Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Christophe Lacave

Fluide idéal incompressible en dimension deux autour d'un obstacle fin

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° XXIV, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A24_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° XXIV, 1-13

FLUIDE IDÉAL INCOMPRESSIBLE EN DIMENSION DEUX AUTOUR D'UN OBSTACLE FIN

CHRISTOPHE LACAVE

Résumé. Nous étudions le comportement asymptotique des fluides incompressibles dans les domaines extérieurs, quand l'obstacle devient de plus en plus fin, tendant vers une courbe. Nous étendons les travaux d'Iftimie, Lopes Filho, Nussenzveig Lopes et Kelliher dans lesquels les auteurs considèrent des obstacles se contractant vers un point. En utilisant des outils de l'analyse complexe, nous détaillerons le cas des fluides idéaux en dimension deux autour d'une courbe. Nous donnerons ensuite, à titre indicatif, les résultats établis dans les autres cas.

1. Introduction

Nous travaillons sur le comportement asymptotique des fluides dans des domaines extérieurs, quand l'obstacle devient de plus en plus fin, tendant vers une courbe ou une surface. La limite de petits obstacles est un problème d'EDP général concernant les domaines singulièrement perturbés. Il existe une large littérature sur de tels problèmes, spécialement dans le cas elliptique. Le comportement asymptotique des fluides sur des domaines singulièrement perturbés est un sujet naturel qui est relativement peu exploré.

Les premiers travaux ont été réalisés en 2003 et 2006 par Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes concernant les fluides incompressibles parfaits (régis par les équations d'Euler) et visqueux (régis par les équations de Navier-Stokes) en dimension deux quand l'obstacle se contracte homothétiquement vers un point. Iftimie et Kelliher ont enfin étudié en 2008 le cas des fluides incompressibles visqueux en dimension trois autour d'un obstacle qui se contracte vers un point.

Ma thèse reprend mes travaux réalisés concernant les fluides incompressibles parfaits (article [8]) et visqueux (article [9]) autour d'une courbe en dimension deux et les fluides incompressibles visqueux autour d'une surface en dimension trois (non publié). Elle se termine enfin par l'unicité du problème mixte Euler point vortex avec un seul point vortex introduit par Marchioro et Pulvirenti, dans le cas où le tourbillon initial est constant près du point vortex (article [10]). Je détaillerai dans la partie suivante les cas des fluides idéaux en dimension deux autour d'un point [4] et autour d'une courbe [8]. Les résultats concernant les fluides visqueux en dimension deux et trois seront alors présentés (sans preuve) dans la dernière partie.

Précisons tout d'abord le problème.

Problème considéré. Considérons un fluide occupant un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$. Une description macroscopique classique de l'état du fluide peut être donnée par la densité ρ, la vitesse $u = (u_1, u_2)$ et la pression p. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t u - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + g,$$

avec g la force extérieure exercée sur le fluide et ν la viscosité du fluide. Pour simplifier supposons que la force extérieure et la vitesse à l'infini soient nulles. Nous utiliserons de plus la condition d'incompressibilité du fluide, ce qui se traduit par $\operatorname{div} u = 0$.

Pour les équations de Navier-Stokes, les conditions au bord les plus fréquentes sont celles de l'adhérence à la paroi (ou conditions de Dirichlet homogènes) : $u = 0$ au bord.

Si la résistance au fluide n'est pas négligeable, parfois ν devient très petit après changement d'échelle. Il est donc parfois raisonnable de choisir la viscosité nulle, et nous obtenons alors les équations d'Euler qui régissent le mouvement d'un fluide dit parfait incompressible :

$$\partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p.$$

Dans ce cas, la condition d'adhérence à la paroi doit être remplacée par la condition de glissement au bord : $u\cdot n = 0$ au bord, où n désigne la normale au bord.

De plus, une donnée initiale doit être précisée pour que le problème soit bien-posé.

Définissons enfin la quantité clé dans l'étude de ces équations. Nous désignons par ω le tourbillon qui est le rotationnel du champ de vitesse défini de la manière suivante :

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

Les travaux [8, 9] concernent un certain type de limite singulière pour ces équations. Plus précisément, nous considérons les équations de Navier-Stokes et d'Euler posées à l'extérieur d'une suite d'obstacles de plus en plus fins, qui se rétrécissent vers une courbe. L'objectif est de déterminer l'équation limite.

Nous exposerons donc dans la partie suivante le cas des fluides idéaux en dimension deux autour d'un point [4] et autour d'une courbe [8].

2. Fluides idéaux en dimension deux

Nous nous donnons dans $\mathbb{R}^2$ une famille d'obstacles Ω_ε, réguliers, bornés, ouverts, connexes et simplement connexes qui se contractent quand $\varepsilon\to 0$ vers une courbe. Nous considérons les équations de Navier-Stokes ou d'Euler dans le domaine extérieur $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega_\varepsilon}$. Nous supposons enfin que le tourbillon initial ω_0 est régulier et que son support est un compact qui n'intersecte pas les obstacles.

Ce type de limite singulière dans ces deux situations (fluides idéaux et visqueux) a été étudié dans [4, 5] dans le cas où les obstacles convergent vers un point au lieu d'une courbe. Nous expliquerons les différences notables entre nos résultats et ceux sus-cités.

En dimension deux, le tourbillon ne suffit pas à déterminer de manière unique un champ de vitesse à divergence nulle, tangent au bord $\Gamma_\varepsilon\equiv\partial\Omega_\varepsilon$ et de limite nulle à l'infini. Nous avons besoin en plus de la circulation de la vitesse autour de l'obstacle. Nous fixons alors la circulation de la vitesse initiale γ indépendamment de ε. Nous rappelons alors que pour une géométrie du domaine extérieur donnée, la vitesse initiale est bien uniquement déterminée par ω_0 et γ. Nous utilisons alors les outils de l'analyse complexe pour construire un biholomorphisme T_ε entre Π_ε et l'extérieur du disque unité, ce qui nous permet alors de trouver la forme explicite de la loi de Biot-Savart, loi donnant la vitesse u^ε en fonction de ω^ε et γ :

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t) = K^\varepsilon[\omega(\cdot,t)](x) + a(t)H^\varepsilon(x)$$

avec K^ε et H^ε donnés en fonction de T_ε :

$$K^\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x)\Big(\frac{(T_\varepsilon(x)-T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x)-T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x)-T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x)-T_\varepsilon(y)^*|^2}\Big)$$

et le champ harmonique

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\nabla^\perp \log|T_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x)\Big(\frac{(T_\varepsilon(x))^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2}\Big)$$

où $\alpha(t) = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon}\omega^\varepsilon(x,t)\,dx$. Sachant que la circulation et $\int_{\Pi_\varepsilon}\omega^\varepsilon(x,t)\,dx$ sont des quantités conservées, on peut en fait montrer (voir [4]) que $a(t)$ est constant et vaut donc $a(t) = \gamma + \int \omega_0$.

Le fait de travailler en dimension deux d'espace constitue un avantage car nous disposons de formules explicites dues à l'identification de $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$ et à la théorie de l'analyse complexe. Ces formules explicites sont la clé en ce qui concerne les fluides idéaux car elles nous procurent des estimations a priori et nous travaillons avec la formulation en tourbillon des équations d'Euler qui a la structure d'une équation de transport :

$$\begin{cases} \partial_t\omega^\varepsilon + u^\varepsilon\cdot\nabla\omega^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon\times(0,\infty) \\ u^\varepsilon = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon] + \alpha H^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon\times(0,\infty) \\ \omega^\varepsilon(x,0) = \omega_0(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une solution à un tel problème ont été établies par Kikuchi [6] et l'objectif est donc de déterminer la limite de $(u^\varepsilon,\omega^\varepsilon)$ quand $\varepsilon\to 0$, c'est à dire quand $\Omega_\varepsilon \to \Gamma$.

Le fait que le tourbillon vérifie une équation de transport est en fait fondamental et justifie un tel intérêt mathématiques sur les fluides idéaux en dimension deux. Cette structure nous permet d'affirmer que les normes L^p (pour $p\in[1,\infty]$) sont des quantités conservées, ce qui nous alors directement une estimation et une convergence faible pour les tourbillons. La forme explicite de la loi de Biot-Savart nous permettra alors d'obtenir des estimations a priori sur la vitesse. Pour estimer la vitesse, il nous faut donc étudier le comportement asymptotique des biholomorphismes quand les obstacles se contractent vers un point ou vers une courbe.

C'est argument est vraiment spécifique à Euler en dimension deux. En effet, pour Navier-Stokes en dimension deux, l'équation vérifiée par le tourbillon s'écrit :

$$\partial_t\omega^\varepsilon + u^\varepsilon\cdot\nabla\omega^\varepsilon = \nu\Delta u^\varepsilon$$

ce qui nous assurerait la décroissance des normes L^p du tourbillon si le domaine était $\mathbb{R}^2$, mais nous ne pouvons rien dire dans le cas d'un domaine à bord, tel que Π_ε. Le tourbillon ne vérifiant pas des conditions suffisantes aux bords, les normes L^p peuvent très bien exploser. En fait, dans le cas des fluides visqueux (en dimension deux ou trois) nous utiliserons une inégalité d'énergie qui nous assurera des estimations $L^\infty(L^2)\cap L^2(H^1)$ pour la vitesse. Ce contrôle de la dérivée de la vitesse nous manquant dans le cas des fluides idéaux en dimension trois, aucun résultat n'a encore été établit dans cette dernière situation.

Dans le cas idéal en dimension deux, des estimations a priori de la vitesse, grâce à la loi de Biot-Savart, ont été obtenue par Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes dans [4] dans le cas où l'obstacle se contracte homothétiquement vers un point. Ces auteurs posent $\Omega_\varepsilon \equiv \varepsilon\Omega$, avec Ω un obstacle fixe (régulier, borné, connexe, simplement connexe, contenant 0) et ils définissent alors

$$T_\varepsilon(x) \equiv T(x/\varepsilon),$$

où T est le biholomorphisme entre O^c et D^c. La convergence homothétique vers un point leur évite alors l'étude sur les biholomorphismes que nous devons réaliser dans le cas de la convergence vers une courbe (voir la sous-partie suivante).

2.1. **Analyse complexe.** Nous commençons tout d'abord par construire le biholomorphisme entre l'extérieur de la courbe Γ et l'extérieur du disque unité. En déterminant des propriétés sur cette application, nous en déduirons des propriétés sur la vitesse limite. Après avoir appliqué une homothétie, rotation et translation, nous pouvons supposer que les extrémités de l'arc sont $-1=\Gamma(0)$ et $1=\Gamma(1)$.

Proposition 2.1. *Si Γ est un arc de Jordan C^2, tel que l'intersection avec le segment $[-1,1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \equiv \Gamma^c \to \mathrm{int}\ D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
- *T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ,*
- *DT^{-1} est borné,*
- *T et DT sont continus jusqu'à Γ, avec différentes valeurs de chaque côté de Γ, excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- *DT est borné à l'extérieur du disque $B(0,R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0,R)$,*
- *DT est borné dans $L^p(\Pi\cap B(0,R))$ pour tout $p<4$ et $R>0$.*

Idée de la preuve. Nous étudions dans un premier temps le cas où l'arc est le segment $[-1,1]$. Nous avons dans ce cas une formule explicite pour T. En effet, la fonction de Joukowski

$$G(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$

est un biholomorphisme entre l'extérieur du disque unité et l'extérieur du segment. Elle envoie le cercle $C(0,R)$ sur l'ellipse paramétrée par $\frac{1}{2}(R+1/R)\cos\theta+\frac{1}{2}(R-1/R)i\sin\theta$ avec $\theta\in[0,2\pi)$, et elle envoie le cercle unité sur le segment.

En remarquant que $G(z) = G(1/z)$ nous pouvons conclure que G est aussi un biholomorphisme entre l'intérieur du disque privé de 0 et l'extérieur du segment.

Nous avons donc pour tout $z \notin [-1, 1]$ un unique antécédent de G dans D et un autre dans int D^c. Pour $z \in [-1, 1]$ les antécédents sont $\exp(\pm i \arccos z) = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$. Il y a donc exactement deux antécédents exceptés en -1 et 1. En fait, nous avons considéré que G est un recouvrement de degré deux de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$, ramifié en -1 et 1.

Soit $\tilde{T}$ le biholomorphisme entre l'extérieur du segment et int D^c, tel que $\tilde{T}^{-1} = G$. Alors $\tilde{T}_{\text{int}} = 1/\tilde{T}$ est le biholomorphisme entre l'extérieur du segment et $D \setminus \{0\}$, tel que $\tilde{T}_{\text{int}}^{-1} = G$.

Pour trouver les formules explicites de $\tilde{T}$, il suffit de résoudre un polynôme de degré deux, et nous trouvons :

$$\tilde{T} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

avec $\pm$ à choisir en fonction de la définition de la racine carrée. Dans le cas du segment, $T = \tilde{T}$ et les deux premières propriétés de la proposition sont alors évidentes. Un calcul aisé nous permet d'obtenir une formule explicite pour $\tilde{T}'$:

$$\tilde{T}'(z) = 1 \pm \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}, \tag{2.1}$$

avec le choix du signe qui se fait comme avant. Cette formule nous montre que $D\tilde{T}$ explose aux extrémités comme l'inverse de la racine carrée de la distance, ce qui est borné dans L^p_{loc} pour $p < 4$. De plus, une petite vérification nous montre que T et DT s'étend continûment de chaque coté de Γ, ce qui conclut la proposition dans le cas du segment.

Traitons maintenant le cas général. Pour cela, nous considérons la courbe $\tilde{\Gamma} \equiv G^{-1}(\Gamma)$. Il est alors démontré dans [8] que $\tilde{\Gamma}$ est une courbe de Jordan fermée $C^{1,1}$.

Nous notons alors par $\tilde{\Pi}$ la composante connexe non-bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}$. Nous affirmons ici que nous pouvons construire T_2, un biholomorphisme entre Π et $\tilde{\Pi}$, tel que $T_2^{-1} = G$.

Nous utilisons ensuite le théorème de Riemann qui donne l'existence d'une application conforme F entre $\tilde{\Pi}$ et D^c qui vérifie $F(\infty) = \infty$. Alors $T \equiv F \circ T_2$ envoie bien Π sur D^c. Pour finir cette preuve, nous utilisons le théorème de Kellogg-Warschawski (voir le théorème 3.6 de [14], qui peut être appliqué au domaine extérieur), pour affirmer que F et F' s'étendent continûment jusqu'au bord, car $\tilde{\Gamma}$ est $C^{1,1}$. En rajoutant le fait que DF et DF^{-1} sont bornés à l'infini (voir la remarque 2.2), nous obtenons les mêmes propriétés que dans le cas du segment, en particulier que DT explose aux extrémités de la courbe comme l'inverse de la racine carrée de la distance (voir (2.1)). □

Dans la démonstration de la proposition 2.1, nous passons donc du cas du segment au cas général en appliquant d'abord l'inverse de la fonction de Joukowski puis le théorème de Riemann. Le moyen naturel de cette généralisation aurait été de redresser Γ vers le segment, afin d'appliquer ce qui a été fait dans le cas du segment. Mais pour cela, nous avons besoin d'un redressement de la courbe par une application holomorphe C^∞ jusqu'au bord, ce qui n'est pas établit rigoureusement ! !

Remarque 2.2. Si H est un biholomorphisme de l'extérieur d'un domaine A (ouvert non vide, connexe, simplement connexe) sur D^c, tel que $H(\infty) = \infty$, alors il existe un réel non nul β et une fonction holomorphe $h : A^c \to \mathbb{C}$ telle que :

$$H(z) = \beta z + h(z),$$

avec

$$h'(z) = O\Big(\frac{1}{|z|^2}\Big), \text{ quand } |z| \to \infty.$$

Cette propriété peut être appliquée à F de la démonstration précédente pour remarquer que DF et DF^{-1} sont bornés. Elle peut aussi être appliquée à T car il envoie l'extérieur d'un ouvert non vide sur l'extérieur de $B(0, 2)$.

Nous introduisons alors la famille d'obstacles qui tend vers une courbe. Dans tous les problèmes suivants, nous fixons ω_0 tel que son support soit compact, n'intersectant pas la courbe Γ.

Nous considérons une famille d'obstacles Ω_ε contenant Γ et disjoints du support de ω_0. Si nous notons T_ε le biholomorphisme entre $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ et D^c, nous supposerons que les propriétés suivantes sont vérifiées :

Condition 2.3. *La famille de biholomorphismes* $\{T_\varepsilon\}$ *vérifie*

(i) $\|(T_\varepsilon - T)/|T|\|_{L^\infty(\Pi_\varepsilon)} \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$,

(ii) $\det(DT_\varepsilon^{-1})$ *est bornée sur* D^c *indépendamment de* ε,

(iii) pour tout $R > 0$, $\|DT_\varepsilon - DT\|_{L^3(B(0,R)\cap\Pi_\varepsilon)} \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$,

(iv) pour $R > 0$ *assez grand, il existe* $C_R > 0$ *tel que* $|DT_\varepsilon(x)| \leq C_R$ *sur* $B(0, R)^c$.

(v) pour $R > 0$ *assez grand, il existe* $C_R > 0$ *tel que* $|D^2T_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|}$ *sur* $B(0, R)^c$.

Remarque 2.4. Nous remarquons directement que la propriété (iii) implique que pour tout R, DT_ε est borné dans $L^p(B(0, R)\cap\Pi_\varepsilon)$ indépendamment de ε, pour $p \leq 3$. De plus, la condition (i) nous assure que $T_\varepsilon \to T$ uniformément sur $B(0, R) \cap \Pi_\varepsilon$ pour tout $R > 0$.

Nous donnons maintenant un exemple d'une famille d'obstacles vérifiant l'hypothèse 2.3.

Exemple 2.5. Nous considérons $\Omega_\varepsilon \equiv T^{-1}(B(0, 1 + \varepsilon) \setminus D)$. Dans ce cas, $T_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}T$, ce qui vérifie l'hypothèse précédente. En fait, en se servant de la proposition 2.1, nous avons que $\|DT_\varepsilon - DT\|_{L^p(B(0,R)\cap\Pi_\varepsilon)} \to 0$ pour tout $p < 4$, et en utilisant la remarque 2.2 nous observons que $|DT_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|^2}$ et $|D^2T_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|^3}$ sur $B(0, R)^c$, mais nous n'avons pas besoin d'estimation aussi forte. Si Γ est un segment, alors Ω_ε est l'intérieur d'une ellipse entourant le segment.

Au vu de cet exemple, la condition 2.3 paraît raisonnable, et un projet consisterait à démontrer qu'elle est vérifiée pour une convergence géométrique à déterminer (par exemple par rapport à la distance de Hausdorff) de Ω_ε vers Γ.

Nous notons naturellement $\Gamma_\varepsilon \equiv \partial\Omega_\varepsilon$ et $\Pi_\varepsilon \equiv \text{int }\ \Omega_\varepsilon^c$.

2.2. **Passage à la limite.** Pour obtenir des majorations sur les intégrales qui apparaissent dans la loi de Biot-Savart, nous utilisons un résultat trouvé dans [2].

Lemme 2.6. *Soit $a \in (0,2)$, $S \subset \mathbb{R}^2$ et $h : S \to \mathbb{R}_+$ une fonction de $L^1(S) \cap L^\infty(S)$. Alors*

$$\int_S \frac{h(y)}{|x-y|^a} dy \leq C \|h\|_{L^1(S)}^{1-a/2} \|h\|_{L^\infty(S)}^{a/2}.$$

Grâce à quelques changements de variables et aux majorations de l'hypothèse 2.3, nous pouvons obtenir l'estimation a priori suivante.

Théorème 2.7. *Le champ de vitesse u^ε est borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2_{\text{loc}}(\Pi_\varepsilon))$ indépendamment de ε. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de Γ et des données initiales ($\|\omega_0\|_{L^1}$, $\|\omega_0\|_{L^\infty}$, γ) telle que*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^p(S)} \leq C \|DT_\varepsilon\|_{L^p(S)},$$

pour tout $p \in [1,\infty]$ et pour tout sous-ensemble S de Π_ε.

Nous remarquons ici une nouvelle différence par rapport au cas de la limite vers un point de [4]. Dans leur cas, ils obtiennent des bornes L^∞ de $v^\varepsilon \equiv u^\varepsilon - \gamma H^\varepsilon$. Sachant en plus qu'autour d'un point le support de $\nabla\Phi^\varepsilon$ est de mesure d'ordre ε^2 (avec Φ^ε une fonction troncature d'un ε voisinage de Ω_ε), alors $\|na\Phi^\varepsilon\|_{L^1} = O(\varepsilon)$ et on obtient

$$\operatorname{div}(\Phi^\varepsilon v^\varepsilon) = \nabla\Phi^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \to 0 \text{ fort dans } L^1(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\operatorname{rot}(\Phi^\varepsilon v^\varepsilon) = \nabla^\perp\Phi^\varepsilon \cdot v^\varepsilon + \Phi^\varepsilon\omega^\varepsilon \to \omega \text{ faible dans } L^1(\mathbb{R}^2).$$

Le résultat de convergence des vitesses s'obtient alors par le théorème div-curl.

Ils montrent alors le résultat suivant :

Théorème 2.8. *Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ telle que*

(a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \to u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;

(b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \to \omega$ faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;

(c) le couple limite (u,ω) vérifie au sens faible l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ \operatorname{rot} u = \omega + \gamma\delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ \omega(x,0) = \omega_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec δ_0 la fonction Dirac en 0.

On obtient donc à la limite les équations d'Euler dans tout le plan, auxquelles s'ajoute une masse de Dirac centrée à l'origine. Cette apparition est la réminiscence de la circulation γ non nulle des vitesses initiales autour de l'obstacle, et nous remarquons que ce terme disparaît si $\gamma = 0$.

L'argument précédent est inutilisable dans notre cas, car nous avons qu'une estimation en vitesse dans les L^p pour $p < 4$, et qu'autour d'une courbe la taille du support de $\nabla\Phi^\varepsilon$ est d'ordre ε. En fait, dans le cas de la courbe, nous utiliserons la "convergence" des $T_\varepsilon \to T$ (au sens de l'hypothèse 2.3) et de la convergence faible $\omega_\varepsilon \to \omega$, pour passer directement à la limite dans la loi de Biot-Savart. La démonstration (voir [8]) utilise principalement le théorème de convergence dominé. Nous obtenons alors le théorème suivant.

Théorème 2.9. *Nous avons $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \to u$ fortement dans $L^2_{\rm loc}([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$, avec*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}DT^t(x)\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{(T(x)-T(y))^\perp}{|T(x)-T(y)|^2}-\frac{(T(x)-T(y)^*)^\perp}{|T(x)-T(y)^*|^2}\Big)\omega(y,t)dy+\alpha H(x). \tag{2.2}$$

Le théorème précédent donne une formule explicite de la vitesse en fonction du tourbillon limite. De cette forme explicite ainsi que des propriétés sur le biholomorphisme T (voir proposition 2.1, nous en déduisons alors quelques propriétés sur cette vitesse limite u.

Proposition 2.10. *Soit u donné par le théorème 2.9. Pour t fixé, ce champ de vitesse*

i) est continu sur $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$.
ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma\setminus\{-1;1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ.
iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$, ce qui appartient à $L^p_{\rm loc}$ pour $p<4$.
iv) est tangent à la courbe.

Nous avons donc une limite faible $*$ pour le tourbillon et une limite forte pour la vitesse. Nous regardons alors la relation entre $\operatorname{rot} u$ et ω.

En utilisant la forme explicite de u, nous remarquons tout d'abord que $\operatorname{div} u = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ au sens des distributions. Pour le rotationnel, nous définissons le vecteur tangent et la limite de la vitesse de chaque coté de la courbe. Nous rappelons que la courbe Γ est paramétrée de -1 vers 1. Soit $\overrightarrow{\tau} = \Gamma'/|\Gamma'|$ le vecteur tangent de Γ, u_{up} la limite de $u(\Gamma(s)+\rho\overrightarrow{\tau}^\perp)$ quand $\rho\to 0^+$ et u_{down} la limite quand $\rho\to 0^-$. Après calcul, ob obtient le lemme suivant.

Lemme 2.11. *Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ, γ et ω telle que*

$$\operatorname{rot} u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma,$$

au sens des distributions.

De plus $g_\omega = (u_{down}-u_{up})\cdot\overrightarrow{\tau}$ ce qui correspond au saut de la vitesse à travers la courbe.

Nous pouvons désormais énoncer le théorème principal de [8], décrivant le cas où l'obstacle s'aplatit vers une courbe Γ régulière.

Théorème 2.12. *Il existe une sous-suite $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$ telle que*

(a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \to u$ fortement dans $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)$;
(b) $\Phi^\varepsilon\omega^\varepsilon \to \omega$ faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^4_{\rm loc}(\mathbb{R}^2))$;

(c) u s'exprime explicitement en fonction de ω :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi}DT^t(x)\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{(T(x)-T(y))^\perp}{|T(x)-T(y)|^2}-\frac{(T(x)-T(y)^*)^\perp}{|T(x)-T(y)^*|^2}\Big)\omega(y,t)dy \\ &\quad +(\gamma+\textstyle\int\omega_0)\displaystyle\frac{1}{2\pi}DT^t(x)\frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2} \end{aligned}$$

avec T un biholomorphisme entre l'extérieur de la courbe Γ et l'extérieur du disque unité.

(d) u et ω sont des solutions faibles de $\partial_t\omega + u.\nabla\omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2\times(0,\infty)$.

La forme explicite de la vitesse nous a permis de vérifier que u correspond à un champ de vecteurs à divergence nulle, tangent à la courbe Γ, de limite nulle à l'infini, dont le rotationnel vaut ω sur $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ et dont la circulation autour de Γ vaut γ. Nous avons aussi remarqué que cette vitesse est continue jusqu'à la courbe (mais avec des valeurs différentes de chaque côté de la courbe), sauf aux extrémités où elle explose comme l'inverse de la racine carrée de la distance. La vitesse reste néanmoins bornée dans les $L^p_{\rm loc}$ pour $p<4$. Si nous calculons dans le plan en entier, nous avons obtenu en fait que $\operatorname{rot} u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma$ où δ_Γ est la fonction Dirac sur la courbe Γ, et où la densité g_ω dépend de ω et de la circulation γ. Nous remarquons de plus que g_ω correspond au saut à travers la courbe de la partie tangentielle de la vitesse :

$$g_\omega = (u_{down}-u_{up}).\overrightarrow{\tau}. \tag{2.3}$$

La présence du terme additionnel g_ω dans l'expression du rotationnel de la vitesse, par rapport à l'équation d'Euler dans le plan entier, est en fait nécessaire pour obtenir un champ de vecteurs tangent à la courbe, de circulation γ autour de la courbe.

Si nous supposons que $\gamma=0$, nous voyons un contraste entre [4] et le cas traité ici. Dans le cas d'un petit obstacle, nous ne voyons plus de trace de l'obstacle, alors que dans le cas de l'obstacle fin, $g_\omega\neq 0$. De plus, dans le cas de l'obstacle fin, cette densité dépend du temps. Autrement dit, si le fluide n'est pas dévié par un point, il le sera par une courbe.

Nous trouvons aussi une formulation sur $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ correspondant à l'équation d'Euler à l'extérieur d'une courbe. L'une des conséquences de ce travail est donc l'existence d'une solution faible globale aux équations d'Euler dans un tel domaine.

3. Autres travaux

3.1. **Fluide visqueux en dimension 2 (correspondant à** [9]**).** Comme nous l'avons expliqué au début de la partie précédente, nous fixons en plus du tourbillon initial ω_0 la circulation γ de la vitesse initiale autour de l'obstacle. Ces deux quantités choisies indépendantes de ε suffisent alors pour déterminer un champ de vitesse u_0^ε, à divergence nulle, tangent au bord et de limite nulle à l'infini.

L'existence et l'unicité globales d'une solution aux équations de Navier-Stokes sur les domaines extérieurs sont données par les travaux de Kozono et Yamazaki [7].

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [5] ont considéré le cas où l'obstacle se contracte homothétiquement vers un point. Ils obtiennent qu'à la limite, la vitesse vérifie l'équation de Navier-Stokes dans tout le plan, où la masse de Dirac apparaît uniquement dans la donnée initiale. Ceci provient de la circulation γ des vitesses initiales autour des obstacles, alors que cette circulation est nulle pour les temps strictement positifs (d'après l'hypothèse d'adhérence au bord). Ils utilisent à nouveau le changement de variable $y = x/\varepsilon$ pour travailler sur un domaine fixe.

Dans [9], nous supposons comme dans [8] que la famille d'obstacles converge vers une courbe, et nous utilisons de même la loi de Biot-Savart pour déterminer la limite de la vitesse initiale. Pour une telle donnée initiale (de carré non intégrable à l'infini), nous définissons donc une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'une courbe comme un champ de vitesse qui vérifie les équations dans le sens des distributions, et tel que la différence entre la vitesse et un champ de vecteurs régulier fixe v^ε (se comportant comme $\gamma\frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}$ à l'infini) possède la régularité des solutions de Leray. L'objectif de cet article est de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient ω_0 et γ indépendants de ε comme définis précédemment. Soit u^ε la solution des équations de Navier-Stokes sur $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$ avec pour vitesse initiale u_0^ε, alors $\{Eu^\varepsilon\}$ converge dans $L^2_{\rm loc}([0,\infty)\times(\mathbb{R}^2\setminus\Gamma))$ vers une solution des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ (dans le sens donné précédemment) avec une vitesse initiale :*

$$\begin{aligned} u_0(x) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi}DT^t(x)\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{(T(x)-T(y))^\perp}{|T(x)-T(y)|^2} - \frac{(T(x)-T(y)^*)^\perp}{|T(x)-T(y)^*|^2}\Big)\omega_0(y)dy \\ &\quad +(\gamma + \textstyle\int\omega_0)\displaystyle\frac{1}{2\pi}DT^t(x)\frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2}. \end{aligned}$$

De plus une telle solution (sur $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$) est unique.

Ici Eu^ε désigne l'extension de u^ε sur $\mathbb{R}^2$, valant 0 sur Ω_ε. Le tourbillon initial correspond alors à $\omega_0 + g_{\omega_0}\delta_\Gamma$ sur $\mathbb{R}^2$ (g_{ω_0} défini dans (2.3)).

L'existence de solutions des équations de Navier-Stokes dans des domaines quelconques (en dimension deux ou trois) a été étudiée dans [1] pour des données initiales de carré intégrable, et en dimension trois dans [13] pour des données initiales $H^{\frac12}$. Kozono et Yamazaki [7] ont traité le cas des données dans $L^{2,\infty}$, en dimension deux, mais pour des domaines extérieurs dont les bords sont réguliers. Le théorème énoncé ci-dessus établit l'existence et l'unicité d'une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'une courbe, dans un cas non traité dans les travaux cités. En effet, le résultat de [1] ne peut pas être appliqué car notre donnée initiale n'est pas de carré intégrable à l'infini. De plus, si u_0 vérifie la condition d'existence pour le résultat de Kozono et Yamazaki [7], leur résultat est inutilisable ici car notre domaine $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ n'est pas régulier.

Au contraire des travaux [4, 5, 8], nous ne trouvons hélas pas dans [9] de formulation sur le plan entier. En choisissant ici de regarder une formulation sur $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$, nous étudions les convergences sur les compacts K de cet ensemble. Comme il existe ε_K tel que $K\cap\Omega_\varepsilon=\emptyset$ pour tout $\varepsilon\leq\varepsilon_K$, $\nabla\Phi^\varepsilon$ (Φ^ε est une fonction troncature d'un voisinage de Ω_ε) qui correspond aux effets des bords ne pose plus de problème dans les estimations. La difficulté dans l'étude des équations de Navier-Stokes autour d'une courbe réside dans la présence d'un opérateur du deuxième ordre Δ et le fait que la mesure de Lebesgue de l'ensemble où Φ^ε n'est pas constant est de l'ordre ε. Dans le cas où l'obstacle converge vers un point, cette mesure est de l'ordre ε^2, et donc $\|\Delta\Phi^\varepsilon\|_{L^1}$ est d'ordre 1, alors que dans notre cas, cette norme est d'ordre $1/\varepsilon$. Dans le cas du fluide parfait autour de la courbe, $\|\nabla\Phi^\varepsilon\|_{L^1}$ est aussi d'ordre 1. Cette explosion dans le cas du fluide visqueux autour de la courbe est une réelle difficulté mathématique. Par contre, elle est physiquement intéressante. En effet, le résultat attendu par des ingénieurs de l'INSA Toulouse serait que la vitesse limite vérifierait l'équation suivante :

$$\partial_t u - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u = \nu f m_G - \nabla p^\varepsilon \text{ dans } \mathbb{R}^2\times(0,\infty),$$

où m_G est une mesure concentrée sur la courbe Γ (peut être le Dirac ?) et où f correspond à la force de portance que le fluide visqueux exerce sur la courbe.

Il est donc intéressant de travailler sur l'apparition de ce terme. C'est un problème compliqué car il ne suffit pas de multiplier une fonction test par une fonction troncature et de passer à la limite. Si nous faisons cela, la fonction test ainsi obtenue, qui est bien à support dans $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$, n'est plus à divergence nulle, ce qui pose un problème par rapport au contrôle de la pression. Usuellement, nous raisonnons ainsi : pour une fonction test à divergence nulle $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, nous introduisons sa fonction courant associée ψ telle que $\operatorname{div}\psi = 0$ et $\nabla^\perp\psi=\varphi$ puis nous posons $\varphi_\varepsilon = \nabla^\perp(\Phi^\varepsilon\psi)$ qui est bien à divergence nulle et qui tend vers φ. La condition de divergence nulle fait donc apparaître une dérivée supplémentaire de Φ^ε ce qui signifie une puissance plus élevée de $1/\varepsilon$.

Nous trouvons ainsi, par passage à la limite, une solution à ces équations. Une question naturelle est l'unicité d'une telle solution. Dans le cas des équations de Navier-Stokes en dimension deux, cette question sera traitée à la suite de l'obtention de l'équation. Pour les équations d'Euler en dimension deux, l'équation obtenue par l'aplatissement des obstacles vers une courbe est bien trop compliquée. Par contre, dans le cas où l'obstacle se contracte vers un point P, le problème limite correspond à l'équation d'Euler avec un tourbillon composé d'une partie régulière et d'une masse de Dirac (fixe) concentrée en P. L'étude de l'unicité d'un tel problème nous conduit à travailler sur un problème plus général qui fut introduit par Marchioro et Pulvirenti : unicité de la solution dans le système Euler point vortex, système pouvant être vu comme l'équation d'Euler avec un tourbillon composé d'une partie régulière et d'une somme finie de masses de Dirac (mobiles ou fixes). Ce résultat d'unicité a été établit dans [10] dans le cas où le tourbillon est initialement constant près du point vortex, ce qui est suffisant pour montrer l'unicité dans le problème où l'obstacle se contracte vers un point P car ω_0 a son support disjoint des obstacles (et donc du point P).

3.2. **Fluide visqueux en dimension 3.** A la différence de la dimension deux, la donnée du tourbillon ω_0 suffit pour déterminer de manière unique un champ de vecteurs à divergence nulle, tangent au bord de l'obstacle et de limite nulle à l'infini. Le cas des équations d'Euler semble pour l'instant hors d'atteinte car nous ne pouvons pas obtenir des estimations indépendantes de ε sur le gradient de la vitesse. En effet, en dimension trois, l'équation vérifiée par le tourbillon ne correspond pas à une équation de transport et nous ne pouvons plus dire que les normes L^p du tourbillon sont conservées. A contrario, l'équation de Navier-Stokes permet d'obtenir ce contrôle grâce au terme d'ordre deux $\nu\Delta u$. Kelliher et Iftimie ont regardé dans [3] le cas où l'obstacle se contracte vers un point, et ils ont démontré que nous retrouvons à la limite une vitesse satisfaisant l'équation de Navier-Stokes dans tout l'espace. La limite de la vitesse initiale est alors $u_0 = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} \times \omega_0(y)\, dy$, et nous n'observons plus de trace de l'obstacle, même sur la donnée initiale.

Dans le chapitre 5 de ma thèse, nous nous donnons S, une surface régulière bornée de l'espace, à bord Γ et nous supposons que $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon$ est un domaine extérieur simplement connexe avec un bord C^∞ tel que Ω_ε converge vers S quand $\varepsilon \to 0$ dans le sens suivant : il existe $M > 0$ tel que $\Omega_\varepsilon \subset S+B(0, M\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Nous n'utilisons donc pas ici des propriétés aussi fortes que l'hypothèse de convergence (condition 2.3 donnée dans la partie suivante) dans le cas de la dimension deux. Heureusement car nous n'avons plus d'outil puissant équivalent à l'analyse complexe. Nous n'avons donc plus de forme explicite pour la loi de Biot-Savart. Cette forme explicite était nécessaire dans le cas d'Euler, car nous déduisions la convergence de la vitesse grâce à la convergence faible des tourbillons. Dans [9], la condition 2.3 servait à déterminer précisément la donnée initiale et à estimer la partie harmonique à l'infini v^ε, afin de travailler avec des champs $W^\varepsilon = u^\varepsilon - v^\varepsilon$ de carré intégrable. Ce dernier problème n'existe plus en dimension trois, Π_ε étant simplement connexe, nous n'avons plus de circulation et de partie harmonique. A contrario, nous avons des difficultés à trouver des propriétés sur la donnée initiale limite, telles que l'explosion de la vitesse près du bord. Nous montrons la convergence forte vers un champ de vecteurs qui vérifie l'équation de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface, avec une donnée initiale à divergence nulle et tangente au bord. Mise à part la perte de la forme explicite de la donnée initiale, nous retrouvons donc un résultat équivalent à la courbe en dimension deux (voir [9]). Par conséquent, trois problèmes se présentent tout naturellement à nous :

– pour les même raisons qu'en dimension deux autour d'une courbe, nous aimerions faire apparaître la force de portance qu'exerce un fluide visqueux sur une plaque.
– étudier en détail le comportement de la donnée initiale près de la surface. Dans le cas de la dimension deux, ce comportement est donné grâce à la forme explicite de u_0 (grâce aux outils de l'analyse complexe).
– étudier le cas où l'obstacle se contracte vers une courbe. Nous prouvons dans la thèse la convergence forte dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ de la donnée initiale vers la donnée initiale sans obstacle u_0, mais actuellement, nous ne sommes pas en mesure de montrer que la vitesse limite est une solution faible des équations de Navier-Stokes posées dans tout l'espace $\mathbb{R}^3$.

Références

[1] Chemin J-Y., Desjardins B., Gallagher I. et Grenier E., *Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and to the Navier-Stokes equations*, Oxford University Press, 2006.

[2] Iftimie D., *Evolution de tourbillon à support compact*, Actes du Colloque de Saint-Jean-de-Monts, 1999.

[3] Iftimie D. et Kelliher J., *Remarks on the vanishing obstacle limit for a 3D viscous incompressible fluid*, à paraître dans Proceedings of the AMS.

[4] Iftimie D., Lopes Filho M.C. et Nussenzveig Lopes H.J., *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Small Obstacle*, Comm. Partial Diff. Eqns. 28 (2003), no. 1&2, 349-379.

[5] Iftimie D., Lopes Filho M.C. et Nussenzveig Lopes H.J., *Two Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Small Obstacle*, Math. Annalen. 336 (2006), 449-489.

[6] Kikuchi K., *Exterior problem for the two-dimensional Euler equation*, J Fac Sci Univ Tokyo Sect 1A Math 1983 ; 30(1) :63-92.

[7] Kozono H. et Yamazaki M., *Local and global unique solvability of the Navier-Stokes exterior problem with Cauchy data in the space* $L^{n,\infty}$, Houst. J. Math. **21**(4), 755-799 (1995).

[8] Lacave C., *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, à paraître dans les Annales de l'IHP, Anl (doi :10.1016/j.anihpc.2008.06.004).

[9] Lacave C., *Two Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, à paraître dans Proc. Royal Soc. Edinburgh.

[10] Lacave C. et Miot E., *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is constant near the point vortex*, à paraître dans SIAM, Journal on Mathematical Analysis.

[11] Lopes Filho M.C., *Vortex dynamics in a two dimensional domain with holes and the small obstacle limit*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 39(2)(2007) : 422-436.

[12] Marchioro C. et Pulvirenti M., *On the vortex-wave system*, Mechanics, analysis, and geometry : 200 years after Lagrange, M. Francaviglia (ed), Elsevier Science, Amsterdam, 1991.

[13] Monniaux S., *Navier-Stokes Equations in Arbitrary Domains : the Fujita-Kato Scheme*, Math. Res. Lett. 13 (2006), no. 3, 455-461.

[14] Pommerenke C., *Boundary behaviour of conformal maps*, BerlinNew York : Springer-Verlag, 1992.

(C. Lacave) Université de Lyon, Université Lyon 1, INSA de Lyon, F-69621, Ecole Centrale de Lyon, CNRS, UMR 5208 Institut Camille Jordan, Batiment du Doyen Jean Braconnier, 43, blvd du 11 novembre 1918, F - 69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: `lacave@math.univ-lyon1.fr`