_1) \in A$ tel que :

$$\mu(x_1, y_1, z_1) = (x, y, z)$$

et l'on pose : $\mathcal{X}_2(x, y, z) = \kappa \tilde{\mathcal{X}}_1(x, y, z)$.

On peut faire une petite isotopie, facile à construire d'ailleurs, qui passe de $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ au $\hat{h}$ cherché. Θ est ainsi construit et on vérifie bien sa fonctorialité.

Les propriétés de Θ : nous allons étudier maintenant les propriétés du foncteur Θ , que nous allons énoncer sous forme de lemmes. La plupart sont si évidentes que nous en omettons la preuve :

LEMME 3.2. *Il existe un plongement naturel $i : K_3 \subset \Theta(K_3)$ qui fait de K_3 un rétract de déformation de $\Theta(K_3)$. La rétraction se fait par des contractions de Whitehead.*

(*) LEMME 3.3. *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\Theta(K_3) = K_3 \times D_2$$

est que K_3 soit une variété compacte (éventuellement à bord).

C'est cette propriété qui justifie pour Θ le nom de "produit cartésien régularisé par un carré".

LEMME 3.4. *Si V_3 est une variété compacte et $(F(V_3), \Phi)$ une représentation*

$$\Theta(F(V_3)) = D_5.$$

LEMME 3.5. *Soient $K'_3, K''_3 \in \tilde{K}_3^+$. Alors*

$$\Theta(K'_3 \dot{+} K''_3) = \Theta(K'_3) \dot{+} \Theta(K''_3).$$

(*) Il suffit de définir i pour le $K_3 \approx \tilde{K}_3$. Pour le cas général on le définira par composition avec l'inclusion canonique $K_3 \subset \tilde{K}_3$. Il suffira de définir i localement et de vérifier que les définitions locales sont compatibles. Si dans p , K_3 est variété, $p \in X_3$ et $i : X_3 \rightarrow \Theta(K_3)$ est identité $\times$ point fixé de ∂D_2 .

Si $\Sigma_3(K_3, p) = C_p(S_2 \times S_1 - \text{int } D_2)$ on définira tout d'abord :

i dans $\Theta_4^{j_1 \dots j_p}(K_3)$ comme

$$\Sigma_3(K_3, p) \rightarrow C_{p'}, (\varphi_p^{j_p} \times \text{point frontière de } D_1(\Sigma_2(K_3, p)))$$

où $p' = \text{centre de } D_u^p$ et $i = i' \times \text{point frontière de } D_1$.

On remarque que $i(K_3) \subset \partial \Theta(K_3)$.

LEMME 3.6. Soit $K_3 \in \mathcal{K}_3$ et V_2 une partie de la frontière $Fr K_3$ ayant les propriétés suivantes :

- en tout point de V_2 , K_3 peut être localement plongé en E_3 .
- V_2 ne contient pas d'arête singulière de K_3 .
- V_2 est une variété à bord, sauf pour un nombre fini de points $q_1 \dots q_f$ pour lesquels $\Sigma_2(V_2, q_i)$ est un cône sur un nombre fini de segments disjoints. Il existe alors :

- Une variété à bord $\tilde{V}_2$, univoquement déterminée, obtenue à partir de V_2 en ajoutant des triangles à chaque $\Sigma_2(V_2, q_i)$ jusqu'à ce que $\Sigma_2(\tilde{V}_2, q_i)$ devienne $C_{q_i}(S_1)$. Le plongement $\pi : V_2 \rightarrow \tilde{V}_2$ est univoquement déterminé.

- Un plongement (univoquement déterminé)

$$\bar{\pi} : \tilde{V}_2 \times D_2 \rightarrow \partial(\Theta(K_3))$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_2 \times D_2 & \xrightarrow{i \times D_2} & \partial(\Theta(K_3)) \\ & \searrow \pi \times D_2 & \nearrow \bar{\pi} \\ & \tilde{V}_2 \times D_2 & \end{array}$$

La seule chose qu'il faut expliciter c'est le choix du passage $V_2 \rightarrow \tilde{V}_2$ pour des points du type suivant :

- $\Sigma_3(K_3, p) = \text{cône sur deux disques disjoints} = (\text{cône } K^1) \vee (\text{cône } K^2)$.
- $\Sigma_2(V_2, p) = (\text{triangle de sommet } p \text{ sur la surface latérale du cône } K_1 = \Delta^1) \vee (\text{triangle de sommet } p \text{ sur la surface latérale du cône } K_2 = \Delta^2)$.

Soient ${}_1\theta, {}_1\theta'$ les arêtes de Δ^2 de sommet p , ${}_2\theta, {}_2\theta'$ les arêtes de Δ^2 de même sommet p . Orientons K^1 et K^2 comme $\Psi_p : \Sigma_3(K_3, p) \rightarrow E_3$ l'impose. Supposons que θ, θ' aient été numérotés de telle façon que : si l'on identifie la surface latérale de K^1 et la surface latérale de K^2 , par un difféomorphisme qui renverse les orientations et qui applique Δ^1 sur Δ^2 ,

$${}_1\theta \text{ ira en } {}_2\theta \text{ et } {}_1\theta' \text{ en } {}_2\theta'$$

alors $\tilde{V}_2$ est obtenu en ajoutant un triangle de côtés ${}_1\theta, {}_1\theta' \dots$ et un triangle de côtés ${}_2\theta, {}_2\theta' \dots$

LEMME 3.7. Soient $K'_3, K''_3 \in \mathcal{K}_3$ et supposons que

$$K'_3 \cap K''_3 = Fr K'_3 \cap Fr K''_3 = V_2$$

ayant pour K'_3, K''_3 les propriétés de V_2 du lemme précédent.

Alors :

$$\Theta (K'_3 \cup K''_3) = (\Theta (K'_3) \cup \Theta (K''_3)) / (\Phi)$$

$$\text{où : } \pi'(\tilde{V}_2 \times D_2) \subset \partial(\Theta(K'_3))$$

$$\text{et : } \pi''(\tilde{V}_2 \times D_2) \subset \partial(\Theta(K''_3))$$

sont identifiés.

LEMME 3.8. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions ayant le type d'homotopie de S_3 , et soit

$$((X^n(V_3), \bar{X}^n(V_3)) \dots (Y^g, \bar{Y}^g) \dots (Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3), \Phi)$$

la représentation du lemme 2.7.

On a alors les difféomorphismes suivants :

$$(*) \quad \Theta((T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3)) = \Theta((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \dots F(V_3)) \quad i+1 \leq b$$

$$(**) \quad \Theta((Y^i, \bar{Y}^i) \dots F(V_3)) = \Theta((Y^{i+1}, \bar{Y}^{i+1}) \dots F(V_3)) \quad i+1 \leq g$$

Il suffira de prouver (*), la preuve de (**) est exactement la même. Nous rappelons que chaque $(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})$ est une paire canonique (définition 2.2) et que (lemme 2.8) :

$$(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \dots F(V_3) = [(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \cup \text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})] / (\Phi)$$

et que :

$$(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \cap \text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) = \delta \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}).$$

On vérifie aisément que $\delta \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})$ satisfait aux conditions du lemme 3.6.

De plus :

$$(T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3) = [\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \cup \text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})] / (\Phi)$$

où

$$\begin{aligned} & \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \cap \text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) = \\ & = (T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \cap \text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) = \delta \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}). \end{aligned}$$

Donc, vu les lemmes précédents :

$$\Theta(T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3) = (\Theta(\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) \cap \Theta(\text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))) / (\Phi)$$

$$\Theta((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \dots F(V_3)) = (\Theta((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) \cup \Theta(\text{Rest}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))) / (\Phi)$$

Ce qui reste à faire est de construire un difféomorphisme :

$$b_{i+1} : \Theta(\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) \rightarrow ((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{ Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\delta \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) & \xrightarrow{\pi_{T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}}} & \delta(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \\
\pi \times 0 \downarrow & & \downarrow \pi \times 0 \\
(\delta \text{Supp}(T^{i+1}, T^{i+1}) \times D_2)^\sim & & (\delta(T^{i+1}, T^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, T^{i+1}) \times D_2)^\sim \\
\bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\
\delta \Theta(\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) & \xrightarrow{b_{i+1}} & \delta \Theta((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))
\end{array}$$

On doit faire la preuve séparément pour chacune des trois formes canoniques. Pour la forme canonique I c'est trivial. On va esquisser la preuve pour la forme canonique II. Pour la forme canonique III, la preuve est analogue à celle pour la forme II.

Retournons à la définition 2.2. On voit tout d'abord qu'il existe des applications (plongements C^∞), telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
\delta \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) & \xrightarrow{\pi} & (\delta \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim \\
i \downarrow & \nwarrow \bar{\pi} & \downarrow \mathcal{P} \\
\delta \Theta(\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) & \xleftarrow{Q} & D_2
\end{array}$$

(On voit aisément que $\Theta(\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) = D_5$).

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_2(\Sigma_3(\text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}), p)) \cap \delta \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) & & \\
\Psi_p \swarrow & \downarrow \pi & \\
D_2 & \xleftarrow{\mathcal{P}} & (\delta \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim
\end{array}$$

On doit prouver deux choses :

$$1^\circ) \Theta((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) = D_5$$

2°) L'existence des plongements et diagrammes commutatifs, analogues aux précédents :

$$\begin{array}{ccc}
\partial(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) & \xrightarrow{\pi} & (\delta(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim \\
i \downarrow & \nwarrow \bar{\pi} & \downarrow \mathcal{P}^* \\
\partial \Theta(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) & \xleftarrow{Q^*} & D_2
\end{array}$$

et :

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_2(\Sigma_3((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}), p)) \cap \delta(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) & & \\
\Psi_p \swarrow & \downarrow \pi & \\
D_2 & \xleftarrow{\mathcal{P}^*} & (\delta(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \text{Supp}(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim
\end{array}$$

1°) se prouve de la manière suivante : on prouve aisément qu'il existe un isomorphisme (canonique)

$$(Supp(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim \dot{+} {}_1A \dot{+} {}_2A \dot{+} \dots {}_MA = ((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) Supp(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim$$

où ${}_iA = C_{p_i}(S_1 \times S_1 - \text{int } D_2)$.

Donc :

$$\Theta((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) Supp(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1})) = \Theta((Supp(T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}))^\sim \dot{+} \Theta({}_1A) \dot{+} \dots$$

mais chacun des termes du second membre est D_5 . D'où 1°.

2°) résulte d'un raisonnement analogue à celui par lequel on a prouvé :

$$\Theta J_{u1} \dots J_f \times D_1 = \Theta J'_{u1} \dots J'_f \times D_1.$$

Remarque importante : la démonstration ci-dessus, donne en réalité un peu plus : pour des choix convenables d'indices, on a

$$\Theta \bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2 \dots ((T^i, \bar{T}^i) \dots F(V_3)) = \Theta \bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2 \dots ((T^{i+1}, \bar{T}^{i+1}) \dots F(V_3))$$

Comme : $\Theta j_{u1}^0 \cdot j_{f2}^0 \dots F((V_3))$ est toujours D_4 , quels que soient les J_i^0 on en déduit qu'il existe un système d'indices $J_1 \dots J_N$ tel que

$$\begin{aligned} \Theta j_{u1} \dots j_N ((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) &= \\ = \Theta j_{u1}^0 \dots j_f^0 (F(V_3)) &= D_4 \dots \end{aligned}$$

Quand nous parlerons dorénavant de $\Theta j_{u1} \dots j_N (\dots)$ c'est de ce choix particulier qu'il sera question en réalité.

LEMME 3.9. Soit V_3 une variété compacte à trois dimensions, ayant le type d'homotopie de S_3 , et considérons la représentation du lemme 3.8. On a :

$$\begin{aligned} 1^\circ) \Theta((Z^{i+1}, \bar{Z}^{i+1}), (Z^i, \bar{Z}^i) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) &= \\ = [\Theta((Z^i, \bar{Z}^i) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)); b_i^1] &. \end{aligned}$$

2°) En général :

$$\begin{aligned} \Theta((Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) &= \\ = [\Theta((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)); b_1^1, \dots, b_{n(V_3)^{-1}}^1] & \end{aligned}$$

où $b_i^1 : S_1 \times D_3 \rightarrow \partial \Theta((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3))$ est écrit ainsi : b_i^1 se factorise :

$$\begin{array}{ccc} S_1 \times D_1 & \xrightarrow{i_1} & Z^i \cup \bar{Z}^i \xrightarrow{i'} \partial \Theta J_{u1} \dots J_N ((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) \longrightarrow \\ & \searrow \times D_1 & \downarrow \partial \Theta j_{u1} \dots j_N ((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) \xrightarrow{*}) \longrightarrow \\ & \searrow \times D_1 & \downarrow \partial \Theta ((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) \end{array}$$

Les flèches ont les significations suivantes :

*) la flèche $\partial \Theta \rightarrow \partial \Theta \dots$ signifie ici l'adjonction d'un champ normal à $i'(Z^i \cup \bar{Z}^i)$.

- a) $S_1 \times D_1 \xrightarrow{i} Z^i \cup \bar{Z}^i$ représente $\langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle$.
- b) $i' : X_3 \rightarrow \partial \Theta_4^{j_1} \dots (\dots)$ est $X_3 \rightarrow X_3 \times$ point frontière de D_1 .
- c) Soit $V_2 \subset \text{Fr } X_3$ une variété à deux dimensions. Alors $i' : V_2 \rightarrow \partial \Theta_4^{j_1} \dots (\dots)$ est un plongement $\partial \Theta_4^{j_1} \dots (\dots) \xrightarrow{\times D_1} \partial \Theta_4^{j_1} \dots (\dots)$ représente le passage de (V_2) à $i'(V_2)$ muni d'un champ normal.
- d) Soit $V_3 \subset \partial \Theta_4^{j_1} \dots j_N (\dots)$ une variété à 3 dimensions. Alors, par
- $$V_3 \subset \partial \Theta_4^{j_1} \dots (\dots) \subset \partial (\Theta_4^{j_1} \dots (\dots) \times D_1) = \partial (\Theta(\dots))$$

V_3 est une sous-variété de $\partial (\Theta(\dots))$.

$$\partial \Theta_4^{j_1} \dots (\dots) \rightarrow \partial \Theta(\dots)$$

représente $V_3 \subset \partial \Theta(\dots)$ muni d'un champ normal.

LEMME 3.10. Soit S_3 plongée dans S_4 . Considérons une $(1, 1)$ - S_1 -figure, f de S_3 . Considérons la $(1, 3)$ - S_1 -figure de S_4 , f' , qu'elle engendre par l'adjonction du champ de S_3 orthogonal à f , et du champ de S_4 orthogonal à S_3 . On a :

$$\omega^3(f') = \omega^1(f).$$

($\omega^3(f') \in \pi_1(0_4) = Z_2 = \pi_1(P_3) \ni \omega^1(f)$, $P_3 =$ espace projectif).

LEMME 3.11. $\omega^3(\langle b_i^1 \rangle)$ (calculé dans $\partial \Theta((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) = S_4 = \omega^1(i' \langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle)$ (calculé dans $\partial \Theta_4^{j_1} \dots j_N((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) = S_3$).

LEMME 3.12. $\omega^1(i' \langle Z^i \cup \bar{Z}^i \rangle) = 0$ (calculé dans $\partial \Theta_4^{j_1} \dots j_N(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3) = S_3$).

DEMONSTRATION. Considérons $j_1, \dots, j_N$ donnés. Soient $p_1, \dots, p_N$ les points de forme 2° (définition 2.4) de $(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)$. Supposons que $\varphi_i^{j_i}$ est décrit ainsi :

On considère un rétract de déformation (par contractions de Whitehead) de

$$\Sigma_2(p_i) = \Sigma_2((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3), p_i),$$

$S'_1 \vee S''_1$. On considère $\varphi_i^{j_i}((\Sigma_2(p_i))^{\sim} \times 0)$ comme étant X_2 (définition 2.4). S'_1 va correspondre à $C' = (Z = 0)$ ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) et S''_1 à l'un des cercles de X_2 , C'' , qui a la propriété que C'' coupe C' transversalement (exactement en un point); $C' \vee C''$ est un rétract de déformation par contractions de Whitehead, de X_2^* . On prend le champ normal qui définit complètement $\varphi_i^{j_i}((\Sigma_2(p_i))^{\sim} \times D_1)$, orienté vers l'extérieur de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (On a fait tout ça dans $E_3 = S_3 - (\infty)$).

Ceci définit complètement $\varphi_i^{j_i}$. On voit bien que $\varphi_i^{j'_i}(j'_i \neq j_i)$ est défini de la même manière, en permutant S'_1 avec S''_1 . Supposons que le point q_1 corresponde à S'_1 et q_2 à S''_1 (voir 2.4). C'est-à-dire que $S'_1 \cap S''_1 =$ centre du carré Q , $S'_1 =$ diagonale $q_1 q_3$, $S''_1 =$ diagonale $q_2 q_4$. Considérons alors l'espace Y_3 défini comme dans la

*) Pour la commodité on va prendre $C'' = (x = 0) \cap X_2$.

démonstration de 2.9. $\Sigma_3^{\partial}(p_i)$ contient une $(1, 1)$ - S_1 -figure, univoquement déterminé, de support S_1 , $\langle p_i \rangle$. Le lemme 2.9 nous dit que si $H : Y_3 \rightarrow S_3$ est une immersion telle que :

$$\omega^1(H \langle p_i \rangle) = 0 \quad \text{pour tout } i$$

$$\text{alors} \quad \omega^1(H \langle Z^1 \cup \bar{Z} \rangle) = 0 \quad \text{pour tout } 1.$$

On va construire un plongement C^∞

$$\hat{H} : Y_3 \rightarrow \partial \Theta^{j_1 \dots j_N}((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) = S_3$$

ayant les propriétés suivantes :

$$1^\circ. \hat{H}|_{X_3} = i'|_{X_3}$$

$$2^\circ. \omega^1(\hat{H} \langle p_i \rangle) = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

La construction de H est la suivante :

$$\hat{H}(X_3) = i'(X_3)$$

et $\hat{H}$ pour $(\Sigma_3^{\partial}(p_i))^\sim$ est par définition (voir la représentation ci-dessus) :

$$((x^2 + y^2 + z^2 = 1) - (z < -\frac{1}{2}) - (z > \frac{1}{2})) \cup R,$$

où R est une bande de forme $X_2 \times D_1$ définie par des vecteurs normaux, dirigés vers l'intérieur de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (C'est donc un ensemble difféomorphe à $S_1 \times D_2$). On voit bien que la définition est cohérente, 1° est donc automatiquement satisfait. Reste à prouver 2° .

On observe que $\hat{H}(\langle p_i \rangle) = \text{la } (1, 1)\text{-}S_1\text{-figure de support } (x = 0) \cap X_2 = C''$ et dont le champ transversal est constitué par les vecteurs orientés vers 0. On observe que dans $\Theta^{j_1 \dots j_N}(T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)$ il existe un disque D_3 dont la frontière contient $\hat{H}(\langle p_i \rangle)$ (il suffit de voir que D_3 existe dans E_3 , l'espace dans lequel on fait les considérations ci-dessus $E_3 = \partial D_4^i - (\infty)$). Ceci nous dit (voir le lemme 3.10) que

$$\omega^3((\hat{H}(\langle p_i \rangle))') = 0$$

dans $\partial \Theta((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3))$. Donc

$$\omega^1(\hat{H} \langle p_i \rangle) = 0$$

(dans $\partial \Theta^{j_1 \dots j_N}((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3))$).

Il suffit de combiner ces lemmes pour prouver le théorème A de l'introduction.

En effet, le lemme 3.4 nous dit que $\Theta(F(V_3)) = D_5$. Le lemme 3.8 nous dit donc que $\Theta((T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) = D_5$. Les lemmes 3.1, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, nous disent que

$$\begin{aligned} \Theta((Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) = \\ = (S_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } \bar{D}_3^i) \times \bar{D}_2 . \end{aligned}$$

Le lemme 3.8 nous dit alors que

$$\begin{aligned} \Theta((Y^g, \bar{Y}^g) \dots (Z^n(V_3)^{-1}, \bar{Z}^n(V_3)^{-1}) \dots (T^b, \bar{T}^b) \dots F(V_3)) = \\ = (S_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i) \times D_2 . \end{aligned}$$

D'autre part, comme $(Y^g, \bar{Y}^g) \dots F(V_3)$ est une variété à bord, le lemme 3.3 nous dit que

$$\begin{aligned} \Theta((Y^g, \bar{Y}^g) \dots F(V_3)) = \\ = ((Y^g, \bar{Y}^g) \dots F(V_3)) \times D_2 . \end{aligned}$$

Mais le lemme 2.7 nous dit que

$$(Y^g, \bar{Y}^g) \dots F(V_3) = V_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i$$

donc C.Q.F.D.

CHAPITRE IV

COMPLEMENTS DIVERS.

Nous allons montrer tout d'abord pourquoi le théorème A prouvé à la fin du chapitre précédent représente une approximation à un facteur $[0, 1]$ -près de l'hypothèse de Poincaré. On va donc prouver que l'égalité du théorème A, si l'on remplace le facteur D_2 par D_1 ($= [0, 1]$), devient une égalité équivalente à l'hypothèse de Poincaré.

Pour cela il suffit de prouver le théorème suivant :

THEOREME B. Soit W_3 une variété compacte à bord, dont le bord ∂W_3 est la réunion d'un nombre fini de sphères $S_2^1, \dots, S_2^n$. Supposons que

$$W_3 \times D_1 = (S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i) \times D_1$$

où D_3^i sont des disques, C^∞ , disjoints. (= signifie difféomorphisme). Alors

$$W_3 = (S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i).$$

DEMONSTRATION. Il est clair que $\pi_1(W_3) = 0$. $\partial(W_3 \times D_1) = \partial((S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i) \times D_1)$ peut être décrit ainsi : on désigne par s_2^i le bord de D_3^i . On considère deux exemplaires de $S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i : (S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i)'$ et $(S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i)''$.

$$\partial((S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i) \times D_1) = [(S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i)' \cup (S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i)''] / (\Phi)$$

où chaque $(s_2^i)'$ est identifié à $(s_2^i)''$.

On voit facilement que le revêtement universel de $\partial((S_3 - \bigcup_1^n \text{int } D_3^i) \times D_1) = \partial(W_3 \times D_1)$, $\tilde{X}_3$, est S_3 à laquelle on a enlevé un ensemble parfait totalement discontinu. Comme $\pi_1(W_3) = 0$, l'inclusion naturelle $W_3 \subset \partial(W_3 \times D_1)$, $(W_3 \times 0)$ se relève en un plongement C^∞ , $j : W_3 \rightarrow \tilde{X}_3$ qui peut être considéré comme un plongement C^∞ , $j' : W_3 \rightarrow S_3$. Mais il est facile à prouver que toute variété C^∞ à bord, contenue dans S_n , dont le bord est une réunion finie de S_{n-1} est homéomorphe à un disque percé [5]. Mais en dimension 3, homéomorphisme et difféomorphisme c'est la même chose [10], [31], [1]. Donc C.Q.D.S.

La distance qui sépare les énoncés :

$$\begin{aligned} (V_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i) \times D_2 &= (S_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } \bar{D}_3^i) \times \bar{D}_2 \\ (V_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } D_3^i) \times D_1 &= (S_3 - \bigcup_1^{n(V_3)} \text{int } \bar{D}_3^i) \times \bar{D}_1 \end{aligned}$$

peut être mesurée par le fait qu'il existe des variétés V_u à bord, C^∞ , telles que :

- $\pi_1(\partial V_4) \neq 0$ (donc V_4 n'est pas homéomorphe à D_4)

- $V_4 \times D_1 = D_5$ (difféomorphisme)

(voir [13], [7], [18]). La plus simple manière de décrire ces variétés se trouve dans [18]. V_4^i ($i = 0, 1, \dots$) y est définie de la manière suivante :

On considère un disque D_3 , dont on a enlevé un tube noué T_3 (noeud de trèfle) de frontière T_2 . Dans $S_3 = \partial D_4$ on considère un tore non noué, mais tordu, avec torsion i . On identifie ce tore avec $T_2 \times D_1 \subset (D_3 - T_3) \times D_1$. On obtient ainsi V_4^i . On prouve que :

$$1^\circ. V_4^i \neq V_4^{i'} \quad (\pi_1(\partial V_4^i) \neq \pi_1(\partial V_4^{i'}))$$

$$2^\circ. V_4^0 = D_4.$$

$$3^\circ. V_4^i \times D_1 \cong V_4^{i'} \times D_1 \text{ si } i \equiv i' \pmod{2}.$$

On a posé le problème de déterminer $V_4^1 \times D_1$. [18]

Par des considérations apparentées à ce travail, on peut prouver que : si V_5 est une variété compacte, C^∞ , à 5 dimensions, qui s'obtient en grossissant un complexe contractible de dimension 2, K_2 , $^{*)}$ (c'est-à-dire si V_5 se contracte, par contractions de Whitehead à K_2), V_5 est difféomorphe à D_5 . $^{**})$

Ceci permet de prouver que $n(V_3) = 1$, et que $V_4^1 \times D_1 = D_5$. La démonstration paraîtra ailleurs.

Pour passer de $n(V_3) = 1$ à $n(V_3) = 0$ il faut résoudre un problème de dénouement C^∞ , de S_2 dans S_4 ; pour passer de $n(V_3) = 0$ à la solution de l'hypothèse de Poincaré il faut résoudre un problème de régularisation de fonctions continues, C^∞ , sauf en un point. Pour des détails voir [16]. $^{***})$

$^{*)}$ $\pi_1(K_2) = 0$.

$^{**})$ On prouvera même le théorème plus fort : « L'ensemble des grossissements différentiables 5-dimensionnels d'un complexe 2-dimensionnel K_2 , est complètement déterminé (à un difféomorphisme près) par le type simple d'homotopie de K_2 » (voir [36]).

$^{***})$ Voir aussi [37], [38].

REFERENCES.

- [1] R.H. BING. An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. *Ann. of Math.* 69 (1959) pp. 37-65.
- [2] A. DOUADY. Arrondissement des arêtes. *Séminaire H. Cartan 1961/62.*
- [3] M. HIRSCH. Immersions of manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.* 93 (1959) pp. 242-276.
- [4] M. HIRSCH. On embedding differentiable manifolds in euclidean space. *Ann. of Math* 73 (1961) pp. 613-623.
- [5] B. MAZUR. On embedding of spheres. *Bull. Am. Math. Soc.* 65 (1959) pp. 59-65.
- [6] B. MAZUR. Stable equivalence in defferentiable topology. *Bull. Am. Math. Soc.* 67 (1961) pp. 377-384.
- [6'] B. MAZUR. Simple neighborhoods. *Bull. Am. Math. Soc.* 68 (1962) pp. 87-92.
- [7] B. MAZUR. A note on some contractible 4-manifolds. *Ann. of Math.* 73 (1961) pp. 221-228.
- [8] B. MAZUR. The theory of neighborhoods. (à paraître).
- [9] J. MILNOR. Differentiable manifolds which are homotopy spheres. (1958) (miméographié).
- [10] E.E. MOISE. Affine structures in 3-manifolds. *V. Ann. of Math.* t 56 (1952) pp. 96-114.
- [11] C.D. PAPAKYRYAKOPOULOS. Some problems on 3-dimensional manifolds. *Bull of Amer. Math. Soc.* t. 64 (1958) pp. 317-335.
- [12] C.D. PAPAKYRYAKOPOULOS. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.* t.66 (1957) pp. 1-26.
- [13] V. POENARU. Les décompositions de l'hypercube en produit topologique. *Bull. Soc. Math. France* t.88 (1960) pp. 113-129.
- [14] V. POENARU. Sur quelques propriétés des variétés simplement connexes à 3 dimensions. *Rendiconti di Matematica.* (1-2) Vol. 20 (1961) pp. 235-269.
- [15] V. POENARU. Sur la théorie des immersions. (à paraître).
- [16] V. POENARU. Produits de variétés différentiables par un disque. (à paraître).
- [17] H. POINCARÉ. V-ième Complément à l'Analysis Situs. *Rendiconti di Palermo* tXVIII (1904) pp. 45-110.
- [18] G. DE RHAM. Factorisation topologique du disque à 5 dimensions. *Séminaire Ehresmann* 1961.
- [19] S. SMALE. The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces. *Ann. of Math.* 69 (1959) pp. 327-344.
- [20] S. SMALE. The generalized Poincaré Conjecture in higher dimensions. *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 66 (1960) pp. 373-375.
- [21] S. SMALE. On gradient dynamical systems. *Ann. of Math.* 74 (1961) pp. 199-206.
- [22] S. SMALE. Generalized Poincaré Conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math.* 74 (1961) pp. 391-406.

- [23] S. SMALE. On the structure of manifolds. (à paraître).
- [24] J. STALLINGS. Polyhedral homotopy-spheres. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) pp. 485 - 488.
- [25] J. STALLINGS. The topology of piece-wise linear, high-dimensional manifolds. (à paraître).
- [26] R. THOM. La classification des immersions. Séminaire Bourbaki 1957.
- [27] A.H. WALLACE. Modification and cobounding manifolds. II. I. Math. Mech. 10 (1961) pp. 773 - 809.
- [28] J.H.C. WHITEHEAD. Simplicial spaces, Nuclei and m-Groups. Proc. Lond Math. Soc. 45 (1939) pp. 243 - 327.
- [29] J.H.C. WHITEHEAD. Simple homotopy types. Amer. J. of Math. LXXII (1950) pp. 1 - 57.
- [30] J.H.C. WHITEHEAD. Simple homotopy types. (Oxford, miméographié).
- [31] J.H.C. WHITEHEAD. Manifolds with transverse fields in euclidean space. Ann. of Math. 73 (1961) 154 - 212.
- [32] J.H.C. WHITEHEAD. The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space (Proc. Lond. Math. Soc.).
- [33] E.C. ZEEMANN. The generalized Poincaré Conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) pp. 270.
- [34] E.C. ZEEMANN. The Poincaré Conjecture for $n \geq 5$. Dans le volume « Topology of 3-manifolds » Georgia 1962. pp. 198 - 204.
- [35] J.H.C. WHITEHEAD. On C^1 Complexes. Ann. of Math. 1941.
- [36] V. POENARU. Le théorème de grossissement (à paraître).
- [37] V. POENARU. Le théorème de régularisation (à paraître).
- [38] V. POENARU. Homotopie régulière et isotopie I, II (à paraître).