Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2009-2010

Sylvia Serfaty

Dérivation d'un problème variationnel pour les réseaux d'Abrikosov

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° XVII, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A17_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n° XVII, 1-10

Dérivation d'un problème variationnel pour les réseaux d'Abrikosov

Sylvia Serfaty

On décrit ici un travail en collaboration avec Etienne Sandier, de l'Université Paris-Est.

1 Le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité

Les supraconducteurs sont des alliages, qui, en-dessous d'une certaine température critique, perdent leur résistivité et laissent circuler des courants sans dissipation d'énergie. Ils sont décrits par la fonctionnelle d'énergie de Ginzburg-Landau, proposée par Ginzburg et Landau dans les années 50. En dimension 2, celle-ci se réduit (après quelques a-dimensionnements) à

$$G_\varepsilon(u, A) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_A u|^2 + |\text{curl } A - h_{ex}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(1 - |u|^2\right)^2 \tag{1.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$.

L'inconnue u est une fonction à valeurs complexes, “paramètre d'ordre" en physique. Elle indique l'état local du matériau : $|u|^2$ est la densité de “paires de Cooper" d'électrons supraconducteurs. Avec notre normalisation $|u| \le 1$, et $\{|u| \simeq 1\}$ correspond à la phase supraconductrice et $\{|u| \simeq 0\}$ à la phase normale.

L'inconnue A est un champ de vecteurs sur Ω, le potentiel vecteur du champ magnétique, qui s'en déduit par $h := \text{curl}\, A = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$, h est donc une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ (qui est vraiment la composante verticale du champ magnétique). ∇_A désigne le gradient covariant $\nabla - iA$.

Le *courant supraconducteur* est un vecteur donné par $j = \langle iu, \nabla_A u\rangle$ où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{C}$ identifié avec $\mathbb{R}^2$, ou bien

$$\frac{i}{2}\left(u\overline{\nabla_A u} - \bar{u}\nabla_A u\right).$$

Le paramètre $h_{\text{ex}} > 0$ représente l'intensité du champ magnétique appliqué (supposé perpendiculaire au plan de Ω). Le paramètre $\varepsilon > 0$ est l'inverse du “paramètre de Ginzburg-Landau" généralement noté κ, paramètre adimensionnel ne dépendant que du matériau. On s'intéresse au régime ε petit correspondant aux supraconducteurs à grand κ (ou type-II extrême). La limite $\varepsilon \to 0$ ou $\kappa \to \infty$ que l'on considère est aussi appelée limite de London. On considérera h_{ex} comme une fonction de ε et non un paramètre indépendant.

Les états stationnaires du système sont les points critiques de G_ε, ou les solutions des équations de Ginzburg-Landau :

$$(GL)\begin{cases} -(\nabla_A)^2 u = \dfrac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2) & \text{dans } \Omega \\ -\nabla^\perp h = \langle iu, \nabla_A u\rangle & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\text{ex}} & \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \cdot \nabla_A u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\nabla^\perp$ désigne l'opérateur $(-\partial_2, \partial_1)$, et ν la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Les équations et l'énergie de Ginzburg-Landau equations sont invariantes par les transformations de jauge $\mathbb{U}(1)$:

$$\begin{cases} u \mapsto ue^{i\Phi} \\ A \mapsto A + \nabla\Phi \end{cases} \tag{1.2}$$

Les quantités qui ont un sens physique sont celles qui sont invariantes de jauge.

Pour plus de détails sur la fonctionnelle, les équations, etc, on renvoit à l'ouvrage de physique [10] ou de mathématiques [7].

2 Vortex et champs critiques

2.1 Solutions particulières de (GL)

Nous commençons par des considérations heuristiques sur (GL) (on peut en trouver de plus détaillées dans [3] ou [7] chapitre 2) et distinguons quelques types de solutions. La solution normale est $(u \equiv 0, \operatorname{curl} A \equiv h_{\text{ex}})$. C'est une vraie solution de (GL) et son énergie se calcule facilement : c'est $\frac{|\Omega|}{4\varepsilon^2}$. La solution Meissner ou supraconductrice est $(u \equiv 1, A \equiv 0)$. C'est une vraie solution de (GL) si $h_{\text{ex}} = 0$, et une solution approchée (c.a.d. qu'il existe une vraie solution très proche) si h_{ex} n'est pas trop grand, son énergie est approximativement $\frac{h_{\text{ex}}^2}{2}|\Omega|$. On comparant ces énergies on voit que la solution Meissner est plus favorable pour h_{ex} petit, et la solution normale plus favorable pour h_{ex} grand. Il existe un troisième état, dit phase "mixte" où les phases normales et supraconductrices coexistent sous forme de *vortex*, cet état est le plus favorable pour les valeurs intermédiaires de h_{ex}. Un vortex peut être défini comme un zéro de u, autour duquel u a un degré topologique non nul, appelé degré du vortex. Autour d'un vortex en un point x_0, la fonction u "ressemble à" $u = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho(x_0) = 0$ et $\rho = f(\frac{|x-x_0|}{\varepsilon})$ où $f(0) = 0$ et f tend vers 1 quand $r \to +\infty$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(x_0, R\varepsilon)} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = d \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

est le degré du vortex. Dans la limite $\varepsilon \to 0$, $|u|$ n'est différent de 1 que dans des zones d'échelle caractéristique ε et les vortex deviennent ponctuels tandis que $\varepsilon \to 0$. Il existe des solutions de (GL) à nombre relativement arbitraire de vortex.

2.1.1 Champs critiques

Il y a trois valeurs de h_{ex} ou *champs critiques* H_{c_1}, H_{c_2}, et H_{c_3}, pour lesquelles se produisent des transitions de phase.

- Pour $h_{\mathrm{ex}} < H_{c_1}$le minimiseur de l'énergie est la solution superconductrice (Meissner). H_{c_1} est d'ordre $|\log \varepsilon|$ quand $\varepsilon \to 0$.
- Pour $h_{\mathrm{ex}} = H_{c_1}$ les premiers vortex apparaissent (dans les minimiseurs).
- Pour $H_{c_1} < h_{\mathrm{ex}} < H_{c_2}$ on est dans la phase mixte, avec de plus en plus de vortex quand h_{ex} augmente. Les vortex se repoussent et s'organisent en réseau triangulaire dit "réseau d'Abrikosov" pour minimiser leur répulsion.
- Pour $h_{\mathrm{ex}} = H_{c_2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$, la supraconductivité disparaît ($|u| \sim 0$) sauf sur une couche près du bord où elle subsiste jusqu'à H_{c_3}. Ceci s'appelle la "supraconductivité de surface".
- A $h_{\mathrm{ex}} > H_{c_3} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ la supraconductivité disparaît entièrement et la seule solution devient la solution normale.

2.1.2 Heuristique sur la densité de vortex

Voyons très formellement comment rendre tous les termes de l'énergie $|\nabla_A u|^2$, $|\mathrm{curl}\, A - h_{\mathrm{ex}}|^2$ et $\frac{(1-|u|^2)^2}{2\varepsilon^2}$ simultanément petits.

En notant $u = \rho e^{i\varphi}$ sous forme trigonométrique, il faut d'abord prendre $\rho \sim 1$ (sauf peut-être sur une zone de petite aire, ce qui permet des vortex). Le terme d'énergie $|\nabla_A u|^2$ s'écrit sous cette forme $|\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\nabla \varphi - A|^2$. Il faut donc encore prendre (si possible)

$$\nabla \varphi - A \sim 0 \qquad \mathrm{curl}\, A \sim h_{\mathrm{ex}}. \tag{2.2}$$

Mais φ est une phase et non une vraie fonction, donc pour des configurations à vortex on vérifie à l'aide de (2.1) qu'on a, au sens des distributions,

$$\mathrm{curl}\, \nabla \varphi = 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \tag{2.3}$$

où a_i sont les points de vortex de u et d_i leurs degrés. Prenant le rotationnel dans (2.2) on voudrait donc

$$2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} - \mathrm{curl}\, A \sim 0 \qquad \mathrm{curl}\, A \sim h_{\mathrm{ex}}$$

soit

$$2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \sim h_{\mathrm{ex}}.$$

Ceci indique que les vortex sont effectivement favorables dès que h_{ex} est assez grand, et qu'il en faut même une densité $h_{\mathrm{ex}}/2\pi$ sur tout le domaine. Bien sûr le calcul précédent est très formel mais il est essentiellement juste lorsque $|\log \varepsilon| \ll h_{\mathrm{ex}} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$. Pour des champs inférieurs il néglige des effets de bord, et pour des champs supérieurs, il ne tient pas compte du fait que la taille caractéristique des vortex est ε donc la surface totale qu'ils occupent

$\sim \varepsilon^2 h_{\rm ex}$ n'est plus négligeable. On se restreint ici au régime $|\log \varepsilon| \ll h_{\rm ex} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$ où l'on s'attend à une densité uniforme de vortex. Le fait que c'est effectivement le cas dans ce régime est prouvé rigoureusement dans [7] chapitre 8.

3 Equation de London, vorticité et énergie approchée

Les calculs ci-dessus étaient très formels, pour les rendre plus corrects on introduit la “vorticité" (ou tourbillon) d'une configuration, définie par

$$\mu(u,A) = \mathrm{curl}\,\langle iu, \nabla_A u\rangle + h$$

ou bien curl $(\rho^2(\nabla\varphi - A))$ en forme trigonométrique. C'est une version invariante de jauge de la vorticité habituelle (pour les fluides par exemple). Des estimées dites “jacobiennes" dues à Jerrard-Soner [5] et [7] chapitre 6, montrent que pour tout (u, A) il existe des points a_i et des entiers d_i tels que

$$\|\mu(u,A) - 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i}\|_{(C^{0,1})^*} \le C\varepsilon G_\varepsilon(u,A) \ll 1$$

autrement dit la vorticité est très proche, dans une norme faible, d'une somme de masses de Dirac (en les vortex de u).

Prenant le rotationnel de la deuxième équation de Ginzburg-Landau dans (GL) on trouve

$$-\Delta h = \mathrm{curl}\,\langle iu, \nabla_A u\rangle = \mu(u,A) - h$$

et on a donc l'équation dite de London

$$\begin{cases} -\Delta h + h = \mu(u,A) \simeq 2\pi \sum_i d_i\delta_{a_i} & \text{dans } \Omega \\ h = h_{\rm ex} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le champ magnétique h se comporte donc comme un potentiel engendré par les vortex. Notant $G_\Omega(x, y)$ le noyau de Green solution de

$$\begin{cases} -\Delta G_\Omega + G_\Omega = \delta_y & \text{dans } \Omega \\ G_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

on tire de (3.1)

$$h(x) = h_{\rm ex} + \int_\Omega G_\Omega(x,y)(\mu(u,A)(y) - h_{\rm ex})\,dy. \tag{3.3}$$

Noter aussi que de la deuxième équation de (GL) et du principe du maximum $|u| \le 1$ on tire $|\nabla h| \le |\nabla_A u|$ (et en fait il y a essentiellement égalité). Grâce à ces deux considérations, il est raisonnable de voir l'énergie comme

$$G_\varepsilon(u,A) \simeq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 + |h - h_{\rm ex}|^2,$$

avec h relié aux vortex par (3.1), donc par (3.3). Ceci se réecrit comme

$$G_\varepsilon(u,A) \simeq \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} G_\Omega(x,y)\, d(\mu - h_{\text{ex}})(x)\, d(\mu - h_{\text{ex}})(y) \tag{3.4}$$

où l'on note simplement μ pour $\mu(u,A)$.

On voit qu'il est alors crucial que dans (3.3), $\mu(u,A)$ ne soit pas exactement une somme de masses de Dirac, sans quoi h aurait une singularité logarithmique en chaque point et $\int_\Omega |\nabla h|^2$ serait infini. Le vrai comportement de $\mu(u,A)$ est plutôt $2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i}^{(\varepsilon)}$ où $\delta_{a_i}^{(\varepsilon)}$ sont des masses de Dirac "régularisées" et "étalées" à l'échelle ε. On peut montrer que tout se passe effectivement comme si on avait

$$G_\varepsilon(u,A) \simeq \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} G_\Omega(x,y)\, d(2\pi\sum_i d_i\delta_{a_i}^{(\varepsilon)} - h_{\text{ex}})(x)\, d(2\pi\sum_i d_i\delta_{a_i}^{(\varepsilon)} - h_{\text{ex}})(y), \tag{3.5}$$

où les a_i sont les vortex, dépendants de ε et inconnus. En examinant les contributions proches de la diagonale dans l'intégrale de (3.5), on voit que l'énergie d'"auto-interaction" de chaque vortex n'est pas infinie mais diverge comme $\pi d_i^2 \log\frac{1}{\varepsilon}$, retrouvant ainsi des estimées connues (voir notamment [2] et les méthodes de "construction de boules" de Jerrard/Sandier [4, 6, 7]). Ceci permet aussi de montrer que pour les minimiseurs de l'énergie, les d_i sont égaux à 1, ce qu'on supposera dans la suite pour simplifier. On retrouve aussi que si l'on considère une famille $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$, μ_ε la vorticité associée et μ_* la limite faible de $\frac{\mu_\varepsilon}{h_{\text{ex}}}$, l'énergie de $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ doit être environ

$$G_\varepsilon(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \simeq \pi\sum_i d_i^2|\log\varepsilon| + \frac{h_{\text{ex}}^2}{2}\int_{\Omega\times\Omega} G_\Omega(x,y)\, d(\mu_* - 1)(x) d(\mu_* - 1)(y)$$

ce qui permet d'identifier la mesure limite μ_* optimale (ceci est fait dans [7] chapitre 7). Quand $|\log\varepsilon| \ll h_{\text{ex}}$ le premier terme du membre de droite est négligeable, et il suffit de minimiser le second, qui est minimal pour $\mu_* = 1$ soit la mesure uniforme sur Ω. Pour plus de détails sur tous ces résultats voir [7] ou [9].

4 L'énergie renormalisée

Dans [8] on a poussé plus loin l'analyse pour comprendre l'énergie d'interaction dans (3.5) dont on voit qu'elle est logarithmique, non pas simplement à l'ordre principal (qui donne le comportement moyen $\mu_* = 1$ comme on l'a vu) mais à l'ordre suivant : comme on s'attend à une densité de points en h_{ex}, donc à une distance typique $1/\sqrt{h_{\text{ex}}}$, on fait des dilatations à l'échelle $\sqrt{h_{\text{ex}}}$, on voit alors une configuration de points bien séparés dans tout le plan, et on cherche l'énergie qui gouverne l'interaction coulombienne de la limite de ces points. Ce changement d'échelle transforme (3.1) en

$$-\Delta H + \frac{H}{h_{\text{ex}}} = 2\pi\sum_i \delta_{b_i}^{(\varepsilon)}$$

où les b_i sont les images des a_i par dilatation (et H celle de h). Passant à la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$-\Delta H = 2\pi \sum_i \delta_{b_i} - 1 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

où cette fois H et b_i ne dépendent plus de ε. L'énergie limite ou "énergie renormalisée" est définie pour tous (H, b_i) vérifiant (4.1) par

$$W(\nabla H) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R|} \left(\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{2} \int_{B_R \setminus \cup_i B(b_i,\eta)} \chi_R |\nabla H|^2 + \pi \sum_i \chi_R(b_i) \log \eta \right) \tag{4.2}$$

où χ_R est une fonction de troncature égale à 0 hors de B_R, à 1 dans B_{R-1} et $|\nabla \chi_R| \le 2$. D'après (4.1) H a (cette fois) une vraie singularité logarithmique en chaque b_i, et dans la formule (4.2), la partie infinie de $\int |\nabla H|^2$ correspondante est "renormalisée" en enlevant des trous de petite taille autour de chaque b_i et en compensant la divergence logarithmique.

On montre dans [8] que pour les minimiseurs, les configurations de vortex, après dilatation, doivent minimiser W — voir la partie suivante pour un énoncé complet . La minimisation de W n'est pas une question facile. On peut conjecturer que le réseau triangulaire d'Abrikosov est un minimiseur – il s'agit donc d'une question de cristallisation. Comme W est un calcul renormalisé de $\int |\nabla H|^2$ on peut dire à partir de (4.1) qu'on essaie de minimiser $2\pi \sum_i \delta_{b_i} - 1$ dans un certain sens.

Si H est périodique par rapport à un tore $\mathbb{T}$, l'expression pour W se simplifie en

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T} \setminus \cup_i B(b_i,\eta)} |\nabla H|^2 + \pi \sum_i \log \eta. \tag{4.3}$$

Si on suppose en outre que la configuration de points est disposée sur un pur réseau Λ (de volume 2π) on peut exprimer W comme une fonction de Λ. En intégrant par parties à partir de (4.3) on trouve

$$W(\Lambda) = \pi \lim_{x\to 0} (H(x) + \log|x|)$$

puis par transformation de Fourier

$$W(\Lambda) = \pi \lim_{x\to 0} \left(\sum_{p\in\Lambda^*\setminus 0} \frac{e^{2i\pi p\cdot x}}{4\pi^2 |p|^2} + \log|x| \right)$$

où Λ^* est le réseau dual de Λ. L'utilisation de la "2e formule limite de Kronecker" ou un calcul permet de transformer encore cette expression en

$$cste + \lim_{x\to 0} \left(\sum_{p\in\Lambda^*\setminus 0} \frac{1}{4\pi^2 |p|^{2+x}} - f(x) \right).$$

Pour minimiser W par rapport à Λ, on est alors ramené à minimiser la fonction Zeta d'Epstein $\zeta_\Lambda(s) = \sum_{p\in\Lambda\setminus 0} \frac{1}{|p|^s}$, $s > 2$, par rapport à Λ. Il est connu depuis les années 60 (résultats de Cassels, Rankin, Ennola, Diananda) qu'en dimension 2, l'unique minimum est atteint pour Λ égal au réseau triangulaire (aussi appelé "réseau hexagonal"). Autrement dit, parmi les configurations en réseau pur, W est uniquement minimisé par le réseau triangulaire, ce qui corrobore bien les observations des réseaux d'Abrikosov.

Théorème 1. *Parmi les configurations en réseau de volume 2π, l'unique minimiseur de W est le réseau triangulaire.*

Il reste évidemment à comprendre si le réseau triangulaire reste minimiseur parmi toutes les configurations.

5 Méthode de preuve

La dérivation de W dans [8] est obtenue par des comparaisons pour les minimiseurs de l'énergie : bornes supérieures par construction de configurations test, et obtention d'une borne inférieure qui coincide avec la borne supérieure. C'est la borne inférieure qui est la plus délicate à obtenir puisqu'elle est obtenue sans "ansatz". Pour l'obtenir nous avons introduit dans [8] une méthode abstraite de minorations pour des énergies à deux échelles qui Γ-convergent à l'échelle rapide, qu'on pourrait appeler "Γ-convergence à deux échelles". Dans le cas de Ginzburg-Landau, l'échelle "lente" est $\frac{1}{\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}}$, distance entre les vortex, et l'échelle "rapide" ε, celle des vortex, avec $\varepsilon \ll \frac{1}{\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}}$. Après dilatation, l'échelle lente devient 1, la taille du domaine devient grande ($\sqrt{h_{\mathrm{ex}}}$) et l'échelle rapide peut être renommée ε. Dans le cadre abstrait, on se ramène toujours à ce cas : on a donc une échelle $\varepsilon \to 0$, et un grand domaine Ω_ε dont la taille (dans toutes les directions) tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \to 0$. On suppose que l'énergie que l'on veut minorer est de la forme

$$F_\varepsilon(u) = \fint_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\theta_x u)\, dx.$$

Ici θ_x désigne l'action de translation par x : $\theta_x u = u(x + \cdot)$ et f_ε est une fonctionnelle d'énergie à l'échelle 1 dont on suppose une relation de type Γ-liminf :

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq f(u) \quad \text{si} \quad u_\varepsilon \to u.$$

On suppose également que f_ε est minoré par une constante indépendante de ε et vérifie certaines hypothèses de coercivité. Typiquement on peut prendre $f_\varepsilon(u) = \int \chi(x) e_\varepsilon(u)\, dx$ où e_ε est la densité d'énergie qui nous intéresse et χ est un noyau de troncature d'intégrale 1 à support dans B_1. Une application du théorème de Fubini montre que $F_\varepsilon(u) \simeq \fint_{\Omega_\varepsilon} e_\varepsilon(u)\, dx$ (l'erreur étant due à des effets de bord négligeables puisque Ω_ε est grand).

La minoration repose, suivant la suggestion de R. Varadhan, sur l'utilisation du théorème ergodique multiparamètres sous la forme

Théorème 2 (voir [1])**.** *Soit X un espace métrique complet séparable, θ_x un groupe continu à n paramètres agissant sur X, P une mesure de probabilité invariante par rapport à θ_x et*

$f \in L^1(P)$. Alors

$$\int f(u)\, dP(u) = \int f^*(u)\, dP(u)$$

où f^* est une fonction θ_x invariante et P-pp égale à

$$\lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} f(\theta_x u)\, dx. \tag{5.1}$$

Soit u_ε tel que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le C$. On définit P_ε comme l'image de la mesure de Lebesgue normalisée par $x \mapsto \theta_x u_\varepsilon$. On a donc pour toute fonction Φ continue sur l'espace fonctionnel

$$\int \Phi(u)\, dP_\varepsilon(u) = \fint_{\Omega_\varepsilon} \Phi(\theta_x u_\varepsilon)\, dx.$$

Par hypothèse de coercivité sur f_ε et borne sur $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ on peut montrer que P_ε est tendue, et converge (à extraction près) vers une probabilité P qui est θ-invariante. P est en fait supporté sur les limites faibles des $\theta_{x_\varepsilon} u_\varepsilon$, c'est une probabilité sur les profils limites (un peu comme une mesure de Young sur les profils limites), et elle vérifie que pour toute Φ continue

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \fint \Phi(\theta_x u_\varepsilon)\, dx = \int \Phi(u)\, dP(u).$$

On peut déduire de la convergence faible de P_ε et de l'hypothèse de Γ-liminf sur f_ε que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon(u)\, dP_\varepsilon(u) \ge \int f(u)\, dP(u).$$

Mais le membre de gauche n'est autre que $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$, par définition de P_ε et de F_ε, et le membre de droite est égal à $\int f^*(u)\, dP(u)$ par le théorème ergodique ci-dessus. On a donc obtenu la minoration

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \ge \int f^*(u)\, dP(u) \ge \inf f^*. \tag{5.2}$$

La fonctionnelle f^* donnée par (5.1) est en quelque sorte la Γ-liminf de F_ε. On peut voir la question de sa minimisation comme un “problème de cellule" pour employer le langage de l'homogénéisation. Si on peut montrer par une construction que $\min F_\varepsilon \le \inf f^*$, alors pour les minimiseurs de F_ε on aura égalité dans (5.2), ce qui implique que P-presque tout u minimise f^*. On peut énoncer cela de la manière suivante : si l'on tire un point de centrage au hasard de manière équiprobable dans Ω_ε, presque sûrement les limites (après extraction) du profil centré en ce point minimisent f^*.

C'est cette méthode abstraite que nous employons pour minorer l'énergie de Ginzburg-Landau G_ε à l'ordre suivant, mais nettement compliquée par le fait que le f_ε qu'il faut utiliser n'est pas minoré. Le f limite qui correspond est

$$W(\nabla H, \chi) = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \cup_i B(b_i,\eta)} \chi |\nabla H|^2 + \pi \log \eta \sum_i \chi(b_i)$$

où (4.1) est vérifiée. Le f^* s'en déduit par (5.1) (après une application de Fubini) :

$$f^* = \lim_{R\to\infty}\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{|B_R|}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\cup_i B(b_i,\eta)}\chi_R|\nabla H|^2 + \pi\log\eta\sum_i \chi_R(b_i)\right)$$

où χ_R est la convolution de χ avec l'indicatrice de B_R. C'est donc bien W.

On arrive effectivement à obtenir la majoration correspondante par une construction adaptée et on peut maintenant formuler le théorème :

Théorème 3 ([8])**.** *Soit $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ un minimiseur de G_ε dans le régime $|\log\varepsilon| \ll h_{\rm ex} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$. Soit P_ε l'image de la mesure de Lebesgue sur Ω normalisée par l'application $x \mapsto l_\varepsilon\langle iu_\varepsilon, \nabla_{A_\varepsilon}u_\varepsilon\rangle(x+l_\varepsilon\cdot) := \nabla^\perp h_{\varepsilon,x}$ où $l_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{h_{\rm ex}}}$. Quitte à extraire une sous-suite, P_ε converge faiblement vers une probabilité P telle que*

1. $$\lim_{\varepsilon\to 0} \fint_\Omega \Phi(\nabla^\perp h_{\varepsilon,x})\,dx = \int \Phi(\nabla H)\,dP(\nabla H) \qquad \forall \Phi \in C^0$$
2. *P presque tout ∇H vérifie*
$$\Delta H = 2\pi\sum_{p\in E}\delta_p - 1 \qquad \mathbb{R}^2$$
pour un ensemble E discret.
3. *P presque tout ∇H minimise W dans cette classe.*

Références

[1] M. E. Becker, Multiparameter groups of measure-preserving transformations : a simple proof of Wiener's ergodic theorem. *Ann Probability* **9**, No 3 (1981), 504–509.

[2] F. Bethuel, H. Brezis, F. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, 1994.

[3] DeGennes, P. G. *Superconductivity of metal and alloys.* Benjamin, New York and Amsterdam, 1966.

[4] R. L. Jerrard, Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals. *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999), no. 4, 721-746.

[5] R. L. Jerrard, H. M. Soner, The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **14** (2002), no. 2, 151–191.

[6] E. Sandier, Lower bounds for the energy of unit vector fields and applications. *J. Funct. Anal.* **152** (1998), no. 2, 379–403.

[7] E. Sandier, S. Serfaty, *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*, Birkhaüser, 2007.

[8] E. Sandier, S. Serfaty, From the Ginzburg-Landau Model to Vortex Lattice Problems, à paraître.

[9] S. Serfaty, Vortex patterns in Ginzburg-Landau minimizers, Proc. International Congress of Mathematical Physics 2009, à paraître.

[10] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity.* Second edition. McGraw-Hill, New York, 1996.

Sylvia Serfaty
UPMC Univ. Paris 06, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions,
Paris, F-75005 France ;
CNRS, UMR 7598 LJLL, Paris, F-75005 France
& Courant Institute, New York University
251 Mercer St., New York, NY 10012, USA
serfaty@ann.jussieu.fr