

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

OLAV ARNFINN LAUDAL

Sur la limite projective et la théorie de la dimension. I

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 5, p. 1-14

[<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A6_0>](http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A6_0)

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Décembre 1961

SUR LA LIMITE PROJECTIVE
 ET LA THEORIE DE LA DIMENSION. I

par OLAV ARNFINN LAUDAL

Introduction. Soient C et D deux catégories quelconques. Nous désignons par $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ la catégorie des foncteurs sur $\underline{C}$ à valeur dans $\underline{D}$ – un objet étant un tel foncteur, une flèche, de source F et de but G étant une transformation naturelle $h: F \rightarrow G$.

Soit Φ l'ensemble des flèches de $\underline{C}$ et soit C l'ensemble d'objets de $\underline{C}$. Notons $S, B: \Phi \rightarrow C$ les fonctions source et but. Soit Φ' un sous-ensemble de Φ stable pour la composition. Nous notons $Hom_{\Phi'}(F, G)$ l'ensemble de tous les Φ' -morphisms de source F et de but G , un tel étant défini par la donnée d'une famille $\{h_c\}_{c \in C}$ de flèches dans $\underline{D}$, $h_c: F(c) \rightarrow G(c)$ assujettie à la condition suivante: pour tout $\varphi \in \Phi'$ nous avons:

$$h_{B(\varphi)} \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ h_{S(\varphi)}$$

En particulier, $Hom_{\Phi}(F, G)$ – noté aussi $Hom(F, G)$ – est l'ensemble de toutes les flèches de $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ de source F et de but G .

DEFINITION: Soit F un objet de $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ et soit d un objet de $\underline{D}$. Nous disons que d est la limite projective de F p. r. à Φ' , noté $\varprojlim_{\Phi'} F$, si:

P 1. il existe pour tout $c \in C$ une flèche $\pi_c: d \rightarrow F(c)$ dans $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ telle que pour tout $\varphi \in \Phi'$ nous avons:

$$\pi_{B(\varphi)} = F(\varphi) \circ \pi_{S(\varphi)}$$

P 2. d est universel pour cette propriété.

Nous démontrons que si un tel d existe il est unique à une équivalence près. En particulier, nous posons $\varprojlim_{\Phi} F = \varprojlim_{\Phi} F$.

Nous n'allons pas nous occuper de l'existence de ces notions pour les catégories

générales. Bornons-nous à indiquer qu'il suffit pour la plupart des considérations qui vont suivre que $\underline{D}$ satisfait aux conditions suivantes :

1. $\underline{D}$ est abélienne.
2. $\coprod$ et $\prod$ indexés par Φ , existent dans $\underline{D}$ et y sont exacts.
3. $\underline{D}$ contient suffisamment d'objets projectifs et injectifs.

Pour simplifier, nous allons supposer que $\underline{D} = \text{Mod}_L$, la catégorie des modules sur l'anneau L , L fixé une fois pour toutes et supposé unitaire.

Il est alors trivial de vérifier que $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ est une catégorie abélienne, que Hom_{Φ} , et $\lim_{\leftarrow \Phi}$, existent et sont des foncteurs sur $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ à valeurs dans Mod_L . On vérifie que Hom_{Φ} , et $\lim_{\leftarrow \Phi}$, sont exacts à gauche.

1. Objets projectifs et injectifs dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$.

Soit $\{\bar{F}_c\}_{c \in C}$ une famille de modules projectifs et soit B_c l'ensemble $\{\varphi \mid \varphi \in \Phi, B(\varphi) = c\}$. A tout $\psi \in \Phi$ on associe l'application $\psi_*: B_{S(\psi)} \rightarrow B_{B(\psi)}$ définie par $\varphi \mapsto \psi \circ \varphi$. Posons $F(c) = \prod_{\varphi \in B_c} \bar{F}_{S(\varphi)}$. ψ_* induit un homomorphisme $F(\psi): F(S(\psi)) \rightarrow F(B(\psi))$.

On obtient ainsi un objet F dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$.

PROPOSITION 1.1.a. F est un objet projectif.

DEMONSTRATION : Soit $b': G \rightarrow H$ une surjection dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ et soit $b: F \rightarrow H$ une flèche. Il est clair que b est donné par ses restrictions aux $\bar{F}_c$, soit $\bar{b}_c$. Pour tout $c \in C$ soit $\bar{b}_c'': \bar{F}_c \rightarrow G(c)$ un homomorphisme tel que $b'_c \circ \bar{b}_c'' = \bar{b}_c$ existe puisque $\bar{F}_c$ est projectif. Or ces $\bar{b}_c''$ définissent un $b'': F \rightarrow G$ et on a : $b' \circ b'' = b$. Donc F est projectif.

Q. E. D.

DEFINITION : On appelle objet $\prod$ -projectif tout objet F défini par une telle famille de modules projectifs.

Soit $\{\bar{E}_c\}_{c \in C}$ une famille de modules injectifs. Soit S_c l'ensemble $\{\varphi \mid \varphi \in \Phi, S(\varphi) = c\}$. Posons $E(c) = \prod_{\varphi \in S_c} \bar{E}_{B(\varphi)}$. Une flèche $\psi \in \Phi$ induit une application $\psi^*: S_{B(\psi)} \rightarrow S_{S(\psi)}$ définie par $\varphi \mapsto \varphi \circ \psi$ et celui-ci définit une projection $E(\psi): E(S(\psi)) \rightarrow E(B(\psi))$. On obtient ainsi un objet E de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ et on démontre :

PROPOSITION 1.1.b. E est un objet injectif.

DEFINITION : On appelle objet $\prod$ -injectif tout objet E défini par une telle famille de modules injectifs.

PROPOSITION 1.2.a. Il existe dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ suffisamment d'objets $\prod$ -projectifs.

DEMONSTRATION : Soit G un objet de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ et soit pour tout $c \in C$, $\bar{b}_c$ un homomorphisme d'un module projectif $\bar{F}_c$ sur $G(c)$. La famille $\{\bar{F}_c\}_{c \in C}$ définit un objet Π -projectif F . Nous avons $F(c) = \prod_{\varphi \in B_c} \bar{F}_S(\varphi)$ donc l'homomorphisme $b_c : F(c) \rightarrow G(c)$ défini par $b_c = \prod_{\varphi \in B_c} G(\varphi) \circ \bar{b}_S(\varphi)$ est surjectif et il est facile de montrer que :

$$b_{B(\psi)} \circ F(\psi) = G(\psi) \circ b_S(\psi)$$

pour tout $\psi \in \Phi$. Or, ceci veut dire que $\{b_c\}_{c \in C}$ définit une surjection $b : F \rightarrow G$.

Q. E. D.

Par un raisonnement dual on démontre :

PROPOSITION 1.2.b : Il existe dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ suffisamment d'objets Π -injectifs.

REMARQUE : Tout ensemble ordonné Γ peut être considéré comme une catégorie $\underline{C}$: $C = \Gamma$, $\Phi = \{(\gamma, \gamma') \mid \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma < \gamma'\}$. Soit $\mathbf{Z}$ l'ensemble ordonné des entiers rationnels et soit R un module injectif. Le foncteur constant $R : \mathbf{Z} \rightarrow \text{Mod}_L$ est injectif considéré comme objet dans $\text{Hom}(\mathbf{Z}, \text{Mod}_L)$, mais il est clair que R n'est pas Π -injectif. Cependant, on peut démontrer :

PROPOSITION 1.3.a : Soit Γ un ensemble ordonné tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble B_γ est fini, alors tout objet projectif de $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$, L étant héréditaire est Π -projectif.

PROPOSITION 1.3.b : Soit Γ un ensemble ordonné tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble S_γ est fini, alors tout objet injectif de $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$ est Π -injectif.

Les démonstrations ne seront pas données ici.

Nous pouvons aussi démontrer un théorème analogue au théorème 1.4.1 de [3]. Pour cela, soit L le foncteur constant $\Gamma \rightarrow \text{Mod}_L$ considéré comme objet de $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$. Nous appellerons, par abus de langage, idéal de L toute injection $j : I \rightarrow L$ dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$. Il est clair que pour tout $\gamma \in \Gamma$, j_γ est un isomorphisme de I_γ sur un idéal I'_γ de L . Si $\gamma < \gamma'$ nous avons $I'_\gamma \subset I'_{\gamma'}$.

THEOREME 1 : L'objet F dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$ est un objet injectif si, et seulement si, pour tout idéal I de L et toute flèche $f : I \rightarrow F$ il existe un $x \in \varprojlim F$ tel que $f_\gamma(\lambda) = \lambda x_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\lambda \in I_\gamma$.

DEMONSTRATION : Analogie à celle du théorème 1.4.1. de [3].

Soit $\mathcal{H} : \underline{C}_1 \rightarrow \underline{C}_2$ un foncteur. Il induit un foncteur $\mathcal{H}^* : \text{Hom}(\underline{C}_2, \text{Mod}_L) \rightarrow \text{Hom}(\underline{C}_1, \text{Mod}_L)$. En général il est faux que $\mathcal{H}^*(F)$ est injectif (resp. projectif) si F l'est. Nous aurons cependant besoin plus tard de deux résultats triviaux qu'il faut bien écrire.

PROPOSITION 1.4. a: Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$ telle que si $\varphi \in \Phi$ et si $B(\varphi) \in C_o$ alors $\varphi \in \Phi_o$. Soit $i: \underline{C}_o \rightarrow \underline{C}$ le foncteur canonique et soit F un objet Π -projectif de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ alors $i^*(F)$ est Π -projectif.

PROPOSITION 1.4. b: Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$ telle que si $\varphi \in \Phi$ et si $S(\varphi) \in C_o$ alors $\varphi \in \Phi_o$. Soit $i: \underline{C}_o \rightarrow \underline{C}$ le foncteur canonique et soit F un objet Π -injectif de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ alors $i^*(F)$ est Π -injectif.

Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de la catégorie $\underline{C}$ et soit $i: \underline{C}_o \rightarrow \underline{C}$ le foncteur canonique. Pour tout objet F de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ il existe une application canonique :

$$i^\circ: \lim_{\leftarrow \underline{C}} F \rightarrow \lim_{\leftarrow \underline{C}_o} F$$

qui induit des applications :

$$i^n: \lim_{\leftarrow \underline{C}}^{(n)} F \rightarrow \lim_{\leftarrow \underline{C}_o}^{(n)} F$$

voir § 4.

2. Les foncteurs Hom_{Φ} , et $\lim_{\leftarrow \Phi}$.

Le foncteur Hom_{Φ} , est équilibré (balanced, dans la terminologie de Cartan-Eilenberg) dans le sens suivant. Soit F un objet Π -projectif de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ alors le foncteur $\text{Hom}_{\Phi}, (F, *)$ est exact. Soit G un objet Π -injectif alors le foncteur $\text{Hom}_{\Phi}, (*, G)$ est exact.

Pour calculer les dérivées de $\text{Hom}_{\Phi},$, notées $\text{Ext}_{\Phi}^{(n)}$, on peut alors prendre, ou bien une résolution Π -projective F^* de F et calculer les groupes de cohomologie du complexe

$$\text{Hom}_{\Phi}, (F^*, G)$$

ou bien une résolution Π -injective G^* de G et calculer les groupes de cohomologie du complexe

$$\text{Hom}_{\Phi}, (F, G^*)$$

Notons $\lim_{\leftarrow \Phi}^{(n)}$ les dérivées du foncteur $\lim_{\leftarrow \Phi}$. Alors nous démontrons :

PROPOSITION 2.1: Soit M un module projectif considéré comme objet constant de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ et soit F un objet de $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$, alors nous avons un isomorphisme fonctoriel en F :

$$\text{Ext}_{\Phi}^{(n)}(M, F) \simeq \text{Hom}_L(M, \lim_{\leftarrow \Phi}^{(n)} F)$$

DEMONSTRATION : Il est facile de voir que $\text{Hom}_{\Phi'}(M, F)$ est isomorphe à $\text{Hom}_L(M, \varprojlim_{\Phi'} F)$. Soit en effet $b \in \text{Hom}_{\Phi'}(M, F)$, $b = \{b_c\}_{c \in C}$ où $b_c : M \rightarrow F(c)$ est tel que pour tout $\varphi \in \Phi'$ nous avons :

$$b_{B(\varphi)} = F(\varphi) \circ b_{S(\varphi)}$$

il existe alors un $b' : M \rightarrow \varprojlim_{\Phi'} F$ unique tel que, si $\pi_c : \varprojlim_{\Phi'} F \rightarrow F(c)$ sont les flèches données par la définition de $\varprojlim_{\Phi'}$, nous avons $b_c = \pi_c \circ b'$. L'isomorphisme en question est celui qui à b associe b' . Cet isomorphisme est évidemment fonctoriel, en F .

Donc, prenons une résolution injective F^* de F , alors nous avons un isomorphisme de complexes

$$\text{Hom}_{\Phi'}(M, F^*) \cong \text{Hom}_L(M, \varprojlim_{\Phi'} F^*).$$

Puisque $\text{Hom}_L(M, *)$ est exact, M étant projectif, nous trouvons le résultat voulu en prenant la cohomologie de chaque côté.

Q. E. D.

COROLLAIRE : Il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\text{Ext}_{\Phi'}^{(n)}(L, F) \cong \varprojlim_{\Phi'}^{(n)} F.$$

DEMONSTRATION : L est projectif dans Mod_L et $\text{Hom}_L(L, \varprojlim_{\Phi'}^{(n)} F) \cong \varprojlim_{\Phi'}^{(n)} F$.

Q. E. D.

3. Résolutions projectives de L dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$

Soit $\underline{C}_0$ une sous-catégorie de la catégorie $\underline{C}$.

Notons B_c^0 l'ensemble $\{\varphi \mid \varphi \in \Phi, S(\varphi) \in C_0 \text{ \& } B(\varphi) = c\}$. Dans B_c^0 on distingue les sous-ensembles finis $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ tels qu'il existe des $\psi_i \in \Phi_0$ $i = 0, \dots, n-1$ pour lesquels :

$$\varphi_i \circ \psi_i = \varphi_{i+1} \quad i = 0, \dots, n-1.$$

On obtient ainsi un schéma simplicial noté K_c^0 .

Soit $\psi \in \Phi$; comme on l'a vu, ψ induit une application $\psi_* : B_{S(\psi)} \rightarrow B_{B(\psi)}$ donc aussi une application $\psi_*^0 : B_{S(\psi)}^0 \rightarrow B_{B(\psi)}^0$. On vérifie facilement que ψ_*^0 transforme tout sous-ensemble distingué en un sous-ensemble distingué, donc induit une application simpliciale :

$$K^0(\psi) : K_{S(\psi)}^0 \rightarrow K_{B(\psi)}^0$$

On obtient ainsi un foncteur K^0 sur $\underline{C}$ à valeurs dans la catégorie $\underline{K}$ des schémas simpliciaux. Soit C_* le foncteur gradué des chaînes singulières sur $\underline{K}$ à valeurs dans Mod_L . Notons C_*^0 le foncteur $C_* \circ K^0$, c'est un foncteur sur $\underline{C}$ à valeurs dans Mod_L ,

gradué   opérateur différentiel $(d_n)_{n \geq 0}$ de degré -1. Pour tout $n \geq 0$ nous avons donc un objet C_n° dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ et une flèche

$$d_n : C_{n+1}^\circ \rightarrow C_n^\circ$$

dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$.

PROPOSITION 3.1 : Pour tout $n \geq 0$, C_n° est un objet $\coprod$ -projectif.

DEMONSTRATION : Soit $\bar{L}_{(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)}$ l'anneau L , pour tout n -upple $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ de Φ_0 . Posons $\bar{L}_c^\circ = L$ pour tout $c \in C$, et

$$\begin{aligned} \bar{L}_c^n &= \coprod \bar{L}_{(\psi_0, \dots, \psi_{n-1})} && \text{pour } n > 0. \\ B(\psi_0) &= c \\ B(\psi_i) &= S(\psi_{i-1}) \\ i &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Si $c \notin C_0$, alors $\bar{L}_c^n = 0$, une somme vide étant nulle. Il est facile de voir qu'il existe un isomorphisme canonique

$$i_c : C_n^\circ(c) \rightarrow \coprod_{\varphi \in B_c} \bar{L}_{S(\varphi)}^n$$

D'autre part, si $\psi \in \Phi$ l'application $\psi_* : B_{S(\psi)} \rightarrow B_{B(\psi)}$ induit des homomorphismes

$$\begin{aligned} C_n^\circ(\psi) : C_n^\circ(S(\psi)) &\rightarrow C_n^\circ(B(\psi)) \\ L^n(\psi) : \coprod_{\varphi \in B_{S(\psi)}} \bar{L}_{S(\varphi)}^n &\rightarrow \coprod_{\varphi \in B_{B(\psi)}} \bar{L}_{B(\varphi)}^n \end{aligned}$$

Or on montre sans difficulté que :

$$i_{B(\psi)} \circ C_n^\circ(\psi) = L^n(\psi) \circ i_{S(\psi)}$$

donc C_n° est $\coprod$ -projectif.

Q. E. D.

Il en résulte que si, pour tout $c \in C$, le schéma K_c° est non-vidé et acyclique, le complexe C_*° est une résolution projective de L dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$. Or, K_c° est acyclique si, pour tout sous-complexe fini M de $|K_c^\circ|$ il existe un sommet ρ tel que le cône de base M et de sommet ρ est contenu dans $|K_c^\circ|$.

PROPOSITION 3.2 : Soit $\underline{C}_0$ une sous-catégorie de $\underline{C}$ telle que :

- 1) Pour tout $c \in C$ il existe un $\varphi \in B_c$ tel que $S(\varphi) \in \underline{C}_0$.
- 2) Pour toute famille finie $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ d'éléments de B_c° il existe un $\varphi \in B_c^\circ$ et une famille d'éléments de Φ_0 , $\psi_1, \dots, \psi_n$ tels que : pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ on a,
ou bien $\varphi_i \circ \psi_i = \varphi$ ou bien $\varphi \circ \psi_i = \varphi_i$

Dans ce cas C_*^o est une résolution Π -projective de L dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$.

DEMONSTRATION : La condition 1) exprime que $K_c^o \neq \Phi$ pour tout $c \in C$. La condition 2) exprime que pour toute famille finie de sommets de K_c^o , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, il existe un sommet φ tel que φ_i peut être lié à φ par un 1-simplexe. Or soit $(\varphi_o, \dots, \varphi_n)$ un n -simplexe dans K_c^o et soit φ un sommet tel que tous les φ_i peuvent être liés à φ par un 1-simplexe, c'est-à-dire tel qu'il existe des $\psi_i \in \Phi_o$ pour lesquels nous avons, ou bien

$$\varphi_i \circ \psi_i = \varphi \text{ ou bien } \varphi \circ \psi_i = \varphi_i$$

Soit i_o le plus petit des i tels que $\varphi_i = \varphi \circ \psi_i$ s'il existe de tels i , sinon on prend $i_o = n + 1$. Il est alors clair que $(\varphi_o, \varphi_1, \dots, \varphi_{i_o-1}, \varphi, \varphi_{i_o}, \dots, \varphi_n)$ est un $(n + 1)$ simplexe de K_c^o . Donc tout sous-complexe fini de $|K_c^o|$ admet un cône dans $|K_c^o|$, c'est-à-dire K_c^o est acyclique.

Q. E. D.

Soit Γ un ensemble ordonné et soit Γ_o un sous-ensemble. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ il est facile de voir que K_γ^o est un schéma simplicial ordonné (voir Chap. 1. 3. 8 de [3]), que $K^o(\psi)$ est une application simpliciale strictement croissante, donc que $C_*^{++} \circ K^o$ est un complexe dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ à opérateur de dérivation de degré -1. On démontre, comme ci-dessus :

PROPOSITION 3.3. Pour tout $n \geq 0$, C_n^{++} est un objet Π -projectif.

PROPOSITION 3.4. Soit Γ_o un sous-ensemble de l'ensemble ordonné Γ , tel que :

- 1) Γ_o est cofinal dans Γ , c'est-à-dire, pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe un $\gamma' \in \Gamma_o$ $\gamma' > \gamma$.
- 2) pour toute famille finie d'éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de Γ_o tels que $\gamma_i > \gamma$ pour $i = 1, \dots, n$ il existe un $\gamma_o \in \Gamma_o$, $\gamma_o > \gamma$ tel que pour tout i on a, ou bien

$$\gamma_o < \gamma_i \text{ ou bien } \gamma_i < \gamma_o.$$

Dans ce cas C_*^{o++} est une résolution Π -projective de L dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$.

4. Les complexes Π^* et Π_+^* .

Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$. Supposons que les conditions 1) et 2) de la Proposition 3.1. sont satisfaites, donc que C_*^o est une résolution Π -projective de L dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$. Soit F un objet dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$ et considérons le complexe :

$$\text{Hom}_{\Phi'}(C_*^o, F)$$

Nous allons le calculer dans le cas $\Phi' = \Phi$. Un élément b de $\text{Hom}(C_n^o, F)$ est donné par la famille $\{b_c\}_{c \in C}$, $b_c : C_n^o(c) \rightarrow F(c)$. Or $C_n^o(c) = \coprod_{\varphi \in B(c)} \overline{L} S(\varphi)$. Compte tenu de la restriction sur les b_c , à savoir :

$$h_B(\psi) \circ C_n^\circ(\psi) = F(\psi) \circ h_S(\psi)$$

nous voyons que la correspondance

$$\{b_c\}_{c \in C} \rightarrow \{\bar{b}_c\}_{c \in C}$$

est biunivoque. Or, pour chaque $c \in C$ on peut choisir librement un $\bar{b}_c : \bar{L}_c^n \rightarrow F(c)$ et ainsi obtenir une flèche $C_n^\circ \rightarrow F$. Donc la correspondance

$$b \rightarrow \{\bar{b}_c\}_{c \in C}$$

induit un isomorphisme

$$\text{Hom}(C_n^\circ, F) \rightarrow \prod_{c \in C} \text{Hom}_L(\bar{L}_c^n, F(c))$$

$$\text{Pour } n = 0, \bar{L}_c^\circ = L \quad \text{donc } \text{Hom}(C_0^\circ, F) \simeq \prod_{c \in C} F(c)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } n \neq 0, \bar{L}_c^n = \prod \bar{L}(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) & \text{donc } \text{Hom}(C_n^\circ, F) \simeq \prod_{c \in C} F(B(\varphi_0)) \\ \varphi_i \in B_c & \varphi_i \in B_c \\ \varphi_i \circ \psi_i = \varphi_{i+1} & \varphi_i \circ \psi_i = \varphi_{i+1} \\ \psi_i \in \Phi_0 \quad i = 0, \dots, n-1 & \psi_i \in \Phi_0 \quad i = 0, \dots, n-1 \end{array}$$

Il vient aussi après un petit calcul que l'homomorphisme $\text{Hom}(d_n, F) = \partial_n$ est donné par

$$\partial_n(\xi) \psi_0, \dots, \psi_n = F(\psi_0)(\xi \psi_1, \dots, \psi_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \xi \psi_0, \dots, \hat{\psi}_k, \dots, \psi_n$$

Le complexe ainsi obtenu se note $\prod^* F$. Il a été étudié par J. E. Roos [1].

Par le Corollaire de la Proposition 2.1 nous avons :

PROPOSITION 4.1 : *Le n -ième groupe de cohomologie de $\prod^* F$ est isomorphe à $\varprojlim^n F$. L'isomorphisme étant fonctoriel.*

Soit maintenant Γ_0 un sous-ensemble de l'ensemble ordonné Γ . Supposons que les conditions de la Proposition 3.4 sont satisfaites, alors $C_*^{\circ++}$ est une résolution $\prod$ -projective de L dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$. Soit F un objet dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$ et considérons le complexe

$$\text{Hom}_{\Phi'}(C_*^{\circ++}, F)$$

Supposons que $\Phi' = \Phi$, alors en procédant exactement comme ci-dessus nous trouvons :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C_0^{\circ++}, F) &= \prod_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma \\ \text{Hom}(C_n^{\circ++}, F) &\simeq \prod_{\substack{\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n-1} \\ \gamma_i \in \Gamma_0, \gamma_i \neq \gamma_j \text{ si } i \neq j}} F \min(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \end{aligned}$$

Posons $\text{Hom}(d_n^+, F) = \partial_n^+$, alors :

$$\partial_n^+(\xi)_{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n} = \eta_{\gamma_0}^{\gamma_1}(\xi_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \xi_{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \hat{\gamma}_k, \dots, \gamma_n}$$

où $\eta_{\gamma_0}^{\gamma_1}$ est l'homomorphisme $F(\gamma_0 < \gamma_1)$.

Ce complexe sera noté $\Pi_+^* F$. Nous trouvons :

PROPOSITION 4. 2. *Le n -ième groupe de cohomologie de $\Pi_+^* F$ est isomorphe à $\varprojlim_{\Gamma}^{(n)} F$. L'isomorphisme étant fonctoriel.*

REMARQUE : On devrait noter les deux complexes $\Pi_+^* F$ resp. $\Pi_+^* F$ puisque par construction ils dépendent du couple $(\underline{C}_o, \underline{C})$ resp. (Γ_o, Γ) . En effet c'est le complexe $\Pi_+^* F$ qu'a étudié Roos dans [1].

Soit maintenant $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$. L'injection canonique $i: \underline{C}_o \rightarrow \underline{C}$ induit un foncteur $i^*: \text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L) \rightarrow \text{Hom}(\underline{C}_o, \text{Mod}_L)$. Supposons que $\underline{C}_o$ satisfait aux conditions de la Proposition 3. 1., alors C_o^* est une résolution projective de L dans $\text{Hom}(\underline{C}, \text{Mod}_L)$. Soit C_o^{∞} la résolution Π -projective de L dans $\text{Hom}(\underline{C}_o, \text{Mod}_L)$ définie par le couple $(\underline{C}_o, \underline{C}_o)$, alors on voit facilement qu'il existe une injection canonique : $C_o^{\infty} \rightarrow i^*(C_o^*)$ qui induit un isomorphisme $\Pi_+^* F \rightarrow \Pi_+^* i^*(F)$.

Soit $i^n: \varprojlim_{\underline{C}}^{(n)} (F) \rightarrow \varprojlim_{\underline{C}_o}^{(n)} i^*(F)$ l'application canonique définie par i , alors nous trouvons :

PROPOSITION 4. 3. *Supposons que $\underline{C}_o$ satisfait aux conditions de la Proposition 3. 1., alors i^n est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.*

COROLLAIRE : Soit Γ ordonné filtrant et soit Γ_o un sous-ensemble cofinal de Γ , alors pour tout objet F dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{Mod}_L)$ et pour tout $n \geq 0$ l'application canonique $\varprojlim_{\Gamma}^{(n)} F \rightarrow \varprojlim_{\Gamma_o}^{(n)} F$ est un isomorphisme.

5. Suite spectrale attachée à une fonction $\theta: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$:

Soient Γ_1 et Γ_2 deux ensembles ordonnés et soit θ une fonction $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ dans le sens suivant : Pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$ $\theta(\gamma_1)$ est un sous-ensemble de Γ_2 , tel que si $\gamma'_1 < \gamma_1$ alors $\theta(\gamma'_1) \subset \theta(\gamma_1)$.

Supposons que :

- 1) $\theta(\gamma_1) = \theta(\gamma'_1)$ seulement si $\gamma_1 = \gamma'_1$.
- 2) si $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1)$ et si $\gamma'_2 < \gamma_2$ alors $\gamma'_2 \in \theta(\gamma_1)$.
- 3) pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$ il existe un γ_1 tel que $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1)$.

A tout objet F de $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$ nous pouvons associer un objet $\varprojlim_{\theta} F$ de $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$ défini par : $(\varprojlim_{\theta} F)_{\gamma_1} = \varprojlim_{\theta(\gamma_1)} F$.

Ceci donne un foncteur $\varprojlim_{\theta}$ sur $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$ à valeurs dans $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$. Inversement, à tout objet F de $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$ nous pouvons associer un objet $\varinjlim_{\theta} F$ de $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$ défini par :

$$(\varinjlim_{\theta} F)(\gamma_2) = \varinjlim_{\{\gamma_1 \mid \gamma_2 \in \theta(\gamma_1)\}} F$$

Ceci donne un foncteur $\varinjlim_{\theta}$ sur $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$ à valeurs dans $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$. Il existe une transformation naturelle :

$$I_{\Gamma_1} \rightarrow \varprojlim_{\theta} \circ \varinjlim_{\theta}$$

où I_{Γ_1} est le foncteur identité sur $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$. De même il existe une transformation naturelle :

$$\varinjlim_{\theta} \circ \varprojlim_{\theta} \rightarrow I_{\Gamma_2}$$

On vérifie que si F est un objet de $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$ et G un objet de $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$ alors nous avons un isomorphisme :

$$\text{Hom}(\varinjlim_{\theta} F, G) \simeq \text{Hom}(F, \varprojlim_{\theta} G)$$

ce qui s'exprime en disant que $\varinjlim_{\theta}$ est adjoint au foncteur $\varprojlim_{\theta}$.

Soit maintenant L l'objet constant dans $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$; il est facile de voir que $\varinjlim_{\theta} L$ est l'objet constant L dans $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$.

Prenons une résolution projective L^* de L dans $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$ et une résolution Π -injective F^* de F dans $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$. Nous avons un isomorphisme de double complexe :

$$(i) \quad \text{Hom}(L^*, \varprojlim_{\theta} F^*) \simeq \text{Hom}(\varinjlim_{\theta} L^*, F^*)$$

Comme on l'a vu, Proposition 1.4. b., F^* est une résolution Π -injective de F dans $\text{Hom}(\theta(\gamma_1), \text{Mod}_L)$ pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$, donc $H^n(\varprojlim_{\theta} F^*)$ est le foncteur $\varinjlim_{\theta}^{(n)} F$ donné par :

$$(\varinjlim_{\theta}^{(n)} F)(\gamma_1) = \varinjlim_{\theta(\gamma_1)}^{(n)} F$$

Supposons maintenant que θ satisfait à la condition supplémentaire

- 4) Pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1) \cap \theta(\gamma'_1)$ il existe un $\gamma''_1 \in \Gamma_1$ tel que $\gamma_2 \in \theta(\gamma''_1) \subset \theta(\gamma_1) \cap \theta(\gamma'_1)$.

Dans ce cas $\varinjlim_{\theta}$ est exact, donc $\varinjlim_{\theta} L^*$ est une résolution de L dans $\text{Hom}(\Gamma_2, \text{Mod}_L)$.

La deuxième suite spectrale du double-complexe (i) dégénère et l'on a :

$${}''E_2^{n,0} \simeq \varinjlim_{\Gamma_2}^{(n)} F$$

La première est donnée par :

$$E_2^{p,q} \simeq \varprojlim_{\Gamma_2}^{(p)} \varprojlim_{\theta}^{(q)} F$$

donc, en résumant

THEOREME 2 : Il existe une suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma_1}^{(p)} \varprojlim_{\theta}^{(q)} F$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une fibration convenable de $\sum_{n \geq 0} \varprojlim_{\Gamma_2}^{(n)}$.

Soit maintenant $t : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ une application croissante surjective. On en déduit une fonction

$$\theta : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$$

définie par :

$$\theta(\gamma_1) = \{ \gamma_2 \mid \gamma_2 \in \Gamma_2, \exists \gamma_2' \in \Gamma_2, \gamma_2' > \gamma_2 \text{ \& } t(\gamma_2') = \gamma_1 \}.$$

On vérifie trivialement que θ satisfait aux conditions 1), 2) et 3). Pour que θ satisfasse à la condition 4) il faut et il suffit que :

4') pour tout γ_2 tel que $t(\gamma_2) < \gamma_1$ il existe un $\gamma_2' > \gamma_2$ tel que $t(\gamma_2') = \gamma_1$.

COROLLAIRE 1: Soit $t : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ une application croissante surjective, et soit F un objet de $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$. Supposons que t satisfait à la condition 4'). Dans ce cas il existe une suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma_1}^{(p)} \varprojlim_{\theta}^{(q)} F \circ t$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de $\sum_{n \geq 0} \varprojlim_{\Gamma_2}^{(n)} F \circ t$.

COROLLAIRE 2: Supposons que t satisfait à la condition 4') et que l'ensemble $\{ \gamma_2 \mid t(\gamma_2) = \gamma_1 \}$ contient un élément minimal. Dans ce cas nous avons :

$$\varprojlim_{\Gamma_1}^{(n)} F \simeq \varprojlim_{\Gamma_2}^{(n)} F \circ t$$

pour tout objet F de $\text{Hom}(\Gamma_1, \text{Mod}_L)$.

DEMONSTRATION: $F \circ t$ est constant sur l'ensemble $t^{-1}(\gamma_1) = \{ \gamma_2 \mid t(\gamma_2) = \gamma_1 \}$. Or $t^{-1}(\gamma_1)$ vérifie la condition du Corollaire 1 de la Proposition 4.3.p.r. à $\theta(\gamma_1)$, donc :

$\varprojlim_{\theta(\gamma_1)}^{(n)} F \circ t \simeq \varprojlim_{t^{-1}(\gamma_1)}^{(n)} F \circ t$. De plus $\varprojlim_{t^{-1}(\gamma_1)}^{(n)} F \circ t = 0$ pour tout $n > 0$ puisque l'objet

constant $F \circ t$ dans $\text{Hom}(t^{-1}(\gamma_1), \text{Mod}_L)$ y admet une résolution Π -injective constante, comme l'on voit aussitôt en utilisant l'existence d'un élément minimal dans $t^{-1}(\gamma_1)$.

Aussi nous avons :

$$\varprojlim_{t^{-1}(\gamma_1)} F \circ t \simeq F(\gamma_1) \text{ pour tout } \gamma_1 \in \Gamma_1.$$

La suite spectrale du Corollaire 1. dégénère et nous trouvons :

$$E_2^p \cdot o = \lim_{\Gamma_1}^{(p)} F$$

d'où la conclusion .

Q. E. D.

COROLLAIRE 3 : Il existe une suite spectrale donnée par

$$E_2^p \cdot q = \lim_{\Gamma_1}^{(p)} \lim_{\Gamma_2}^{(q)} F$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de $\Sigma \lim_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}^{(n)} F$.

DEMONSTRATION : Soit $\Gamma_1 \xrightarrow{\theta} \Gamma_1 \times \Gamma_2$ la fonction définie par : $\theta(\gamma'_1) = \{(\gamma'_1, \gamma'_2) \mid \gamma'_1 < \gamma_1\}$. Elle satisfait évidemment aux conditions 1.2.3 et 4. De plus, le sous-ensemble $\theta_o(\gamma_1) = \{(\gamma_1, \gamma_2) \mid \gamma_2 \in \Gamma_2\}$ de $\theta(\gamma_1)$ satisfait aux conditions de la Proposition 4.3 donc :

$$\lim_{\theta(\gamma_1)}^{(q)} F \simeq \lim_{\theta_o(\gamma_1)}^{(q)} F \simeq \lim_{\Gamma_2}^{(q)} F$$

et la conclusion découle du Théorème 2.

Q. E. D.

REMARQUE : Le Corollaire 3 a été démontré par Roos dans [1] . Il est pourtant valable pour des catégories quelconques $\underline{C}_1$ et $\underline{C}_2$.

On peut voir que le Théorème 5 est un cas particulier du résultat suivant : Il existe deux suites spectrales données par :

$$E_2^p \cdot q = \text{Ext}^p(\lim_{\theta}^{(q)} F, G), \quad E_2^p \cdot q = \text{Ext}^p(F, \lim_{\theta}^{(q)} G)$$

aboutissant à la même chose.

APPENDICE : Soit G un groupe et soit $\underline{G}$ la catégorie ayant un seul objet c et telle que l'ensemble des flèches est G , composition étant celle du groupe. Soit $\underline{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens. Un objet F dans $\text{Hom}(\underline{G}, \underline{Ab})$ n'est autre chose qu'un groupe abélien $F(c)$ sur lequel opère G . On a :

$$\lim_{\leftarrow} F = \{f \mid f \in F(c) \ni g \cdot f = f, \forall g \in G\}$$

donc :

$$\lim_{\leftarrow}^{(n)} F \simeq H^n(G, F(c))$$

Soit G_o un sous-semigroupe de G contenant l'unité, alors $\underline{G}_o$ peut être considéré comme une sous-catégorie de $\underline{G}$. Les conditions de la Proposition 3.2 sont satisfaites si, et seulement si, tout $g \in G$ s'écrit $g = g_1 \cdot g_2^{-1}$ avec $g_1, g_2 \in G_o$. Par la Proposition 4.1 nous trouvons ceci :

$$H^n(G, F(c))$$

est le n -ième groupe de cohomologie du complexe $\prod_{(G_o, G)}^* F$ donné par:

$$\prod^0 F = F(c)$$

$$\prod^n F = \prod_{g_i \in G_o, i=0, \dots, n-1} F(g_o, g_o g_1, \dots, g_o \dots g_{n-1}) \text{ pour } n \neq 0$$

où $F(g_o, \dots, g_o \dots g_{n-1}) = F(c)$.

$$\delta n(\xi)(g_o, g_o g_1, \dots, g_o \dots g_n) = g_o \cdot \xi(g_o g_1, \dots, g_o \dots g_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \xi(g_o, \dots, \widehat{g_o \dots g_k}, \dots, g_o \dots g_n)$$

Nous retrouvons ainsi le complexe $S(\prod)$ du chap. X § 4 de [2]. Aussi, la Proposition 4.3. entraîne la Proposition 4.1. du Chap. X de [2].

Si on se donne un anneau unitaire Λ et un idéal à gauche I dedans, on peut considérer la catégorie $\underline{\Lambda}$, ayant un seul objet c et telle que l'ensemble des flèches est Λ , composition étant multiplication. On démontre

$$\lim_{\leftarrow I}^{(n)} F = H^n(\Lambda, F(c))$$

pour tout objet F dans $Hom^{ad}(\underline{\Lambda}, \underline{Ab})^{(1)}$ - c'est-à-dire pour tout Λ -module - cohomologie au sens du chap. VIII de [2].

Soit Λ_o un sous-anneau de Λ contenant l'unité et tel que $I \subset \Lambda_o$. supposons que pour toute famille $\lambda_i \in \Lambda$ $i = 1, 2, \dots, n$ il existe des $\lambda_i^o \in \Lambda_o$ $i = 1, 2, \dots, n$ et un $\lambda \in \Lambda$ tels que, ou bien $\lambda_i \cdot \lambda_i^o = \lambda$ ou bien $\lambda_i = \lambda \cdot \lambda_i^o$. Dans ce cas nous pouvons démontrer que l'application canonique: $H_I^n(\Lambda, F(c)) \rightarrow H_I^n(\Lambda_o, F(c))$ est un isomorphisme.

Jusqu'ici nous avons étudié uniquement le foncteur $\lim_{\leftarrow \Phi}$. Il est pourtant évident qu'en dualisant on trouve à tout résultat sur $\lim_{\leftarrow \Phi}$, un résultat concernant la limite inductive $\lim_{\rightarrow \Phi}$, au moins quand ces résultats ne dépendent pas de la catégorie $\underline{D}$ en question, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions 1, 2, 3 de l'Introduction, ce qui est le cas pour la plupart des résultats obtenus ci-dessus.

Pour terminer, soit F un objet de $Hom(\underline{G}, \underline{Top})$ où $\underline{Top}$ est la catégorie des espaces topologiques. On se donne un tel objet en se donnant un espace topologique $F(c)$ sur lequel opère le groupe G . On voit facilement que:

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow} F &= \text{sous-espaces des points fixes} \\ \lim_{\rightarrow} F &= X/G \end{aligned}$$

Soit $C*: \underline{Top} \rightarrow \underline{Mod}_L$ le foncteur gradué des chaînes singulières, et soit M^* une résolution injective d'un objet constant $M^{(2)}$ dans $Hom(\underline{G}, \underline{Mod}_L)$.

Considérons le double-complexe:

$$Hom(C* \circ F, M^*)$$

Calculons les deux suites spectrales de ce complexe. Elles sont données par:

$$\begin{aligned} {}^{\vee}E_2^{p,q} &= Hom(\lim_{\rightarrow (p)} H_q(C* \circ F), M) \\ {}^{\vee\vee}E_2^{p,q} &= Hom(H_p(\lim_{\rightarrow (q)} C* \circ F), M) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ La catégorie des foncteurs additifs sur $\underline{\Lambda}$ à valeurs dans $\underline{Ab}$.

⁽²⁾ M injectif dans $\underline{Mod}_L$.

Si G opère sur $F(c)$ sans points fixes nous trouvons que :

$$\begin{aligned} \lim_{\rightarrow} C * \circ F &= C * (F(c) / G) \\ \lim_{\rightarrow} ({}_q) C * \circ F &= 0 \quad \text{pour } q \neq 0 \end{aligned}$$

Donc, nous avons une suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p \cdot q} = H_p(G, H_q(F(c)))$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de $\Sigma H_n(F(c)/G, L)$ c'est-à-dire le Théorème bien connu dit de : Hurewicz - Hopf - MacLane - Eilenberg - Eckmann.

ADDENDUM : Il est, après que cet exposé a été rédigé, paru au Séminaire Dubreil - Pisot 1960-1961, un exposé de Monsieur René Deheuvels tenu le 29 mai 1961. Il nous paraît que les résultats des § 4. et § 5 ci-dessus généralisent certains de ces résultats. (voir n° 6.2 et n° 6.3 de l'exposé cité).

Bibliographie.

- [1] JAN ERIK ROOS. Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Appli. Comptes Rendus Paris n° 26, 1961, p. 1702.
- [2] H. CARTAN et S. EILENBERG. Homological Algebra. Princeton, 1956.
- [3] R. GODEMENT. Théorie des faisceaux. Hermann, Paris, 1958.