Walter Craig

Sur l'ensemble singulier et l'ensemble de concentration d'énergie de Navier – Stokes

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° VIII, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A8_0>

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n^o VIII, 1-11

SUR L'ENSEMBLE SINGULIER ET L'ENSEMBLE DE CONCENTRATION D'ÉNERGIE DE NAVIER – STOKES

Walter Craig

Department of Mathematics & Statistics
McMaster University
Hamilton Ontario L8S 4K1 Canada
craig@math.mcmaster.ca

Résumé : Les travaux bien connus de Caffarelli, Kohn & Nirenberg [6] (1982) sur la régularité partielle des solutions faibles "convenables" $u(x,t)$ des équations de Navier-Stokes en dimension 3 donnent une borne supérieure sur la mesure de l'ensemble singulier $S(u)$ de ces solutions. Nous présentons ici des estimations globales nouvelles pour les solutions faibles, donnant des informations sur la continuité dans L^2 de ces solutions. En particulier, un résultat microlocal de type géométrique donne une borne inférieure, complémentaire de celle de [6], sur l'ensemble de concentration d'énergie $S^{L^2}(u)$, ou plutôt sur son analogue microlocal $WF^{L^2}(u) \subseteq T^*(\mathbb{R}^3)$. Cette borne implique, dans le cas où l'ensemble $WF^{L^2}(u)$ n'est pas vide, qu'il ne peut pas être "trop petit".

1. Introduction

Dans cet article nous nous intéressons à la question de régularite des solutions faibles des équations de Navier – Stokes, où bien à la nature de leurs singularités éventuelles. Une solution faible $u(x,t)$ est au minimum une distribution, dont ni la régularité ni l'unicité sont connues de manière globale. Partant d'une solution faible globale des équations de Navier – Stokes, on déduit des contraintes *a priori* sur son ensemble singulier $S(u)$ et sur son front d'onde $WF(u)$. L'inégalité d'énergie implique que l'application $t \mapsto \frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2$ est bornée en fonction du temps t, quoique non nécessairement continue.

Cependant il est bien connu que l'application $t \mapsto u(\cdot,t)$ est toujours continue à valeurs dans L^2 muni de sa topologie faible. Notre travail peut être vu comme l'étude de la situation où la solution $t \mapsto u(\cdot,t)$ est discontinue dans L^2 muni de sa topologie forte. Des discontinuités éventuelles dans L^2 à un temps singulier particulier $t = T$ impliquent un saut d'énergie à $t = T$, notamment $\limsup_{t\to T^-} \frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 >$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 58F15, 58F17; Secondary: 53C35.
Key words and phrases. a priori regularity, fluid dynamics, Navier - Stokes equations.
La recherche de l'auteur a été partiellement soutenue par le CRSNG avec la bourse n^o 238452-06, le Programme de Chaires de Recherche du Canada, une Bourse de recherche Killam du Conseil des Arts du Canada, et la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

$\frac{1}{2}\|u(\cdot,T)\|_{L^2}^2$, ce qui implique l'existence au temps $t = T$ d'un sous-ensemble $S^{L^2}(u)$ de l'ensemble singulier $S(u)$ associé à la concentration d'énergie. Le théorème célèbre de Caffarelli, Kohn & Nirenberg [6] donne des bornes supérieures sur la mesure de Hausdorff parabolique de dimension 1 de $S(u)$, et donc sur la dimension de Hausdorff de $S(u) \cap \{t = T\}$. Le but de notre analyse est de donner une borne inférieure sur la taille de l'ensemble microlocal associé à $S^{L^2}(u)$, correspondant à la région de l'espace des phases $T^*(\mathbb{R}^3)$ dans laquelle une quantité de densité non nulle de masse L^2 est transportée à l'infini. Pour identifier cette région, l'ensemble $\tau(u)$ des temps singuliers se décompose en $\tau(u) = \tau_1 \cup \tau_2$, où τ_1 est formé des temps de discontinuité L^2, autrement dit des sauts d'énergie. Pour $T \in \tau_1$, temps de discontinuité L^2, on définit un ensemble géométrique S^{L^2} de concentration, qui est un sous-ensemble de l'ensemble singulier $S(u) \cap \{t = T\}$. Dans un voisinage $B_r(x_0)$ d'un point $x_0 \in S^{L^2}$, on examine le comportement local de l'énergie de la solution avec les opérateurs pseudo-différentiels du calcul de Weyl, de symboles $a(x,\xi) \in S^0_{10}$ homogènes. La propriété de convergence faible mais non forte d'une solution peut être quantifiée en termes de mesures de défaut microlocales, selon la théorie de L. Tartar [21] et de P. Gérard [11]. Le support d'une mesure de défaut microlocale est un sous-ensemble de $T^*(\mathbb{R}^3)$ homogène dans chaque fibre. L'ensemble de concentration microlocal $WF_T^{L^2}$ à $t = T$ est défini comme l'adhérence de l'union des supports de toutes les mesures de défaut associées à des suites faiblement convergentes $u(\cdot,t) \rightharpoonup u(\cdot,T)$ dans L^2 lorsque $t \to T$. Cet ensemble de concentration microlocal est un sous-ensemble du front d'onde $WF(u)$ classique.

Notre analyse de $WF_T^{L^2}$ est basée sur une nouvelle estimation des coefficients de Fourier des solutions faibles de Navier – Stokes, en fonction de la norme $\||\xi||\mathcal{F}u(\xi,t)\|_{L^\infty}$, où $\mathcal{F}u(\xi,t) = \hat{u}(\xi,t)$ est la transformée de Fourier de la solution en la variable d'espace. Cette estimation est démontrée dans la référence [3], où on l'utilise dans un commentaire sur la loi de Kolmogorov [13][16] pour la fonction spectrale d'énergie des solutions turbulentes. Quand cette estimation est appliquée à l'analyse de la concentration d'énergie, elle n'est pas assez forte pour contrôler la densité d'énergie dans des voisinages coniques de $WF_T^{L^2} \subseteq T^*(\mathbb{R}^3)$, et le résultat ne consiste pas en une borne inférieure sur la dimension de Hausdorff de $WF_T^{L^2} \subseteq S^*(\mathbb{R}^3)$. Au lieu d'une telle estimation, on élargit la classe de symboles à $a(x,\xi) \in \mathcal{A}_{x_0} \subseteq S^0_{\rho\delta}$ agissant sur $u(x,t)$, de façon à isoler microlocalement l'ensemble de concentration $WF_T^{L^2}$ dans des voisinages des points $x_0 \in S^{L^2}(u)$. Le taux de croissance optimal $\bar{\beta}_{x_0}$ du support de ces symboles dans la fibre $T^*_{x_0}(\mathbb{R}^3)$ donne la *taille* de $(WF_T^{L^2})_{x_0}$. Notre résultat principal est que, si $x_0 \in S^{L^2}$, alors nécessairement $\bar{\beta}_{x_0} := \inf_{a \in \mathcal{A}_{x_0}} \beta_{x_0} \geq 1$.

Notre étude s'articule comme suit: dans la section 2, on rappelle quelques préliminaires sur le système de Navier – Stokes. Dans la section 3, on explique comment estimer la quantité $\||\xi|\mathcal{F}u(\xi,t)\|_{L^\infty}$, et on identifie les ensembles $S_T^{L^2}$ et $WF_T^{L^2}$. Dans la dernière section on explique comment aboutir au résultat principal sur $\bar{\beta}_{x_0} \geq 1$. Ces estimations, ainsi que les bornes inférieures sur l'ensemble singulier et sur l'ensemble de concentration d'énergie ont été obtenus en collaboration avec M. Arnold et A. Biryuk.

2. Les équations de Navier – Stokes

2.1. **Solutions faibles.** Les équations d'évolution d'un fluide visqueux et incompressible s'écrivent

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \nu \Delta u \\
&\nabla \cdot u = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x) \in L^2(D) \ , \quad \nabla \cdot u_0 = 0 \ .$$

Le domaine spatio-temporel est

$$D = \mathbb{R}^3 \qquad (x,t) \in D \times \mathbb{R}^+ := Q$$

ou bien

$$D = \mathbb{T}^3 \ , \quad (x,t) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^+ = Q \ .$$

Nous ne considèrerons pas dans ce qui suit le cas d'un domaine borné et régulier $D \subseteq \mathbb{R}^3$. La définition standard d'une solution faible sur l'intervalle $t \in [0,T]$ consiste à postuler que

- Le couple $(u(x,t), p(x,t))$ est une solution de (1) au sens des distributions.
- Les conditions d'intégrabilité suivantes sont satisfaites pour tout $T > 0$:

$$u \in L^\infty([0,T]; L^2(D)) \ \cap \ L^2([0,T]; \dot{H}^1(D)) \tag{2}$$

$$p \in L^{5/3}_{loc}(Q)$$

- L'inégalité d'énergie est satisfaite pour tout $T > 0$

$$\tfrac{1}{2} \int_D |u(x,T)|^2 \, dx + \nu \int_0^T \int_D |\nabla u(x,t)|^2 \, dxdt \leq \tfrac{1}{2} \int_D |u_0(x)|^2 \, dx \, . \tag{3}$$

L'information précisée sur la pression (2) est dûe à Sohr & von Wahl [19] (1986).

Les solutions faibles convenables sont celles qui satisfont en plus une inégalité d'énergie locale, analogue à (3), à savoir que $\forall \varphi \in C_0^\infty(Q)$

$$
\begin{aligned}
\int_D \tfrac{1}{2} |u(\cdot,t)|^2 \varphi \, dx \Big|_{t=0}^{T} &+ \nu \int_0^T \int_D |\nabla u(\cdot,t)|^2 \varphi \, dxdt \\
&\leq \tfrac{1}{2} \int_0^T \int_D |u(\cdot,t)|^2 \Big(\partial_t \varphi + \nu \Delta \varphi \Big) \, dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_D \Big(p + \tfrac{1}{2} |u(\cdot,t)|^2 \Big) u \cdot \nabla \varphi \, dxdt
\end{aligned}
$$

Le théorème d'existence classique de Leray peut être énoncé ainsi :

Théorème 1 (Leray (1934))**.** *Etant donnée $u_0 \in L^2(D)$ à divergence nulle, il existe au moins une solution faible de (1) globale en temps. Ces solutions faibles satisfont*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(D)) \ \cap \ L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1(D)) \quad p \in L^{5/3}_{loc}(Q) \ .$$

Ces solutions ont été étudiées en détail, et il est bien connu qu'elles sont faiblement continues, c'est-à-dire que

$$u \in C_t(L^2_x - \text{faible})$$

ainsi que

$$u \in L^s_t(L^p_x) \ , \qquad \frac{3}{p} + \frac{2}{s} = \frac{3}{2} \qquad 2 \leq p \leq 6 \ .$$

Les solutions construites par Leray sont convenables [4]. Toutefois, on ne sait toujours pas aujourd'hui si les solutions construites par la méthode de Hopf — ou encore par certains autres procédés — le sont. Ni la régularité ni l'unicité de ces solutions ne sont connues.

2.2. **L'ensemble singulier.** La définition de l'ensemble singulier d'une solution faible est la suivante :

Définition 2 (L'ensemble singulier)**.** *Pour une solution faible (u, p) de (1), l'ensemble singulier $S(u) \subseteq Q$ est l'ensemble des points (x, t) autour desquels $u(x, t)$ n'est pas localement bornée.*

C'est-à-dire que $(x_0, t_0) \notin S(u)$ s'il existe un voisinage $B_r(x_0, t_0)$ de (x_0, t_0) tel que

$$u \in L^\infty(B_r(x_0, t_0)) \ . \tag{4}$$

Cette définition est raisonnable grâce au théorème de régularité intérieure de Serrin [18] (1962), qui implique que, si $(x_0, t_0) \notin S(u)$, alors pour tout $k \geq 0$, et pour un certain indice de Hölder $0 < \alpha < 1$,

$$\partial_x^k u(x, t) \in C^\alpha(B_{r/2}(x_0, t_0)) \, .$$

La condition originelle de Serrin (4) est en fait que $u \in L^s L^p(B_r(x_0, t_0))$ pour

$$\frac{3}{p} + \frac{2}{s} < 1 \ . \tag{5}$$

Cette condition (5) a été améliorée par Struwe [20] (1988), qui obtient l'égalité quand $s < \infty$, et par Escauriaza, Seregin et Sveràk [8] (2003) dans le cas où $u \in L^\infty L^3(Q_r(x_0, t_0))$, et pour Q_r cylindre parabolique. Ce résultat est important à cause du fait que les normes $L^s_t L^p_x$ sont invariantes par le changement d'échelle

$$(x, t) \mapsto (\gamma x, \gamma^2 t) \ , \qquad u \mapsto \gamma u$$

qui laisse les équations (1) invariantes.

L'ensemble singulier $S(u)$ est un fermé par définition, et il fait l'objet de nombreuses études difficiles. En particulier, l'ensemble des temps singuliers $\tau(u) = \pi_t S(u) \subseteq \mathbb{R}^+$

est de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $1/2$, — ce qui est implicite dans les travaux de Leray [15], et explicite dans Foiaş & Temam [10]. Autrement dit

$$\mathcal{H}^{1/2}(\tau(u)) = 0 \ .$$

Les bornes supérieures plus précises ont été obtenues d'abord par Scheffer [17] ; une étude plus précise dans l'article [6] conduit au résultat suivant:

Théorème 3 (Régularité partielle, Caffarelli, Kohn & Nirenberg (1982))**.** *Si (u,p) est une solution faible convenable de (1), alors la mesure de Hausdorff parabolique de dimension 1 de $S(u)$ est nulle:*

$$\mathcal{P}^1(S(u)) = 0$$

On peut également parler de la restriction de la solution à un temps donné $\{t = T\}$, pour laquelle ce théorème implique que l'ensemble singulier $S_T := S(u) \cap \{t = T\}$ est de dimension de Hausdorff au plus 1, car

$$\mathcal{H}^1(S_T) = 0 \ .$$

2.3. **Un principe du maximum.** Le théorème suivant peut être vu comme une sorte de principe de maximum, au sens où sa démonstration consiste à identifier un domaine invariant par l'application $u(\cdot,0) \mapsto u(\cdot,t)$, où u est une solution faible des équations de Navier – Stokes (1).

Théorème 4 ([3] (2008))**.** *Soit $B_R(0) \subseteq L^2(D)$, et définissons l'ensemble*

$$A_{R_1} := \{(\hat{u}(\xi))_{\xi\in\mathbb{R}^3} \ : \ |\xi||\hat{u}(\xi)| < R_1\}$$

Si $R^2/\sqrt{2\pi}^3 < \nu R_1$ alors $A_{R_1} \cap B_R(0)$ est un ensemble captant (dans le futur) pour les solutions faibles de Navier – Stokes.

C'est-à-dire que, si une condition initiale $u_0 \in B_R(0)$ satisfait $|\hat{u}_0(\xi)| < \frac{R_1}{|\xi|}$, alors pour tout temps $t > 0$

$$|\hat{u}(\xi,t)| < \frac{R_1}{|\xi|} \ , \qquad \forall \xi \ . \tag{6}$$

Comme corollaire de ces estimations, on aboutit au résultat suivant:

Corollaire 5 ([3] (2008))**.** *Si une condition initiale $u_0 \in B_R(0)$ satisfait $|\hat{u}_0(\xi)| < \frac{R_1}{|\xi|}$, alors pour tout temps $T \geq 0$*

$$\nu \int_0^T |\hat{u}(\xi,s)|^2 \, ds \leq \frac{R_2^2}{|\xi|^4} \ . \tag{7}$$

On remarque que pour toute condition initiale $u_0(x)$ suffisamment régulière, il existe des constantes R et R_1 qui satisfont les hypothèses de ces deux résultats. Les quantités $\sup_t \||\xi|\hat{u}(\xi,t)\|_{L^\infty}$ et $\sup_\xi \int_0^T |\xi|^4|\hat{u}|^2(\xi,t)\, dt$ satisfont des relations de changement d'échelles identiques à celles de la norme $\sup_t \|\partial_x u(\cdot,t)\|_{L^1}$ de BV (pour laquelle il n'existe pas de borne a priori connue pour les solutions des équations de

Navier – Stokes). Pour une démonstration de ces deux estimations, nous renvoyons le lecteur à l'article [3].

3. Discontinuités dans L^2

3.1. **Discontinuités de l'énergie.** L'application $t \mapsto u(\cdot,t) \in L^2$ est bornée, et de plus continue dans la topologie forte de L^2 pour presque tout temps t. Mais il se peut qu'il existe des discontinuités pour certains t dans $\tau(u)$ (l'ensemble des temps singuliers pour u). Cependant cette application est continue pour tout temps dans la topologie faible de L^2. Dans ces conditions, la continuité forte de $t \mapsto u(\cdot,t)$ dans L^2 pour $t = T$ équivaut donc à la condition $\lim_{t\to T^-} \|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u(\cdot,T)\|_{L^2}$.

Ainsi toute discontinuité forte dans L^2 est associée à une discontinuité de la norme L^2, ce qui correspond à une discontinuité d'énergie $\frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2}$. Comme la norme est semi-continue inférieurement dans la topologie faible de L^2, l'énergie à un instant de discontinuité vérifie

$$\limsup_{t\to T^-} \tfrac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2} > \tfrac{1}{2}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2} \ . \tag{8}$$

Considérons l'ensemble des temps singuliers $\tau(u)$; pour $T \in \tau(u)$, l'énergie $\frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2}$ peut être discontinue ou bien continue en T, mais en tout cas la quantité $\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2}$ sera non bornée sur tout intervalle $[T-\delta,T]$. Une décomposition naïve de l'ensemble $\tau(u)$ est alors

$$\tau(u) := \tau_1 \cup \tau_2$$

où τ_1 est l'ensemble des discontinuités de l'énergie,

$$\tau_1 := \{T : \limsup_{t\to T^-} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2} > \|u(\cdot,T)\|^2_{L^2}\}$$

et où $\tau_2 = \tau(u)\backslash\tau_1$ est l'ensemble résiduel des temps singuliers où l'énergie est continue.

3.2. **L'ensemble de concentration L^2.** Supposons que l'ensemble τ_1 n'est pas vide, et prenons $T \in \tau_1$; c'est-à-dire que T est un temps où $t \mapsto u(x,t)$ n'est pas continue dans L^2 fort, et que sa norme satisfait (8) à $t = T$. Cette discontinuité est associée à une concentration de masse L^2 sur un ensemble de points $x \in D$.

Définition 6 (L'ensemble de concentration L^2)**.** *Dans $D \times \{t = T\}$ le point x_0 n'appartient pas à $S_T^{L^2}$ s'il existe $r > 0$ tel que*

$$\lim_{t\to T^-} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(B_r(x_0))} = \|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(B_r(x_0))}$$

Ainsi la concentration L^2 de $u(\cdot,T)$ est associée à un sous-ensemble $S_T^{L^2}$ de D. Suivant cette définition, l'ensemble $S_T^{L^2}$ est un fermé, parce que la convergence faible et la convergence de la norme impliquent la convergence forte, et que ces propriétés de convergence L^2 valent encore pour tout $B_{r_1}(x_1) \subseteq B_r(x_0)$. En plus, comme $u(\cdot,t)$ est régulière en dehors de l'ensemble singulier $S_T(u)$,

$$S_T^{L^2} \subseteq S_T \ ,$$

ce qui implique une borne supérieure sur la mesure de $S_T^{L^2}$, identique à celle obtenue sur S_T dans [6].

L'ensemble $S_T^{L^2}$ est, de manière plus précise, associé à une perte de masse L^2 de la transformée de Fourier $\hat{u}(\xi,t)$ pour $|\xi| \to \infty$ quand $t \to T^-$. En effet, pour chaque ξ la transformée de Fourier $\hat{u}(\xi,t) \in Lip$ comme fonction de temps t, et en particulier pour tout ξ, l'on a $\lim_{t\to T} \hat{u}(\xi,t) = \hat{u}(\xi,T)$, en général sans uniformité en ξ.

Pour un point $x_0 \in S_T^{L^2}$, localisons la question de la convergence pour $t \to T$ au moyen d'une fonction test $0 \le \varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$:

$$v(x,t) := (u(x,t) - u(x,T))\varphi(x) \ .$$

Alors $\lim_{t\to T^-} \hat{v}(\xi,t) = 0$ ponctuellement pour tout ξ, et ce qui peut empêcher éventuellement la convergence forte est la perte de masse L^2 de $\hat{v}(\xi,t)$ pour $|\xi| \to \infty$ quand $t \mapsto T^-$.

3.3. **Calcul de Weyl.** Etant donné le point $x_0 \in S_T^{L^2}$ il est commode de tester la quantité $v(\cdot,t)$ pour la concentration d'énergie microlocale avec le calcul pseudo-différentiel de Weyl. Rappelons brièvement le calcul de Weyl:

$$a^w(x,D)v(x,t) = \iint e^{i\xi\cdot(x-y)} a(\tfrac{x+y}{2},\xi) v(y,t)\, dy d\xi \ ,$$

où l'on autorise des symboles $a(x,\xi) \in S^0_{\rho,\delta}$ dans les classes de Hörmander avec $0 \le \delta < \rho \le 1$. Un test d'énergie microlocal consiste à postuler que

$$\begin{aligned} \langle v \,|\, a^w(x,D) v\rangle &= \int v(x,t)\cdot \iint e^{i\xi\cdot(x-y)} a(\tfrac{x+y}{2},\xi) v(y,t)\, dy d\xi\, dx \\ &= \iint a(x,\xi) W[v](x,\xi)\, dx d\xi \ , \end{aligned}$$

où $W[v]$ est la transformée de Wigner de v

$$W[v](x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\xi\cdot y} v(x+y/2)\overline{v}(x-y/2)\, dy \ ,$$

ce qui est un calcul classique. Pour $a(x,\xi) \in S^0_{\rho,\delta}$, ces opérateurs $a^w(x,D)$ sont bornés sur L^2, de sorte que, si $u(\cdot,t)$ converge fortement vers $u(\cdot,T)$ dans $B_r(x_0)$,

$$\lim_{t\to T_0^-} \langle a \,|\, W[v(t)]\rangle = 0 \ .$$

Mais si $u(\cdot,t)$ converge faiblement mais pas fortement vers $u(\cdot,T)$ dans $L^2(B_r(x_0))$, ceci est détecté par une ou plusieurs mesures de défaut microlocales $\mu \in \mathcal{M}(S^*(\mathbb{R}^3))$. La théorie de L. Tartar et P. Gérard sur les mesures de défaut donne le résultat suivant.

Théorème 7 (L. Tartar (1990), P. Gérard (1991))**.** *Soit μ_{x_0} une mesure de défaut microlocale de la suite $\lim_{t_j \to T^-} v(x,t)$, et supposons que pour tout symbole $a \in S^0_{1,0}$ homogène de degré zéro*

$$\lim_{t_j \to T^-} \langle a \,|\, W[v(t_j)] \rangle := \iint_{S^*(\mathbb{R}^3)} a(x,\xi) \mu_{x_0}(dx dS_\xi) = 0 \ .$$

Alors $\mu_{x_0} = 0$, et $u(\cdot, t_j)$ converge fortement dans $L^2(B_r(x_0))$ vers $u(\cdot, T)$.

Ce résultat nous permet de définir le front d'onde de concentration L^2 microlocale des suites $v(\cdot, t_j)$. Dans chaque boule $B_r(x_0)$, $r > 0$ on prend des fonctions test $\varphi_r(x) \in C_0^\infty$, et on définit la localisation $v_r := \varphi_r(x)(u(x,t) - u(x,T)))$ de la solution.

Définition 8. *Soit $\mathcal{A}_r$ l'ensemble de toutes les mesures de défaut microlocales $\mu_{x_0,r}$ pour $t \to T^-$ de $v_r = \varphi_r(x)(u(x,t) - u(x,T)))$. Le front d'onde de concentration L^2 dans la fibre $T^*_{x_0}(\mathbb{R}^3)$ est défini comme suit:*

$$WF^{L^2}_{x_0 T} := \bigcap_{r>0} \overline{\bigcup_{\mathcal{A}_r} \mathrm{supp}\,(\mu_{x_0,r})} \tag{9}$$

Comme $\mathrm{supp}\,(\mu_{x_0,r})$ est une famille décroissante en $r > 0$ de fermés, l'intersection (9) sur $r > 0$ n'est pas vide.

Lemma 9. *Supposons qu'il existe une fonction test $\varphi_r \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ et une suite $t_j \mapsto T$ telles que la transformée de Wigner $W[v_r]$ de $v_r := \varphi_r(x)(u(x,t) - u(x,T)))$ converge vers la mesure $\mu_{x_0,r}$. Pour tout $r_1 > r$ et tout $\psi \in C_0^\infty(B_{r_1}(x_0))$ tels que $\psi = 1$ sur $B_r(x_0)$, posons $w_{r_1} := \psi(x)(u(x,t) - u(x,T))$. Alors pour tout symbole $a \in S^0_{10}(B_r(x_0))$ homogène vérifiant*

$$\lim_{t_j \to T^-} \langle a \,|\, W[v_r(t_j)] \rangle \neq 0 \ , \tag{10}$$

on a

$$lim_{t_j \to T^-} \langle a \,|\, W[w_{r_1}(t_j)] \rangle = \iint_{S^*(\mathbb{R}^3)} a(x,\xi) \mu_{x_0 r}(dx dS_\xi) \neq 0 \ . \tag{11}$$

Démonstration: Remarquons d'abord que, dans le cas où un symbole $b \in S^m_{\rho,\delta}$ pour $m < 0$, l'opérateur $b^w(x,D)$ est compact, de sorte que par convergence faible de $w := w_{r_1}$ vers 0

$$lim_{t \to T^-} \int w(x,t) \cdot b^w(x,D) w(x,t)\, dx = lim_{t \to T^-} \langle b \,|\, W[w(t)] \rangle = 0 \ .$$

Réécrivant l'intégrale (11),

$$\begin{aligned}
&\int w(x) \iint e^{i\xi\cdot(x-y)} a(\tfrac{x+y}{2},\xi) w(y,t)\, dyd\xi\, dx \\
&= \int \psi(x)v(x) \iint e^{i\xi\cdot(x-y)} a(\tfrac{x+y}{2},\xi)\psi(y)v(y,t)\, dyd\xi\, dx \\
&\sim \int v(x) \iint e^{i\xi\cdot(x-y)} \psi^2(\tfrac{x+y}{2}) a(\tfrac{x+y}{2},\xi) v(y)\, dyd\xi\, dx \\
&\quad + \sum_{|\alpha|+|\alpha'|>0} \frac{(i/2)^{\alpha+\alpha'}}{\alpha!\alpha'!} \iint v(x) \int \partial_x^\alpha \psi(\tfrac{x+y}{2}) \partial_y^{\alpha'} \psi(\tfrac{x+y}{2}) \partial_\xi^{\alpha+\alpha'} a(\tfrac{x+y}{2},\xi) v(y)\, dyd\xi dx.
\end{aligned}$$

En général le premier terme de cette expression asymptotique est un opérateur de Weyl de symbole $\psi^2(x)a(x,\xi)$ et les termes suivants du développement asymptotique sont tous compacts, puisque correspondant à des symboles de la classe $S_{\rho,\delta}^{(\delta-\rho)(|\alpha|+|\alpha'|))}$. Ces termes sont donc tous de limite nulle. Lorsque ψ satisfait les conditions du lemme, notamment lorsque $\psi = 1$ sur le support du symbole $a(x,\xi)$, chaque terme fini du dévélopement asymptotique s'annule. Ainsi lorsque (10) possède une limite non nulle pour un symbole a, alors (11) a également une limite non nulle. $\square$

3.4. **La classe de symboles $S^0_{\rho,\delta}$ de Hörmander et le front d'onde WF^{L^2}.** Par définition, le front d'onde de concentration L^2 est un ensemble homogène dans chaque fibre $T^*_x(\mathbb{R}^3)$. Comme les voisinages coniques de $WF^{L^2}_{x_0,T}$ sont trop grands pour notre analyse, on procède à un examen plus fin avec les symboles $a \in S^0_{\rho,\delta}$, où $0 \le \delta < \rho \le 1$. Les résultats standard montrent que les opérateurs $a^w(x,D)$ de symboles appartenant à $S^0_{\rho,\delta}$ sont bornés sur L^2. Ces classes de symboles incluent les symboles de type quasi-homogènes, voir Beals & Fefferman (1974) [2] Boutet de Monvel (1975) [5] and Lascar (1977) [14]. Pour travailler avec un exemple concret, on peut prendre $a(x,\xi) = \varphi(x)\chi(\frac{\xi'}{\langle\xi_1\rangle^\rho}) \in S^0_{\rho,0}$, pour $0 < \rho \le 1$.

Supposons donc que $x_0 \in S^{L^2}_T$ et soit a, un symbole tel que $0 \le a(x,\xi) \le 1$ et $x_0 \in \operatorname{supp}(a)$, mais

$$\lim_{t\to T^-} \langle v|(1-a)^w(x,D)v\rangle = \iint (1-a(x,\xi))\mu_{x_0}(dxdS_\xi) = 0. \tag{12}$$

Alors

$$WF^{L^2}_{x_0T} \subseteq \operatorname{supp}(a)$$

et l'ensemble sur lequel la norme L^2 est transportée à l'infini microlocalement en x_0 est contenu dans $\operatorname{supp}(a)$. Ceci motive la définition ci-dessous de la *taille* de l'ensemble $WF^{L^2}_{x_0T}$. Etant donné un symbole test $a(x,\xi)$ vérifiant (12), le taux de croissance à l'infini du volume de $\operatorname{supp}(a)$ donne une borne des voisinages de $WF^{L^2}_{x_0T}$ dans lesquels la norme L^2 se transporte. Pour de tels symboles, le taux de croissance du volume de leurs supports dans les fibres de $T^*(\mathbb{R}^3)$ vaut

$$\mathrm{vol}\left(\pi_\xi \mathrm{supp}\,(a) \cap B_R(0)\right) \simeq R^{1+\beta} \;,$$

où l'exposant satisfait $0 < \beta = \beta(a) \le 2$.

Définition 10 (Taux de concentration sur $WF^{L^2}_{x_0T}$)**.** *On pose*

$$\bar\beta_{x_0}(v) := \inf_{r>0}\inf_{\{a\}}(\beta).$$

Théorème 11 (Arnold & Craig [1] (2009))**.** *S'il est non vide, l'ensemble $WF^{L^2}_{x_0T} \subseteq WF_{x_0T}(u)$ ne peut pas être trop petit, au sens où*

$$\bar\beta_{x_0}(v) \ge 1 \;.$$

Cette estimation donne effectivement une borne inférieure pour chaque fibre $S^*_{x_0}(\mathbb{R}^3)$. Nous proposons ainsi d'utiliser l'exposant $\bar\beta_{x_0}(v)$ pour mesurer la taille de $WF^{L^2}_{x_0T}$. Cet exposant fournit une borne supérieure sur la dimension de Hausdorff de $WF^{L^2}_{x_0T} \cap S^*(D)$, ce qui est une quantité géométrique. L'inégalité correspondante n'est pas toujours une égalité dans tous les cas — nous remercions P. Gérard [12] de nous avoir signalé ce point. La borne inférieure de la taille de $WF^{L^2}_{x_0T}$ donnée par $\bar\beta_{x_0}(v)$ concerne plutôt des informations de nature analytiques, notamment une borne inférieure sur la taille des voisinages non coniques de $WF^{L^2}_{x_0T}$ dans la fibre $T^*_{x_0}(\mathbb{R}^3)$.

3.5. **Esquisse de la démonstration du théorème principal.** Supposons $\bar\beta_{x_0}(v) < 1$, et choisissons $r > 0$, un voisinage $B_r(x_0)$, une mesure μ_{x_0r}, une suite $\{t_j\} \to T^-$, et un symbole $a \in S^0_{\rho,\delta}$, possédant les propriétés de support exigées dans le voisinage $B_r(x_0)$ et tel que $\beta(a)$, le taux de croissance du volume du support de a, satisfasse $\bar\beta_{x_0}(v) < \beta(a) < 1$. Étudions le convergence de $v(\cdot,t)$ avec

$$\begin{aligned}\lim_{t\to T_0^-}\langle a|W[v(t_j)]\rangle &= \lim_{t\to T_0^-}\int v(x,t_j)a^w(x,D)v(x,t_j)\,dx\\ &= \lim_{t\to T_0^-}\int d\eta\Big[\int \tilde a(\eta,\xi)\hat v(\xi+\eta/2,t_j)\overline{\hat v(\xi-\eta/2,t_j)}\,d\xi\Big]\end{aligned}$$

où $\tilde a(\eta,\xi)$ est la transformée de Fourier du symbole a par rapport à x. Pour chaque η, la croissance de $\mathrm{supp}\,\tilde a(\eta,\xi)$ est bornée par $R^{1+\beta}$. On arrive à la majoration suivante: pour chaque $\eta > 0$

$$|\tilde a(\eta,\xi)||\hat v(\xi+\eta/2,t_j)||\hat v(\xi-\eta/2,t_j)| \le R_1^2|\tilde a(\eta,\xi)|\langle\xi+\eta/2\rangle^{-1}\langle\xi-\eta/2\rangle^{-1} \;.$$

Le second membre est intégrable en ξ; plus précisément $\int_\xi(*)\,d\xi \le \int\langle r\rangle^{-2}r^\beta\,dr < +\infty$. Alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que, pour $t_j \to T^-$, la limite de l'intégrale est nulle, ce qui contredit notre hypothèse (11). □

References

[1] M. Arnold and W. Craig DCDS (2010).

[2] R. Beals and C. Fefferman *Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators. I.* Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974) 1–24.

[3] A. Biryuk and W. Craig, *Bounds on Kolmogorov spectrum for the Navier – Stokes equations.* preprint, ArXiv #0807.4505

[4] A. Biryuk, W. Craig and S. Ibrahim, *Construction of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Stochastic analysis and partial differential equations, 1–18, Contemp. Math., **429** Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007).

[5] L. Boutet de Monvel *Propagation des singularités des solutions d'équations analogues 'a l'équation de Schrödinger.* Fourier integral operators and partial differential equations (Colloq. Int., Univ. Nice, Nice, 1974), pp. 1–14. Lecture Notes in Math., **459** Springer, Berlin (1975).

[6] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier – Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982) 771–831.

[7] D. Córdoba, C. Fefferman and R. de la Llave *On squirt singularities in hydrodynamics.* SIAM J. Math. Anal. **36** (2004) 204–213.

[8] L. Escauriaza, G. Seregin and V. Sveràk. *Backward uniqueness for parabolic equations.* Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003) 147–157.

[9] C. Foiaş, C. Guillopé and R. Temam *New a priori estimates for Navier-Stokes equations in dimension* 3. Comm. Partial Differential Equations **6** (1981) 329–359.

[10] C. Foiaş and R. Temam *Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations.* J. Math. Pures Appl. (9) **58** (1979) 339–368.

[11] P. Gérard *Microlocal defect measures.* Comm. Partial Differential Eqns **16** (1991) 1761–1794.

[12] P. Gérard communication personelle (2009).

[13] A. N. Kolmogorov *The local structure of turbulence in incompressible viscous flow for very large Reynolds' numbers. Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30** (1941) 299–303.

[14] R. Lascar *Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27** (1977) vii-viii, 79–123.

[15] J. Leray *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math. **63** (1934) 193–248.

[16] A. M. Obukhov *On the energy distribution in the spectrum of a turbulent flow. Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32** (1941) 22–24.

[17] V. Scheffer *Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations.* Comm. Math. Phys. **55** (1977) 97–112.

[18] J. Serrin *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **9** (1962) 187–195.

[19] H. Sohr and W. von Wahl *On the regularity of the pressure of weak solutions of Navier – Stokes equations.* Arch. Math. (Basel) **46** (1986) 428–439.

[20] M. Struwe *On partial regularity results for the Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988) 437–458.

[21] L. Tartar *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115** (1990) 193–230.