

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

N. H. KUIPER

La courbure d'indice K et les applications convexes

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 14, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A14_0

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Avril 1960

LA COURBURE D'INDICE K ET LES APPLICATIONS CONVEXES

par N. H. KUIPER *

1. Introduction. La géométrie différentielle globale s'occupe, entre autres choses, des relations entre les propriétés locales d'une variété différentiable X munie d'une structure supplémentaire, par exemple d'une métrique Riemannienne, et les propriétés topologiques de X .

Le théorème le plus connu dans cette direction est le théorème de Gauss-Bonnet qui affirme, entre autres choses, que l'intégrale de la forme de courbure de Lipschitz-Killing (pour la dimension 2 est la courbure de Gauss divisée par 2π) sur une variété compacte orientée, munie d'une métrique Riemannienne multipliée par une constante connue, est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré.

$$(1.1) \quad \int \frac{K \delta \mu}{2\pi} = \chi \quad (\text{Gauss-Bonnet})$$

Ce théorème, connu depuis longtemps pour les surfaces, est généralisé par MM. Allendoerffer, Fenchel, Weil pour les variétés X dans un espace euclidien, et finalement pour X intrinsèque par Chern, qui a donné sa fameuse démonstration en utilisant les formes différentielles extérieures.

Un autre théorème de la géométrie différentielle globale qui est bien connu est le théorème de Fenchel. Soit X une C^∞ -variété compacte connexe de dimension 1, c'est-à-dire un cercle. Une application différentiable $f: X \rightarrow E^N$ s'appelle une immersion si elle est de rang maximum en chaque point de X . L'image $f(X)$ est alors une C^∞ -courbe fermée. Si $2\pi\tau_0(x, f)$ est la valeur absolue de la (densité de la) courbure de $f(X)$ au point x et ds la différentielle de la longueur, alors :

$$\tau_0(X, f) = \int \tau_0(x, f) ds \geq 1 \quad (\text{Fenchel})$$

* Landbouwhogeschool, Wageningen, Pays-Bas.

De plus, si $\tau_0(X, f) = 1$, $f(X)$ est une courbe plane et convexe, Milnor et Fary ont démontré que, pour un noeud dans E^3 , $\tau_0(X, f) > 2$. Le théorème de Fenchel est généralisé pour X de dimension arbitraire par Chern, Lashof et Kuiper.

Dans les paragraphes qui suivent, nous introduisons une nouvelle notion, la courbure d'indice k d'une application de X dans E^N . Cette notion nous permet de présenter une théorie dans laquelle figurent des analogues assez généraux des théorèmes de Gauss-Bonnet et Fenchel. Nous allons exposer assez brièvement cette théorie sans insister sur les détails et les démonstrations; nous espérons donner plus tard des résultats plus complets.

2. Points critiques d'une fonction. Inégalités de Morse. Soit $X = X^n$ une C^∞ -variété de dimension n , et φ une C^r -fonction $\varphi: X \rightarrow R$, $r \geq P$.

Un point $x_0 \in X$ est dit C^r -Critique (non dégénéré) d'indice p de φ si des C^r -coordonnées locales $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ existent, $\varphi_i(x_0) = c$ et si on a dans un ouvert U de x_0 :

$$(2.1) \quad \varphi = c - \varphi_1^2 - \dots - \varphi_p^2 + \varphi_{p+1}^2 + \dots + \varphi_n^2 \quad c = \varphi(x_0)$$

Au lieu de C^0 -critique, nous dirons "critique" tout court.

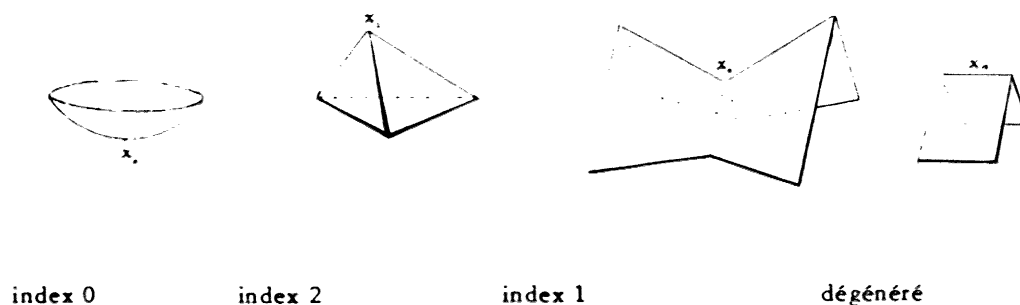
x_0 s'appelle C^r -ordinaire (non dégénéré) si, de façon analogue, on a :

$$(2.2) \quad \varphi = \varphi_1$$

Autrement, x_0 est dit C^r -dégénéré. Une fonction φ est dite non-dégénérée si chaque point x est non-dégénéré pour φ .

Dans la fig. 1, nous donnons quelques exemples de points critiques, de la fonction hauteur $= \varphi$, sur des surfaces dans l'espace euclidien E^3 .

fig. 1



Dans les conditions citées plus haut, soit un point critique d'indice p ,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U_1 &= \{x \mid \varphi(x) < c\} \\ U_2 &= \{x \mid \varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2 < \epsilon^2\} \end{aligned}$$

Alors on a les *polynômes de Poincaré*, $P(\dots) = \sum t^q H_q(\dots)$.

$$(2.4) \quad P(U_2) = 1, \quad P(U_1 \cap U_2) = P(S^{p-1}) = 1 + t^{p-1}$$

En général si $U_1 \cup U_2$, U_1 , U_2 est une triade propre suivant le sens donné dans le livre du "Eilenberg-Steenrod" et si on écrit :

$$N = \ker [i_1 : H_*(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_*(U_1)] \cap \ker [i_2 : H_*(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_*(U_2)]$$

on a la formule de Mayer-Victoris (Eilenberg-Steenrod p. 53 exercice 4):

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dim H_q(U_1 \cup U_2) + \dim H_q(U_1 \cap U_2) &= \dim H_q(U_1) + \dim H_q(U_2) \\ &+ \dim(N_q) + \dim(N_{q-1}) \end{aligned}$$

Dans notre cas $N = \ker i_1$ et

$$\dim N_q = \begin{cases} 0 & \text{pour } q \neq p-1 \\ e & \text{pour } q = p-1 \end{cases}$$

$$e = 0 \text{ ou } 1$$

Alors on déduit de (2.4) et (2.5)

$$(2.6) \quad P(U_1 \cup U_2) - P(U_1) = (e-1)t^{p-1} + et^p$$

Remarquons que $e \geq 0$, $e-1 \leq 0$

(On peut aussi donner une autre définition de point critique d'indice p par l'équation (2.6).

Pour un point ordinaire on a

$$(2.7) \quad P(U_1 \cup U_2) - P(U_1) = 0$$

Si x est une variété compacte et φ une fonction non-dégénérée et qui par conséquent n'a qu'un nombre fini de points critiques non-dégénérés, alors on peut recouvrir x par un nombre fini d'ouverts U_i , $i = 1, \dots, L$, tel que dans chaque ouvert il n'existe au plus qu'un seul point critique de φ ;

$$x_m = \bigcup_{i=1}^m U_i$$

est connexe pour $m = 1, \dots, L$, et

$$(2.8) \quad P(x_{m+1}) - P(x_m) = \begin{cases} (e-1)t^{p-1} + et^p \\ \text{ou} \\ 0 \end{cases}$$

e et p dépendant de m .

Pour chaque ouvert $Z \subset x$ définissons $\beta_k(Z, \varphi)$ comme le nombre des points critique d'indice k de φ dans Z , et

$$(2.9) \quad M(Z, \varphi) = \sum_k \beta_k(Z, \varphi) t^k$$

le polynôme de Morse de φ sur Z .

En vue de (2.8) et les conditions sur les ouverts U_i , on a

$$(2.10) \quad M(x_{m+1}, \varphi) - M(x_m, \varphi) = \begin{cases} (1-e)t^{p-1} + et^p \\ \text{ou} \\ 0 \end{cases}$$

où e et p ont la même signification que dans (2.8).

On verra que

$$\beta_k(x_m, \varphi) = \dim H_k(x_m)$$

et

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} [\beta_j(x_m, \varphi) - \dim H_j(x_m)]$$

sont des fonctions non décroissantes de m , et

$$\sum_j (-1)^j [\beta_j(x_m, \varphi) - \dim H_j(x_m)]$$

est la fonction zéro. Alors pour $m = L$ on obtient les *inégalités de Morse* :

$$(2.11) \quad \beta_k(x, \varphi) - \dim H_k(x) \geq 0$$

$$(2.12) \quad \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} [\beta_j(x, \varphi) - \dim H_j(x)] \geq 0$$

$$(2.13) \quad \sum_j (-1)^j \beta_j(x, \varphi) = \sum_j (-1)^j \dim H_j(x) = \chi(x)$$

$\chi(x)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de x .

Puisque le polynôme $\beta(X, \varphi) - P(X)$ est zéro pour $t = -1$, on peut diviser par $1 + t$, et on peut résumer les inégalités de Morse (2.11) (2.12) et (2.13) dans la Proposition suivante :

PROPOSITION :

$$(2.14) \quad \frac{M(X, \varphi) - P(X)}{1 + t}$$

est un polynôme en t avec des coefficients non-négatifs.

NOTATION :

$$(2.15) \quad \frac{M(X, \varphi) - P(X)}{1 + t} \geq 0$$

3. La courbure d'indice k et le polynôme des courbures. Soit X^n une C^∞ -variété, f une C^∞ -immersion $f : X \rightarrow E^N$ de X dans un espace vectoriel euclidien de dimension N . Soit S^{N-1} la $(N-1)$ -sphère des vecteurs unitaires dans E^N . On considère le fibré M^{N-1} de base X des vecteurs normaux de $f(X^n)$ dans E^N . L'application canonique de M^{N-1} dans S^{N-1} est nommée ν . Sa duale ν^+ applique l'élément de volume $d\sigma$ de S^{N-1} sur une $(N-1)$ -forme $\nu^+ d\sigma$ de M^{N-1} . Alors suivant Chern on peut définir la courbure totale absolue de (X, f) :

$$(3.1) \quad \tau(X, f) = \int_{M^{N-1}} \frac{|\nu + d\sigma|}{c_{N-1}}$$

Si : $\beta(X, \sigma) = \sum_k \beta_k(X, \varphi)$ est le nombre des points critiques de φ ;

$c_{N-1} = \int_S |d\sigma|$, $z \in S^{N-1}$; $z f(x)$; est le produit scalaire des vecteurs z et $f(x)$,

alors on trouve que :

$$\tau(X, f) \text{ est égal à } \int_{\nu(M)} \frac{|d\sigma|}{c_{N-1}} = \int_{z \in S} \beta(X, z f) \frac{|d\sigma|}{c_{N-1}}$$

avec multiplicités

on sait que les $z \in S^{N-1}$ pour lesquels la fonction $z f$ a des points dégénérés forment un ensemble de mesure nulle. L'intégrale (3.1) est bien définie

Dans le même ordre d'idées, nous disons qu'une application continue $f : X^n \rightarrow E^N$ d'une variété X^n de dimension n dans l'espace euclidien E^N est non-dégénérée si :

$$(3.2) \quad \tau_k(U, f) = \int_{z \in S^{N-1}} \beta_k(U, z f_U) \frac{|d\sigma_{N-1}|}{c_{N-1}}$$

existe pour chaque ouvert $U \subset X^n$ et si elle définit une mesure non-négative sur X^n pour $k = 0, 1, \dots, n$,

Si nous écrivons $\tilde{\mathcal{C}}_z$ à la place de l'opérateur

$$\frac{1}{c_{N-1}} \int_{z \in S^{N-1}} \dots |d\sigma_{N-1}|$$

(L'espérance par rapport à un vecteur aléatoire avec distribution de probabilités homogène sur S_{N-1}), on peut résumer (3.2) dans la formule:

$$(3.3) \quad \tau_k(U, f) = \tilde{\mathcal{C}}_z \beta_k(U, z f_U)$$

DEFINITION: La mesure τ_k définie par (3.3) pour une application non-dégénérée f d'une variété X^n dans E^N , est la courbure d'indice k de f dans X . La mesure $T = \sum_k t^k \tau_k$ avec valeurs dans l'espace vectoriel des polynômes en t , est le polynôme des courbures dans X . Pour $t=1$ on obtient la courbure totale dans X . Pour $t=-1$ on obtient la courbure alternée dans X . Les valeurs de cette mesure sur X sont respectivement: $\tau_k(X, f)$, la courbure d'indice k de f sur X ; $T(X, f)$, le polynôme des courbures sur X ; $\sum_k \tau_k(X, f)$, la courbure totale sur X ; $\sum_k (-1)^k \tau_k(X, f)$, la courbure alternée sur X .

Si l'on peut obtenir la mesure τ_k en intégrant une forme différentielle, cette forme est aussi appelée courbure d'indice k etc.

LEMME. Si f est une C^∞ -immersion, alors f est non-dégénérée, et si $d\mu$ est l'élément de volume dans $f(X)$, on peut écrire $\tau_k(U, f) = \int_U \tau_k(x, f) |d\mu|$.

La fonction $\tau_k(x, f)$ est la densité de courbure d'indice k . C'est un invariant local intéressant qui n'est pas étudié jusqu'à maintenant.

THEOREME: Si $f: X^n \rightarrow E^{n+1}$ (hypersurface est une: C^∞ -immersion, alors $\tau_k(x, f)$ est un invariant intrinsèque.

Si $f: X^n \rightarrow E^n$ est une C^2 -immersion alors $\sum (-1)^k \tau_k(x, f)$ est un invariant intrinsèque, la (densité de la) courbure de Lipschitz-Killing.

EXEMPLES:

$n = 0$. Si X est un point on définit $T(X, f, t) = 1$.

$n = 1$. a) Si $f(X)$ est une C^∞ -courbe, alors

$$\tau_0 = \tau_1 = \frac{1}{2\pi} \int | \text{courbure} | ds$$

b) Si $f(X)$ est l'union de deux demi-droites qui se rencontrent en un point B d'un angle φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$, alors la mesure $\tau_0 = \tau_1 = \frac{\pi - \varphi}{2\pi}$ est concentrée au

point B . fig. 2.

c) voir fig. 3 $\tau_0(X) = 1$; voir fig. 4 $\tau_0(X) = 2$

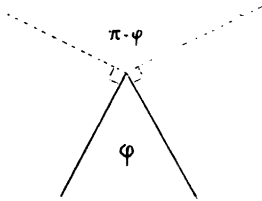


fig. 2



fig. 3

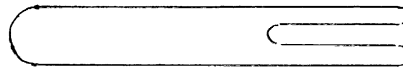


fig. 4

$n = 2$. a) Si f est une immersion dans E^3 , K la courbure de Gauss, alors

$$\tau_0 = \tau_2 = \int \max(K, 0) \frac{|d\mu|}{4\pi}$$

$$\tau_1 = \int 2 \max(-K, 0) \frac{|d\mu|}{4\pi}$$

par conséquent: $\tau_0 - \tau_1 + \tau_2 = \int K \frac{|d\mu|}{2\pi}$

b) fig. 5 $T = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} t^2$. La mesure est concentrée en un point.

$n = 2$. c) fig. 6 $T = \frac{1}{4} t$

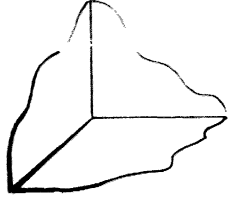


fig. 5

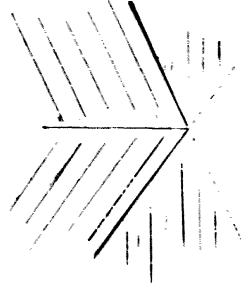


fig. 6

d) *Double pli*: L'application f du plan euclidien à coordonnées x, y dans ce plan est donnée par $f: (x, y) \rightarrow (|x|, |y|)$. La mesure est concentrée au point $(0, 0)$:

$$T = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} t^2$$

Pour $t = -1$ on obtient la valeur zéro, comme il le fallait.

4. Le théorème de Gauss - Bonnet.

THEOREME: Si X^n est compact et l'application $f: X^n \rightarrow E^N$ est non-dégénérée, alors

$$\sum_k (-1)^k \tau_k(X, f) = \chi(X)$$

REMARQUE: on n'a pas besoin de supposer X^n orienté

DEMONSTRATION:

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k \tau_k(X, f) &= \sum_k (-1)^k \mathcal{E}_z \beta_k(X, z/f) \\ &= \mathcal{E}_z \sum_k (-1)^k \beta_k(X, z/f) = \mathcal{E}_z \chi(X) = \chi(X) \end{aligned}$$

EXEMPLES:

a). Soit X le plan projectif réel, C^∞ -immergé dans E^3 . Alors:

$$\int_X \frac{K}{2\pi} |d\mu| = \chi(X) = 1$$

b). Soit X la 2-sphère usuelle dans E^3 . Soit f la composition de l'application orthogonale dans le plan équatorial de X et une C^∞ -immersion de ce plan dans E^3 . Soit U_1 et U_2 les deux hémisphères, S l'équateur. Alors on trouve que l'intégrale suivante

consiste en deux contributions :

$$2 = \chi(X) = \sum_k (-1)^k \tau_k(X, f) = 2 \int_{U_1} \frac{K}{2\pi} |d\mu| + \int_S \rho_g \left| \frac{ds}{\pi} \right|$$

ρ_g est la courbure géodésique de $f(S)$ par rapport à $f(U_1)$. On obtient la formule de Gauss-Bonnet pour un disque :

$$\int K |d\mu| + \int \rho_g |ds| = 2\pi$$

Plus généralement on obtient le théorème d'Allendoerfer-Weil pour une variété à bord dans E^N .

c). On peut aussi trouver comme une application du théorème de Gauss-Bonnet la formule de Hurwitz sur l'application conforme p avec des points de ramification d'une surface de Riemann X sur une autre Y :

$$\chi(X) = K \chi(Y) + \sum (m_i - 1)$$

qui vaut aussi pour des surfaces non-orientées.

5. Le polynôme des courbures du produit de deux C^∞ -immersions.

THEOREME. Si X et Y sont compacts, $f: X \rightarrow E^M$ et $g: Y \rightarrow E^N$ sont des C^∞ -immersions, alors $h = f \times g: X \times Y \rightarrow E^M \times E^N$ est une immersion, et les polynômes des courbures satisfont à la relation suivante :

$$(5.1) \quad T(h) = T(f \times g) = T(f) \cdot T(g)$$

DEMONSTRATION. Supposons que $a \in S^{M-1}$ et $b \in S^{N-1}$ sont des vecteurs unitaires. Alors $\cos \varphi \cdot a + \sin \varphi \cdot b$ est un vecteur unitaire de $E^M \times E^N$. Soit $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Alors on a au point (x, y) : $d(\cos \varphi \cdot af(x) + \sin \varphi \cdot bg(y)) = 0$ (le covecteur 0) si et seulement si

$$da f(x) = 0 \quad \text{et} \quad db g(y) = 0$$

En négligeant des vecteurs a et b un ensemble de mesure 0, on peut exprimer localement en un point où $da f(x) = db g(y) = 0$:

$$\begin{aligned} af &= af(x) \cdot \varphi_1^2 \dots \cdot \varphi_p^2 + \varphi_{p+1}^2 + \dots + \varphi_m^2 \\ bg &= bg(y) \cdot \psi_1^2 \dots + \psi_q^2 + \psi_{q+1}^2 + \dots + \psi_n^2 \end{aligned}$$

et alors la fonction

$$\cos \varphi \cdot af + \sin \varphi \cdot bg \quad \text{au point } (x, y) \text{ a l'indice:}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p + q & \text{pour } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ m - p + q & \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \\ m - p + n - q & \pi < \varphi < 3\frac{\pi}{2} \\ p + n - q & 3\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi \end{array} \right.$$

l'intégration sur φ et la sommation sur (a, b) , $(-a, b)$, $(a, -b)$, et $(-a, -b)$, nous apportent la même contribution des points (x, y) dans les deux membres de (5.1) et le théorème en découle.

APPLICATIONS: Y un point $\Rightarrow T(b) = T(f)$

$$t = 1 \Rightarrow \tau(f \times g) = \tau(f) \cdot \tau(g) \quad \tau(g) \text{ courbure totale absolue (locale et globale)}$$

$$t = -1 \Rightarrow \chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$$

Nous énonçons aussi un théorème sur les "applications de révolution". Voir Chern-Lashof II cor. 1, p. 12. Si $f(x) = [2f_1(x), \varphi(x)]$, $\varphi(x) > 0$, X compact, $\beta_k(X, z, f)$ fonction constante de $z \in S^{M-1}(!)$; g : l'injection de S^{N-1} dans E^N .

$$S^{N-1} = \{z \mid z^2 = 1\}; \quad \gamma(x, y) = \{f_1(x), \varphi(x)g(y)\}$$

Alors

$$T(b) = T(f) \cdot T(S^{N-1}) = T(f) \cdot (1 + t^{N-1}).$$

6. Les inégalités sur les courbures d'une application $f: X^n \rightarrow E^N$, X^n compact.

Applications convexes.

En tenant compte de (3.3) et des définitions dans § 3, nous avons, si $f: X \rightarrow E^N$ est une application non-dégénérée:

$$T(X, f) = \mathcal{E}_z M(X, z, f)$$

Pour X compact on a de plus, si $\varphi = z \cdot f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est non-dégénérée:

$$(2.14) \quad \frac{M(X, \varphi) - P(X)}{1+t} \geq 0$$

Par conséquent en appliquant l'opérateur $\mathcal{E}_z$:

$$(6.1) \quad \frac{T(X, f) - P(X)}{1+t} \geq 0$$

c'est-à-dire l'expression à gauche est un polynôme en t avec des coefficients non-négatifs. (6.1) exprime les inégalités sur les courbures. En détail :

$$(6.2) \quad \tau_k(X, f) - \dim H_k(X) \geq 0$$

$$(6.3) \quad \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} [\tau_j(X, \varphi) - \dim H_j(X)] \geq 0$$

$$(6.4) \quad \sum_j (-1)^j \tau_j(X, \varphi) = \sum_j (-1)^j \dim H_j(X) = \chi(X)$$

(6.4) est de nouveau le théorème de Gauss-Bonnet.

On peut obtenir d'autres inégalités qui peuvent être plus fortes, comme suit :

Soit Φ la classe de toutes les fonctions réelles non-dégénérées sur X

Soit $\beta_k(X^n) = \inf_{\varphi} \beta_k(X^n, \varphi) \dots \varphi \in \Phi$

$$\beta(X^n) = \inf_{\varphi} \sum \beta_k(X^n, \varphi)$$

alors $\beta(X^n) = \sum \beta_k(X^n)$

Pour X^n connexe compact $\beta_0(X) = \beta_n(X) = 1$ (M. Morse [3]).

THEOREME. Si f est une application non-dégénérée $f: X^n \rightarrow E^N$ d'une C^∞ -variété compacte X^n , alors

$$(6.5) \quad \tau_k(X, f) \geq \beta_k(X) \geq \dim H_k(X)$$

$$\text{et} \quad \tau(X, f) = \sum_k \tau_k(X, f) \geq \sum_k \beta_k(X) \geq \sum_k \dim H_k(X)$$

DEFINITION : Une application $f: X^n \rightarrow E^N$ d'une variété C^∞ , compacte est dite convexe d'indice k si f est non-dégénérée et

$$\tau_k(X, f) = \beta_k(X)$$

et convexe si elle est convexe pour $k = 0, 1, \dots, n$.

THEOREME. Si X est compact et n est pair et $f: X^n \rightarrow E^N$ est convexe d'indice k pour k pair (k impair) et si $\beta(X^n) = \sum_k \beta_k(X^n)$, alors f est convexe.

DEMONSTRATION : De $\sum (-1)^k [\tau_k(X, f) - \beta_k(X)] = 0$

on déduit dans les conditions du théorème :

$$0 = \sum [\tau_{2p+1}(X, f) - \beta_{2p+1}(X)] \quad \text{ou} \quad \sum [\tau_{2p}(X, f) - \beta_{2p}(X)] = 0$$

Alors, puisque la somme ne contient pas de termes non-négatifs,

$$\tau_k(X, f) - \beta_k(X) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, n$$

APPLICATION AUX HYPERSURFACES :

Soit $f : X^n \rightarrow E^{n+1}$ une C^∞ -immersion, $n = 2p$ et X compact. Soit de plus pour chaque $x \in X : K(x) = k_1 k_2 \dots k_n \geq 0$.

Cela implique que la mesure $\tau_{2k+1} = 0$ pour $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$. Alors $\tau_{2k+1}(X, f) = 0$, et f est convexe : $\tau_k(X, f) = \dim H_k(X)$.

Alors X n'a pas de torsion (Chern-Lashof) parce que les égalités restent valables pour l'homologie à coefficients dans un corps arbitraire.

7. Un théorème sur les C^∞ -applications convexes.

DEFINITION. On dira qu'une forme (réelle) quadratique ψ sur n variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ tolère un $n+1$ -tuple de nombres $\beta_* = (\beta_0, \dots, \beta_n)$ si $\beta_k \neq 0$ pour $k = \text{index } \psi$. On dira qu'un système linéaire de formes réelles quadratiques sur n variables $\xi_1, \dots, \xi_n$, tolère β_* , si : (a) au moins une forme est définie positive et (b) chaque forme tolère β_* . Soit $g(\beta_*)$ la dimension maximale des systèmes linéaires qui tolèrent β_* .

DEFINITION. L'application $f : X \rightarrow E^N$ est dit proprement dans E^N si $f(X)$ n'est pas contenu dans aucun hyperplan.

DEFINITION. $\beta_*(X) = \{ \beta_0(X), \dots, \beta_n(X) \}$

THEOREME. Soit $f : X^n \rightarrow E^N$ une C^∞ -application convexe d'une C^∞ -variété X^n compacte connexe, proprement dans E^N ;

$$(7.1) \quad \beta(X) = \sum_k \beta_k(X);$$

et soit $r_{\max} = \max_{x \in X} (\text{rang de } f \text{ à } x)$, alors

$$(7.2) \quad N \leq r_{\max} + g(\beta_*(X))$$

DEMONSTRATION: Soit $|f(x)|$ la longueur du vecteur $f(x)$ et soit $q = f(x_0)$, $x_0 \in X$, un vecteur pour lequel

$$|q| = |f(x_0)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

Soit $r \leq r_{\max}$ le rang de f à x_0 . V^{N-r} est l'espace vectoriel de toutes les fonctions linéaires, pas nécessairement homogènes, de E^N qui s'annulent sur q et sur l'espace tangent de q par rapport à $f(X)$.

Si $\varphi \in V^{N-r}$, la composition $\varphi \circ f$ est une fonction réelle sur X^n dont le 0-jet

(= valeur) et le 1-jet au point x_0 s'annulent. Soit W l'espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ des 2-jets au point x_0 , des applications différentiables de X^n dans $\mathbb{R}$, dont les 0-jet et 1-jets s'annulent. Si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les coordonnées locales de x^n et $x_0 = (0, \dots, 0)$, alors on peut identifier W avec le système des formes homogènes quadratiques dans $\xi_1, \dots, \xi_n$. Ce système est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$.

$\pi(\varphi) \in W$ le 2-jet obtenu de $\varphi \in V^{N-n}$. Il est évident que π est un homomorphisme, mais dans les conditions données sur f et X , on a même :

LEMME. $\pi: V^{N-r} \rightarrow W^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ est un monomorphisme.

D'un lemme que nous démontrerons plus tard on déduit que $\pi(V^{N-r})$ est un sous-espace de W de dimension $N-r$. Ce sous-espace contient un 2-jet défini positif, et il ne contient que des 2-jets ou des formes quadratiques qui tolèrent $\beta_*(X)$. Alors :

$$N-r \leq g(\beta_*(X))$$

$$\text{et} \quad N \leq r + g(\beta_*(X)) \leq r_{\max} + g(\beta_*(X))$$

Remarquons que pour une immersion convexe on a $r = r_{\max} = n$ et

$$N \leq n + g(\beta_*(X))$$

Pour tout X on a $\beta_*(X) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, alors

$$N \leq n + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+3)$$

Pour la n -sphère $X = S^n$ on a $g(\beta_*(X)) = 1$, alors

$$N \leq r_{\max} + 1 \leq n + 1$$

Si $\beta_1(X^n) = 0$, $n = 2m$ ou $n = 2m+1$, on peut démontrer que $g\beta_*(X^n) \leq m^2$, alors, dans ce cas :

$$N \leq r_{\max} + m^2$$

EXEMPLE : les espaces projectifs complexes.

$$\text{Si } X = S^k \times S^k \quad \text{alors } g = 3$$

$$\text{et } N \leq r_{\max} + 3$$

PREUVE DU LEMME. Si $\text{Ker } \pi \neq 0$, alors il existe un élément $\psi \in V^{N-n}$, $\psi \neq 0$ qui obéit à $\pi(\psi) = 0$. Soit $\varphi \in V^{N-n}$ une fonction linéaire avec un vecteur gradient proportionnel au vecteur q . Par exemple la fonction $q(q \cdot y)$ produit scalaire variable $y \in E^N$.

Il est évident que $\pi(\varphi)$ est défini positif. Si λ est un nombre réel, on a

$$\pi(\varphi + \lambda\psi) = \pi(\varphi) + \lambda\pi(\psi) = \pi(\varphi)$$

On sait que $f(X^n)$ n'est contenu dans aucun hyperplan. C'est pourquoi il existe une valeur λ telle que l'hyperplan $\varphi + \lambda\psi = 0$ divise $f(X)$ en trois parties non vides $\varphi + \lambda\psi = 0$, < 0 , et > 0 . La fonction $(\varphi + \lambda\psi) \circ f$ possède un point critique d'indice n au point $x_0 \in X$, mais la valeur en ce point n'est pas la valeur maximum sur X . Alors il existe une fonction linéaire $\chi \in \Phi$, suffisamment près de la fonction $\varphi + \lambda\psi$, dont la composition avec f possède au moins 2 points critiques non singuliers d'indice n : En vue de (7.1) et $\beta_0(X) = \beta_n(X) = 1$ cela contredit la minimalité de f .

Bibliographie.

- [1] CHERN, S.S. and LASHOF, R.K. On the total curvature of immersed manifolds
I. Am. J. Math. 79 (1957) 396-398;
II. Mich. Math. J. 5 (1958), 5-12.
- [2] KUIPER, NICOLAAS H.
 - a). Immersions with minimal total absolute curvature. Centre Belge R.M. (1958) 5-12.
 - b). Sur les immersions à courbure totale minimale. Séminaire Ehresmann, Paris, 1958-59, 5 pages.
 - c). On surfaces in euclidean three-space, Bulletin de la Société Math. de Belgique (à paraître).
 - d). Convex immersions of compact surfaces in E^3 . Commentarii Math. Helv. (à paraître).
- [3] MORSE, MARSTON. The existence of polar non degenerate functions on differentiable manifolds. Annals of Math 71 (1959), 352-383.