

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2008-2009**

David Gérard-Varet et Emmanuel Dormy

**Sur l'équation de Prandtl**

*Séminaire É. D. P.* (2008-2009), Exposé n° XXI, 10 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2008-2009\\_\\_\\_\\_A21\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A21_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Sur l'équation de Prandtl

\*David Gérard-Varet, †Emmanuel Dormy

## Résumé

L'objet de cette note est le problème de Cauchy pour l'équation de Prandtl, dans des espaces de régularité Sobolev. Nous discutons de façon synthétique des résultats récents [4], établissant le caractère fortement linéairement mal posé de ce problème.

## 1 Motivation

L'équation de Prandtl intervient dans un problème fondamental de mécanique des fluides : comprendre la limite non-visqueuse des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Il s'agit de déterminer le comportement asymptotique des solutions  $\mathbf{u}^\nu$  de cette équation, lorsque le coefficient de viscosité  $\nu$  tend vers zéro. En particulier, on souhaite savoir si les valeurs d'adhérence de la suite  $\mathbf{u}^\nu$  (dans des espaces fonctionnels appropriés) satisfont l'équation d'Euler.

Ce problème asymptotique s'avère extrêmement difficile lorsque le domaine  $\Omega$  a des bords. La difficulté essentielle vient des conditions aux limites satisfaites par le champ  $\mathbf{u}^\nu$  à  $\partial\Omega$ . Pour  $\nu \neq 0$  (Navier-Stokes), le fluide adhère à la paroi, ce qui se traduit par une condition de Dirichlet

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Mais pour  $\nu = 0$  (Euler), cette condition est trop forte et doit être relaxée, typiquement en une condition de non-pénétration :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ . Cette relaxation se traduit par un phénomène de concentration de  $\mathbf{u}^\nu$ , près de  $\partial\Omega$ , lorsque  $\nu \rightarrow 0$ . Ce phénomène, dit de *couche limite*, et son impact sur la limite  $\nu \rightarrow 0$ , restent à ce jour très mal compris.

La principale tentative de description de la couche limite remonte à Ludwig Prandtl [10]. Considérons pour simplifier un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Localement près du bord, on peut introduire :

- une paramétrisation tubulaire  $(x, y)$ , *i.e.* telle que

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(x) + y \mathbf{n}(x),$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ ,  $x$  abscisse curviligne, et  $y > 0$ .

---

\*DMA/CNRS, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris

†ENS/IPGP/CNRS, Ecole Normale Supérieure, 29 rue Lhomond, 75005 Paris

– la base de Frénet  $(\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x))$ , dans laquelle la solution  $\mathbf{u}^\nu$  s'écrit

$$\mathbf{u}^\nu(t, \mathbf{x}) = u^\nu(t, x, y) \mathbf{t}(x) + v^\nu(t, x, y) \mathbf{n}(x).$$

Prandtl propose dans [10] un développement asymptotique double échelle du champ de vitesses, sous la forme

$$\begin{aligned} u^\nu(t, x, y) &\approx u^0(t, x, y) + u^{cl}(t, x, y/\sqrt{\nu}), \\ v^\nu(t, x, y) &\approx v^0(t, x, y) + \sqrt{\nu} v^{cl}(t, x, y/\sqrt{\nu}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Selon ce développement, le champ de vitesses se décompose en

- une partie régulière  $\mathbf{u}^0 = u^0 \mathbf{t} + v^0 \mathbf{n}$ , solution de l'équation d'Euler,
- une partie singulière, décrite par  $(u^{cl}, v^{cl}) = (u^{cl}, v^{cl})(t, x, Y)$ , dont les variations sont localisées près du bord, sur une épaisseur que Prandtl suppose d'ordre  $\sqrt{\nu}$  conformément au scaling parabolique de l'équation.

Formellement, en injectant l'Ansatz (1.3) dans les équations (1.1), on obtient l'équation que doit vérifier le correcteur  $(u^{cl}, v^{cl})$ . Précisément, le champ

$$\begin{aligned} u(t, x, Y) &:= u^0(t, x, 0) + u^{cl}(t, x, Y), \\ v(t, x, Y) &:= Y \partial_y v^0(t, x, 0) + v^{cl}(t, x, Y), \end{aligned}$$

satisfait la fameuse *équation de Prandtl*

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_Y u - \partial_Y^2 u = (\partial_t u^0 + u^0 \partial_x u^0)|_{y=0}, & Y > 0, \\ \partial_x u + \partial_Y v = 0, & Y > 0, \\ (u, v)|_{Y=0} = (0, 0), & \lim_{Y \rightarrow +\infty} u = u^0|_{y=0}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Notons que la courbure de  $\partial\Omega$  n'intervient pas explicitement dans l'équation. Elle y intervient cependant de manière indirecte, à travers les propriétés de  $u^0$ , et à travers le domaine de définition de  $x$ . A notre connaissance, 3 types de domaines ont été jusqu'ici étudiés :  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{T}$ , et  $x \in (0, L)$ . Les deux premiers sont adaptés à la description de phénomènes locaux en  $x$ . Le choix  $x \in \mathbb{T}$  permet aussi de modéliser l'extérieur d'obstacles convexes. Enfin, le domaine  $(0, L)$  convient à l'étude d'écoulements autour d'obstacles fins :  $x = 0$  correspond alors à une extrémité de l'obstacle, et on complète l'équation par la donnée de  $u|_{x=0}$  (outre une condition initiale à  $t = 0$ ).

Bien que l'asymptotique proposée par Prandtl paraisse naturelle, sa pertinence prête à discussion. Comme souligné par Prandtl lui-même, il est peu probable que l'Ansatz (1.3) soit valide uniformément en espace-temps : la principale raison est le phénomène de *détachement de la couche limite*, cf figure 1 . Néanmoins, l'équation de Prandtl semble être un bon modèle en amont du détachement, et demeure centrale en hydrodynamique [6]. Comprendre mieux son domaine de validité revêt donc un enjeu considérable.

D'un point de vue mathématique, deux problèmes se posent : d'une part, le caractère bien posé de l'équation (1.4), et d'autre part la justification du développement (1.3). Ces deux problèmes dépendent beaucoup des cadres fonctionnels considérés. A notre connaissance, l'équation de Prandtl a été résolue dans deux cadres :

1. Pour  $(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  et des données analytiques en  $x$ , l'équation est bien posée localement en temps : nous renvoyons à [11, 8] pour des énoncés précis.

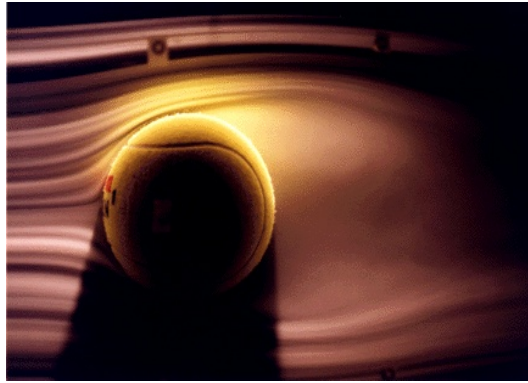


FIG. 1 – Le phénomène de détachement de couche limite.

2. Pour  $(x, Y) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+$  et des données monotones en  $y$ , l'équation est bien posée localement en temps, et même globalement sous de bonnes hypothèses sur le terme source de (1.4a) : cf [9, 13]. Si l'hypothèse de monotonie n'est pas vérifiée, on peut en revanche trouver des solutions régulières qui explosent en temps fini [3].

La justification de (1.3), et plus généralement de la convergence des solutions de Navier-Stokes vers Euler n'a été établie que sous des hypothèses d'analyticité en  $x$  et  $Y$  [12]. La régularité analytique permet en particulier de filtrer les oscillations en  $x$ . Or ces oscillations peuvent créer des instabilités, invisibles à l'asymptotique "anisotrope" de type Prandtl. C'est ainsi le cas des instabilités de Rayleigh [2]. En exploitant ce phénomène, E. Grenier a montré dans [5] que l'asymptotique (1.3) n'est pas valable dans  $H^1$ . La question de sa validité dans  $L^p$ , ou en l'absence d'instabilités de Rayleigh, subsiste.

De façon plus fondamentale, savoir si l'équation de Prandtl est bien posée dans des espaces "standard", par exemple de type Sobolev, est resté jusqu'ici un problème ouvert. Nous décrivons dans la suite les principales difficultés de ce problème, et la réponse (partielle) que nous lui avons apporté dans [4]. Nous terminons cette note par une brève évocation de questions en suspens.

## 2 Résultats Mathématiques

Nous considérons ici le cas  $(x, Y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{u}^0(t, x, 0) = (0, 0)$ . Nos résultats se généralisent au cas  $\mathbf{u}^0(t, x, 0) = (cst, 0)$ , c'est-à-dire aux solutions d'Euler ayant un glissement constant au bord du domaine. Notant  $y$  au lieu de  $Y$ , l'équation devient

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_y^2 u = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ (u, v)|_{y=0} = (0, 0), & \lim_{y \rightarrow +\infty} u = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On cherche à déterminer si cette équation est bien ou mal posée, pour des données initiales de type Sobolev.

Avant même toute démonstration mathématique, avoir une intuition de la bonne réponse s'avère délicat. Concrètement, la difficulté vient de l'absence d'estimation sur le système

linéarisé. Considérons le cas particulier de solutions de la forme  $(u, v) = (U(t, y), 0)$ . La composante horizontale vérifie  $\partial_t U - \partial_y^2 U = 0$ ,  $U|_{y=0}$ . L'équation linéarisée s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u + U \partial_x u + v \partial_y U - \partial_y^2 u = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ (u, v)|_{y=0} = (0, 0), & \lim_{y \rightarrow +\infty} u = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Une estimation  $L^2$  standard fait apparaître le terme  $\int v \partial_y U u$ . Or  $v$  étant obtenu *via* la contrainte de divergence nulle, ce terme est potentiellement aussi mauvais que  $\int |\partial_x u| |u|$ .

Une analyse symbolique semble confirmer cette “perte de dérivée en  $x$ ”. Précisément, le gel des coefficients de (2.2), et la recherche des solutions en ondes planes du type

$$(u, v) = e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)} (\hat{u}, \hat{v}), \quad (\hat{u}, \hat{v}) \neq 0$$

impliquent la relation de dispersion

$$\omega = k_x U + i \partial_y U \frac{k_x}{k_y} - i k_y^2.$$

Cette relation suggère le caractère fortement mal posé de l'équation pour des données Sobolev en  $x$ . Mais cette analyse est inadéquate. Une façon de s'en convaincre est de considérer une version simplifiée de (2.2), où l'on néglige à la fois la diffusion verticale et les variations en temps du profil ( $U(t, y) = U_s(y)$ ) : le système devient

$$\begin{cases} \partial_t u + U \partial_x u + v \partial_y U = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ v|_{y=0} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

De nouveau, une analyse à coefficients gelés aboutit à une “mauvaise” relation de dispersion. Mais dans ce cadre très simplifié, un calcul explicite est possible, et fournit pour une donnée initiale  $u_0$  la solution

$$u(t, x, y) = u_0(x - U_s(y)t, y) + t \partial_y U_s(y) \int_0^y \partial_x u_0(x - U_s(z)t, z) dz.$$

On établit à partir de cette formule le caractère faiblement bien posé de l'équation dans des espaces de régularité Sobolev en  $x$ , faiblement au sens où il y a perte finie de dérivées par rapport à la donnée initiale.

Au niveau non-linéaire, la version non-diffusive de l'équation de Prandtl, c'est-à-dire (1.4) ou (2.1) sans le terme  $\partial_y^2 u$ , s'avère également résoluble pour des données Sobolev ou  $C^k$ , par la méthode des caractéristiques. Nous renvoyons à l'article [7], pour une étude approfondie de l'équation non-diffusive.

Au vu de cette analyse sans diffusion, il est naturel de croire au caractère bien posé de l'équation complète de Prandtl. En fait, *nous montrons dans [4] que le système (2.1) est fortement linéairement mal posé*. En bref, nous mettons en évidence un mécanisme de forte instabilité. Ce mécanisme met en jeu la diffusion verticale et les points critiques (en  $y$ ) du champ de vitesses. En particulier, les résultats de [4] ne sont pas en contradiction avec les résultats positifs obtenus sans diffusion ou pour des données monotones.

Nous en venons maintenant à une description plus précise de ces résultats. Nous considérons de nouveau l'équation linéarisée (2.2). Pour simplifier l'exposition, toutes les fonctions considérées seront exponentiellement décroissantes en  $y$  : cela nous amène à introduire l'espace

$$L_{exp}^{\infty} := \left\{ f = f(y), \quad \sup_y |e^y f(y)| < +\infty \right\}.$$

Nous introduisons également des espaces de fonctions de  $(x, y)$  analytiques en  $x$  : pour tout  $\beta > 0$ ,

$$E_{\beta} := \left\{ u = u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^k(y) e^{ikx}, \quad \|\hat{u}^k\|_{L_{exp}^{\infty}} \leq C_{\beta} e^{-\beta|k|}, \quad \forall k \right\}.$$

Ces espaces donnent un cadre dans lequel l'équation est bien posée, comme le montre la proposition (facile) suivante :

**Proposition 1 (Caractère bien posé en analytique)**

*On suppose  $\partial_y^k U \in C^0(\mathbb{R}_+; L_{exp}^{\infty})$ ,  $k = 0, 1$ . Il existe  $\rho > 0$  tel que : pour tout  $T$  avec  $\beta - \rho T > 0$ , et tout  $u_0 \in E_{\beta}$ , (2.2) a une unique solution*

$$u \in C([0, T]; E_{\beta - \rho T}), \quad u(t, \cdot) \in E_{\beta - \rho t}, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

On note  $T(t, s)$  l'opérateur solution associé :  $T(t, s)u_0 := u(t, \cdot)$ ,  $u|_{t=s} = u_0$ .

Notre but est d'étudier l'équation de Prandtl dans les espaces de type Sobolev en  $x$  :

$$H^m := H^m(\mathbb{T}_x; L_{exp}^{\infty}), \quad m \geq 0.$$

Notons que les espaces  $E_{\beta}$  sont denses dans les  $H^m$ , ce qui rend naturelle la notation suivante : pour tout  $T \in \mathcal{L}(E_{\beta}, E_{\beta'})$ ,  $m_1, m_2 \geq 0$ ,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H^{m_1}, H^{m_2})} := \sup_{u_0 \in E_{\beta}} \frac{\|T u_0\|_{H^{m_2}}}{\|u_0\|_{H^{m_1}}} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

En particulier,  $\|T\|_{\mathcal{L}(H^{m_1}, H^{m_2})}$  est fini si  $T$  se prolonge en un opérateur continu de  $H^{m_1}$  dans  $H^{m_2}$ . Le théorème principal de [4] est le :

**Théorème 1 (caractère mal posé en Sobolev)**

*i) On suppose  $\partial_y^k U \in C^0(\mathbb{R}_+; L_{exp}^{\infty})$ ,  $k \leq 4$ . On suppose aussi que  $U(0, y)$  a un point critique non-dégénéré. Alors, il existe  $\sigma > 0$ , tel que pour tout  $\delta > 0, m \geq 0$*

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq \delta} \|e^{-\sigma(t-s)\sqrt{|\partial_x|}} T(t, s)\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m-\mu})} = +\infty, \quad \forall \mu \in [0, 1/2).$$

*ii) De plus, on peut trouver  $U$  et  $\sigma$  tels que : pour  $t \delta > 0, m \geq 0$*

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq \delta} \|e^{-\sigma(t-s)\sqrt{|\partial_x|}} T(t, s)\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m-\mu})} = +\infty, \quad \forall \mu \geq 0.$$

Traduit de façon informelle et un peu approximative, ce théorème exprime qu'il existe des solutions périodiques en  $x$  dont le  $k$ -ième mode de Fourier croît comme  $e^{\delta\sqrt{k}t}$ . En particulier, cette instabilité rend le problème fortement mal posé dans des espaces de type Sobolev.

### 3 Quelques idées de preuve

La preuve du théorème 1 comporte 3 étapes.

1. On mène d'abord une analyse haute fréquence (tangentielle) de (2.2). Concrètement, cette analyse passe par la construction d'un quasimode, sous forme d'un développement de type WKB. Elle permet de réduire le problème d'instabilité à un problème spectral pour un opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}$ .
2. On résout ensuite ce problème spectral.
3. Une fois un quasimode instable construit, on utilise la formule de Duhamel pour en déduire le théorème.

#### 3.1 Analyse WKB

Nous donnons ici quelques éléments de compréhension de l'analyse haute fréquence de (2.2). Pour clarifier l'exposition, nous négligeons les variations en temps de  $U : U(t, y) = U_s(y)$ . Nous renvoyons à [4] pour le traitement de la dépendance temporelle. Avec cette simplification, le système (2.2) est à coefficients constants en  $(t, y)$ , et nous cherchons des solutions haute fréquence sous la forme

$$\begin{cases} u(t, x, y) = i e^{i \frac{\omega(\varepsilon)t+x}{\varepsilon}} v'_\varepsilon(y), \\ v(t, x, y) = \varepsilon^{-1} e^{i \frac{\omega(\varepsilon)t+x}{\varepsilon}} v_\varepsilon(y), \quad \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

Le système se réécrit alors comme une équation différentielle du troisième ordre sur  $v_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} (\omega(\varepsilon) + U_s)v'_\varepsilon - U'_s v_\varepsilon + i\varepsilon v_\varepsilon^{(3)} = 0, & y > 0, \\ v_\varepsilon|_{y=0} = 0, & v'_\varepsilon|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'étude des hautes fréquences en  $x$  conduit à un problème de perturbation singulière en  $y$ .

Comme précédemment, il est utile d'étudier d'abord le système sans diffusion, correspondant à (2.3) :

$$\begin{cases} (\omega + U_s)v' - U'_s v = 0, & y > 0, \\ v|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Ce système se prête à des calculs explicites : en particulier, il existe une famille à un paramètre d'éléments propres, donnés par :

$$\omega = \omega_a := -U_s(a), \quad v = v_a := H(y - a)U_s - U_s(a), \quad a > 0,$$

où  $H$  dénote la fonction de Heaviside. On peut noter que les vecteurs propres  $v_a$  satisfont aussi la condition supplémentaire  $v'_a|_{y=0} = 0$ . D'autre part, la régularité de  $v_a$  change selon que  $a$  est ou non point critique de  $U_s$ . Remarquons aussi que  $\omega_a \in \mathbb{R}$ , ce qui de retour aux solutions de (2.3), fournit des solutions oscillant comme  $e^{i\omega_a t/\varepsilon}$ .

L'enjeu est alors de comprendre l'effet de la perturbation singulière  $i\varepsilon v_\varepsilon^{(3)}$  sur ces oscillations rapides. De ce point de vue, *le problème présente une forte analogie avec la limite*

*incompressible des équations de Navier-Stokes en domaine borné*, telle qu'étudiée dans [1]. Dans ce dernier cadre, les oscillations haute fréquence sont les ondes acoustiques, de la forme  $e^{i\lambda_k t/\varepsilon}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et la perturbation singulière est la diffusion visqueuse dans Navier-Stokes. Comme montré dans [1], la diffusion induit dans ce cadre une correction d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  de  $\lambda_k$ , de partie imaginaire positive. Ce phénomène, dû à la formation d'une couche limite près du bord du domaine, donne un amortissement exponentiellement rapide des ondes, sur des temps d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Dans le cas de Prandtl, nous montrons essentiellement la chose suivante : lorsque  $a$  est un point critique non-dégénéré de  $U_s$ ,  $\omega_a$  subit une correction d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ , mais de partie imaginaire négative. Ce phénomène provoque donc une croissance exponentielle des solutions, sur des temps d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ . Ce mécanisme est responsable du caractère mal posé de l'équation.

En pratique, on introduit  $y_c$  un point critique non-dégénéré de  $U_s$  :  $U'_s(y_c) = 0$ , et par exemple  $U''_s(y_c) < 0$ . Le quasimode instable est cherché sous la forme suivante : pour la "valeur propre", un développement du type

$$\omega(\varepsilon) \approx -U_s(y_c) + \sqrt{\varepsilon}\tau,$$

et pour le "vecteur propre", un développement du type

$$v_\varepsilon(y) \approx H(y - y_c) (U_s(y) - U_s(y_c) + \sqrt{\varepsilon}\tau) + \sqrt{\varepsilon}V \left( \frac{y - y_c}{\varepsilon^{1/4}} \right).$$

Ce dernier développement est constitué

- d'une partie grande échelle, solution modulo  $O(\varepsilon)$  loin de  $y = y_c$ ,
- d'une partie "couche de cisaillement", localisée près de  $y = y_c$ , qui compense les discontinuités de la partie grande échelle.

Formellement, le profil de cisaillement  $V = V(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$  satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \left( \tau + U''_s(y_c) \frac{z^2}{2} \right) V' - U''_s(y_c) z V + i V^{(3)} = 0, & z \neq 0, \\ [V]_{|z=0} = -\tau, & [V']_{|z=0} = 0, & [V'']_{|z=0} = -U''(a), \\ \lim_{\pm\infty} V = 0. \end{cases}$$

Pour  $\tau$  arbitrairement fixé, il s'agit d'un système *a priori* surdéterminé. En particulier, on prouve dans [4] que pour  $\tau = 0$ , ce système n'admet pas de solution. *L'idée est qu'il existe un couple  $(\tau, V)$  avec  $\text{Im } \tau < 0$  satisfaisant ce système.* La condition  $\text{Im } \tau < 0$  donne l'instabilité expliquée plus haut.

Poursuivant l'analyse de [4], on peut simplifier ce problème *via* les changements de variables

$$\begin{aligned} V(z) &= \left( \tau + U''_s(y_c) \frac{z^2}{2} \right) W(z) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \left( \tau + U''_s(y_c) \frac{z^2}{2} \right), \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} |U''(y_c)|^{1/2} \tau', & z &= 2^{1/4} |U''_s(y_c)|^{-1/4} z'. \end{aligned}$$

La construction du quasimode instable se ramène alors au problème spectral suivant :



(PS) : Trouver  $\tau \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Im } \tau < 0$ , et une solution  $W$  de

$$(\tau - z^2)^2 \frac{d}{dz} W + i \frac{d^3}{dz^3} ((\tau - z^2)W) = 0, \quad (3.1)$$

telle que  $\lim_{z \rightarrow -\infty} W = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow +\infty} W = 1$ .

La résolution de ce problème est abordée dans le paragraphe suivant.

### 3.2 Analyse spectrale

L'équation (3.1) est une équation du second ordre sur  $X = W'$  :

$$i(\tau - z^2)X'' - 6izX' + ((\tau - z^2)^2 - 6i)X = 0. \quad (3.2)$$

Pour montrer l'existence de solutions  $(\tau, X)$  de cette équation, nous introduisons d'abord le problème aux valeurs propres :

$$Au := \frac{1}{z^2 + 1}u'' + \frac{6z}{(z^2 + 1)^2}u' + \frac{6}{(z^2 + 1)^2}u = \alpha u$$

Nous prouvons dans [4] la proposition suivante

**Proposition 2**  $A : D(A) \mapsto \mathcal{L}^2$  est autoadjoint, avec

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in \mathcal{H}^1, Au \in \mathcal{L}^2\}, \\ \mathcal{L}^2 &:= \left\{ u \in L^2_{loc}, \int_{\mathbb{R}} (z^2 + 1)^4 |u|^2 < +\infty \right\}, \\ \mathcal{H}^1 &:= \left\{ u \in H^1_{loc}, \int_{\mathbb{R}} (z^2 + 1)^4 |u|^2 + \int_{\mathbb{R}} (z^2 + 1)^3 |u'|^2 < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

De plus,  $A$  admet une valeur propre  $\alpha$  strictement positive.

*Preuve de la proposition* : Le caractère autoadjoint de  $A$  est facile à établir. Pour l'existence d'une valeur propre positive, on remarque que  $Au = A_1u + A_2u$ , avec

$$A_1u := \frac{1}{z^2 + 1}u'' + \frac{6z}{(z^2 + 1)^2}u',$$

autoadjoint négatif dans  $\mathcal{L}^2$ , et

$$A_2u := \frac{6}{(z^2 + 1)^2}u$$

autoadjoint et  $A_1$ -compact. En particulier,  $\Sigma_{ess}(A) = \Sigma_{ess}(A_1) \subset \mathbb{R}_-$ . De plus,  $(Au, u) > 0$  pour  $u(z) = e^{-2z^2}$ , cqfd.

Une fois cette proposition démontrée, des changements de variables permettent d'obtenir un couple  $(\tilde{\tau}, Y)$  avec  $\tilde{\tau} = -\sqrt{\alpha} < 0$ , et

$$(\tilde{\tau} - z^2)Y'' - 6zY' + ((\tilde{\tau} - z^2)^2 - 6)Y = 0.$$

Formellement, cette équation ressemble à (3.2) (à des facteurs  $i$  près). Pour obtenir (3.2), on utilise la

**Proposition 3**  $Y$  admet une extension holomorphe, encore solution, dans

$$U_\tau := \mathbb{C} \setminus \left( ]-i\infty, -i|\tau|^{1/2}] \cup [i|\tau|^{1/2}, +i\infty[ \right).$$

De plus, dans les secteurs  $\arg z \in (-\pi/4+\delta, \pi/4-\delta)$ , et  $\arg z \in (3\pi/4+\delta, 5\pi/4-\delta)$ ,  $\delta > 0$ ,

$$|Y(z)| \leq C_\delta \exp(-z^2/4).$$

Cette proposition découle de résultats classiques d'analyse complexe. On peut même obtenir dans chacun des secteurs un développement asymptotique de la solution pour  $|z| \rightarrow +\infty$ . Cela permet de définir

$$X(z) := Y(e^{-i\pi/8}z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

On vérifie alors que le couple  $(\tau := e^{i\pi/4}\tilde{\tau}, X)$  est solution de (3.2) avec  $\text{Im } \tau < 0$ , et  $X$  qui tend vers zéro en  $\pm\infty$ .

Pour conclure la résolution du problème spectral, on vérifie que  $\int_{\mathbb{R}} X \neq 0$ , ce qui permet d'introduire  $W(z) = \left(\int_{\mathbb{R}} X\right)^{-1} \int_{-\infty}^z X$ . Nous renvoyons à [4] pour tous les détails.

### 3.3 Conclusion et perspectives

Sur la base de l'analyse précédente, il est possible de construire une suite de solutions approchées  $u^{\varepsilon,app}$  de (2.2), exponentiellement instables. Plus précisément, il s'agit de solutions approchées de la forme :

$$u^{\varepsilon,app} = e^{ix/\varepsilon} U^{\varepsilon,app}(t, y), \quad ce^{\sigma_0 t/\sqrt{\varepsilon}} \leq \|U^{\varepsilon,app}(t, \cdot)\|_{L_{exp}^\infty} \leq C e^{\sigma_0 t/\sqrt{\varepsilon}}.$$

Par "solutions approchées", on signifie qu'elles vérifient

$$u^{\varepsilon,app}(t, \cdot) = T(t, 0) u^{\varepsilon,app}(0, \cdot) + \int_0^t T(t, s) r_{app}^\varepsilon(s, \cdot) ds. \quad (3.3)$$

pour un "petit" reste  $r_{app}^\varepsilon = e^{ix/\varepsilon} R^{\varepsilon,app}(t, y)$ . Concrètement, nous parvenons à construire des approximations satisfaisant

- $\|R^{\varepsilon,app}(t, \cdot)\| \leq C e^{\sigma_0 t/\sqrt{\varepsilon}}$  sans hypothèse supplémentaire sur  $U$ .
- $\|R^{\varepsilon,app}(t, \cdot)\| \leq C_N(\varepsilon^N + t^N) e^{\sigma_0 t/\sqrt{\varepsilon}}$ , pour tout  $N$ , pour certains profils  $U$ .

Le théorème découle de ces estimations, et de l'utilisation de la formule de Duhamel (3.3). Nous renvoyons à [4] pour tous les détails. L'article contient également des illustrations numériques de l'instabilité : en particulier, cette solution WKB instable est observée sans ambiguïté dans les simulations directes de l'équation (2.2).

Parmi les questions en suspens, se pose celle d'une extension non-linéaire de ce résultat linéarisé. La méthode développée par E. Grenier dans [5] n'est pas facilement applicable, car elle nécessite des bornes non-triviales sur  $T(t, s)$ . Une autre perspective intéressante serait d'invalider l'asymptotique de Prandtl dans  $L^p$ , en s'appuyant sur l'instabilité décrite ici. Enfin, un grand problème ouvert consiste à valider (ou invalider) la théorie de Prandtl pour des données monotones et sans instabilité de Rayleigh.

## Références

- [1] DESJARDINS, B., GRENIER, E., LIONS, P.-L., AND MASMOUDI, N. Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions. *J. Math. Pures Appl. (9)* 78, 5 (1999), 461–471.
- [2] DRAZIN, P. G., AND REID, W. H. *Hydrodynamic stability*, second ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. With a foreword by John Miles.
- [3] E, W., AND ENGQUIST, B. Blowup of solutions of the unsteady Prandtl’s equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 50, 12 (1997), 1287–1293.
- [4] GÉRARD-VARET, D., AND DORMY, E. On the ill-posedness of the Prandtl equation. Submitted. Available at <http://www.dma.ens.fr/dgerardv>.
- [5] GRENIER, E. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 53, 9 (2000), 1067–1091.
- [6] GUYON, E., HULIN, J., AND PETIT, L. *Hydrodynamique physique*, vol. 142 of *EDP Sciences*. CNRS Editions, Paris, 2001.
- [7] HONG, L., AND HUNTER, J. K. Singularity formation and instability in the unsteady inviscid and viscous Prandtl equations. *Commun. Math. Sci.* 1, 2 (2003), 293–316.
- [8] LOMBARDO, M. C., CANNONE, M., AND SAMMARTINO, M. Well-posedness of the boundary layer equations. *SIAM J. Math. Anal.* 35, 4 (2003), 987–1004 (electronic).
- [9] OLEINIK, O. A., AND SAMOKHIN, V. N. *Mathematical models in boundary layer theory*, vol. 15 of *Applied Mathematics and Mathematical Computation*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [10] PRANDTL, L. Über flüssigkeits-bewegung bei sehr kleiner reibung. In *Actes du 3ème Congrès international des Mathématiciens, Heidelberg*. Teubner, Leipzig, 1904, pp. 484–491.
- [11] SAMMARTINO, M., AND CAFLISCH, R. E. Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space. I. Existence for Euler and Prandtl equations. *Comm. Math. Phys.* 192, 2 (1998), 433–461.
- [12] SAMMARTINO, M., AND CAFLISCH, R. E. Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space. II. Construction of the Navier-Stokes solution. *Comm. Math. Phys.* 192, 2 (1998), 463–491.
- [13] XIN, Z., AND ZHANG, L. On the global existence of solutions to the Prandtl’s system. *Adv. Math.* 181, 1 (2004), 88–133.