

SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2006-2007

Karel Pravda-Starov

Sur le pseudo-spectre de certaines classes d'opérateurs pseudo-différentiels non auto-adjoints

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° XV, 33 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A15_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

SUR LE PSEUDO-SPECTRE DE CERTAINES CLASSES D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS NON AUTO-ADJOINTS

Karel PRAVDA-STAROV

University of California, Berkeley

Résumé. Nous nous intéressons dans cet exposé à l'étude des propriétés pseudo-spectrales de deux classes particulières d'opérateurs pseudo-différentiels non auto-adjoints. La première de ces deux classes est en fait seulement une classe d'opérateurs différentiels. Il s'agit de la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques, i.e. la classe des opérateurs définis en quantification de Weyl par un symbole qui est une forme quadratique elliptique à valeurs complexes. Nous nous proposons d'expliquer dans cet exposé quelles sont les propriétés microlocales qui régissent les phénomènes de stabilité ou d'instabilité spectrale qui apparaissent dans cette classe d'opérateurs sous l'effet de petites perturbations. Nous considérerons ensuite une « vraie » classe d'opérateurs pseudo-différentiels en étudiant les phénomènes qui se produisent lorsque la hessienne du symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel, prise en un point critique, définit un opérateur différentiel quadratique elliptique non normal. Il s'agira ainsi d'étudier ce qu'il reste des phénomènes d'instabilité spectrale observés dans la première partie de cet exposé pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux, lorsque l'on considère des opérateurs pseudo-différentiels qui peuvent être localement « approximés » par de tels opérateurs.

1. INTRODUCTION

1.1. Pseudo-spectre et instabilités spectrales. Depuis une dizaine d'années, il y a eu dans le domaine des mathématiques numériques un vif intérêt porté à l'étude de la notion de pseudo-spectre. Le développement de cette notion s'explique par le fait que dans un certain nombre de problèmes d'ingénierie mathématique où interviennent naturellement des opérateurs non auto-adjoints, on note de sensibles différences entre d'un côté les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale de ces opérateurs, et d'un autre côté les résultats obtenus par simulation numérique. Ce constat originel laisse penser que dans certains cas, la connaissance seule du spectre d'un opérateur ne permet pas de comprendre suffisamment son action. C'est ainsi que pour suppléer à cet apparent manque d'information contenu dans le spectre, de nouveaux sous-ensembles du plan complexe appelés pseudo-spectres ont été introduits. L'idée sous-jacente à la définition de ces nouveaux objets, est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante d'un opérateur n'est pas définie i.e. son spectre, mais également là où elle est en norme de taille significative i.e. les ensembles pseudo-spectraux qui sont définis précisément de la manière suivante : le ε -pseudo-spectre $\sigma_\varepsilon(A)$ d'une matrice ou d'un opérateur A est défini pour une valeur strictement positive du paramètre ε comme le sous-ensemble du plan complexe

$$\sigma_\varepsilon(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}, \|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

où l'on convient d'écrire dans l'expression ci-dessus que $\|(zI - A)^{-1}\| = +\infty$ si le point z appartient au spectre de l'opérateur A . On constate que les ε -pseudo-spectres d'un opérateur sont des ensembles croissants au sens de l'inclusion par rapport au paramètre strictement positif ε et qu'ils contiennent tous le spectre de l'opérateur.

Mentionnons avant de continuer qu'il y a sur la notion de pseudo-spectre une littérature très abondante. Nous nous référons ici pour les définitions et les quelques résultats généraux que nous allons rappeler, à l'article [17] de L.N. Trefethen. Indiquons également comme référence le livre, paru plus récemment, [18] de L.N. Trefethen et M. Embree. Cet ouvrage de synthèse dresse un large panorama de ce sujet et en donne de très nombreuses illustrations.

D'après la définition que nous venons de rappeler, l'étude des ensembles ε -pseudo-spectraux d'un opérateur se réduit donc à l'étude des lignes de niveau de la norme de sa résolvante. Il est intéressant de noter que cette étude des lignes de niveau de la résolvante d'un opérateur permet d'apprécier sa stabilité spectrale par rapport à des perturbations. En effet, on peut donner une autre description des ensembles ε -pseudo-spectraux d'un opérateur en terme du spectre de perturbations de cet opérateur, puisque pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a l'identité

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \exists B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifiant } \|B\| \leq \varepsilon \text{ telle que } z \in \sigma(A + B)\},$$

si on note $\sigma(A + B)$ le spectre de la matrice $A + B$. Plus généralement, si A désigne un opérateur linéaire non borné, fermé, à domaine dense sur un espace de Hilbert complexe H , le résultat démontré par Roch et Silbermann dans [15] montre que

$$\sigma_\varepsilon(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{L}(H), \|B\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \varepsilon} \sigma(A + B),$$

si $\mathcal{L}(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H . Cette deuxième description montre qu'un nombre complexe z appartient au ε -pseudo-spectre d'une matrice A si et seulement si ce point appartient au spectre d'une perturbation $A + B$ de taille $\|B\| \leq \varepsilon$ de cette matrice. On comprend avec ce second point de vue l'intérêt d'étudier de tels sous-ensembles lorsque l'on cherche par exemple à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. En effet, on commence pour mener à bien un tel calcul par effectuer une discrétisation de cet opérateur. Cette discrétisation et les inévitables erreurs d'arrondis qui se produisent lors des calculs numériques vont générer des perturbations de l'opérateur initial, ce qui induit en fin de compte que les algorithmes pour le calcul des valeurs propres vont déterminer des valeurs propres d'une perturbation de l'opérateur initial, i.e. une valeur d'un ε -pseudo-spectre, mais pas nécessairement une valeur spectrale. Il est donc important lorsque l'on cherche à déterminer numériquement le spectre d'un opérateur, de comprendre dans quelle mesure ses ensembles pseudo-spectraux contiennent plus ou moins largement son spectre.

L'étude des ensembles pseudo-spectraux est a priori non triviale seulement lorsque les opérateurs étudiés sont non auto-adjoints ou plutôt non normaux. En effet, dans le cas d'un opérateur linéaire non borné, fermé, à domaine dense, auto-adjoint ou plus généralement normal A sur un espace de Hilbert complexe, on a l'estimation suivante de la norme de sa résolvante (voir par exemple l'estimation (V.3.31) dans [9]),

$$(1.1.1) \quad \forall z \notin \sigma(A), \|(zI - A)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(A))},$$

où $d(z, \sigma(A))$ désigne la distance séparant le point z du spectre de l'opérateur. Cette estimation assure la stabilité spectrale de cet opérateur sous de petites perturbations puisque son ε -pseudo-spectre se réduit d'après (1.1.1) au ε -voisinage de son spectre

$$(1.1.2) \quad \sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(A)) \leq \varepsilon\}.$$

Cependant, il est bien connu que l'expression de la norme de la résolvante donnée par la formule (1.1.1) et la propriété de stabilité spectrale qui en découle, ne sont en général plus du tout vérifiées si la propriété de normalité de l'opérateur est violée. La résolvante peut alors prendre de très grande valeur en norme dans des régions de

l'ensemble résolvant lointaines du spectre de l'opérateur. Ce fait explique la possible très forte sensibilité du spectre des opérateurs non normaux sous l'effet de petites perturbations, ce qui constitue une des difficultés majeures qui intervient dans leurs études spectrales.

Pour illustrer ce propos, considérons le cas de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Cet opérateur est un exemple très simple d'opérateur différentiel quadratique elliptique

$$H_c = D_x^2 + cx^2, \quad D_x = i^{-1}\partial_x, \quad c = e^{i\pi/4},$$

dont le spectre est composé uniquement de valeurs propres régulièrement distribuées le long de la demi-droite $e^{i\pi/8}\mathbb{R}_+^*$,

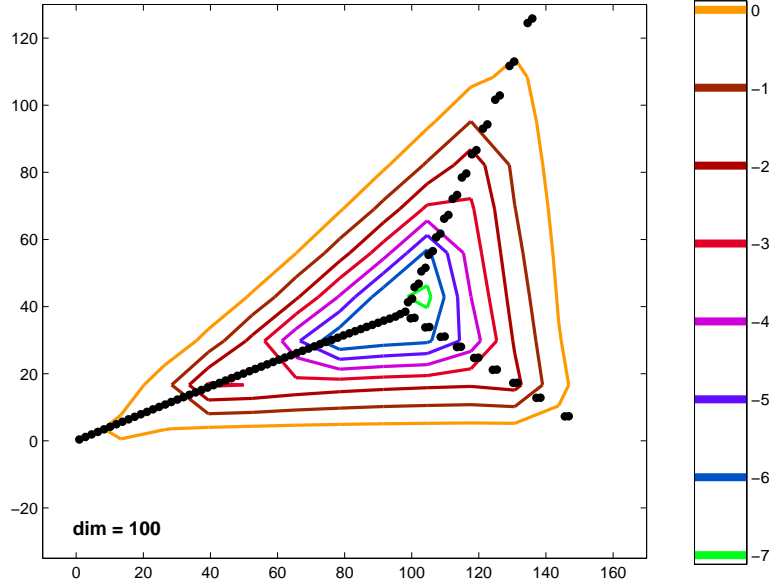
$$\sigma(H_c) = \{e^{i\pi/8}(2n+1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si on essaie de retrouver numériquement le spectre de cet opérateur en effectuant une simulation numérique sur la discrétisation matricielle suivante

$$\left((H_c \Psi_i, \Psi_j)_{L^2(\mathbb{R})} \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

où $N = 100$ et où $(\Psi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ désigne la base hilbertienne formée par les fonctions de Hermite, on obtient le résultat donné par la figure suivante où les valeurs propres calculées numériquement sont représentées par des points noirs. Commentons quelque

FIG. 1. Calcul numérique de quelques lignes de niveau de la norme de la résolvante $\|(H_c - z)^{-1}\| = \varepsilon^{-1}$ de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint H_c pour $c = e^{i\pi/4}$. La colonne de droite indique les valeurs correspondantes de $\log_{10} \varepsilon$.



peu les résultats obtenus dans cette simulation numérique. Considérons tout d'abord le cas des basses énergies. On constate sur cette simulation que les valeurs numériques obtenues pour ces basses énergies sont très proches des valeurs théoriques. Comme prévu, elles se répartissent régulièrement le long de la demi-droite $e^{i\pi/8}\mathbb{R}_+^*$. Cependant, on peut constater que ceci n'est plus du tout vrai en ce qui concerne les hautes énergies. On note en effet l'existence d'un seuil au delà duquel les valeurs propres calculées

numériquement s'éloignent très fortement de la demi-droite $e^{i\pi/8}\mathbb{R}_+^*$. Il se produit alors des phénomènes de très fortes instabilités spectrales qui conduisent au calcul de valeurs propres « aberrantes » pour les hautes énergies de cet opérateur. Mentionnons que des calculs numériques comparables peuvent être également trouvés dans [3]. Nous allons étudier dans cet exposé quand et comment ce genre de phénomènes apparaît dans des classes particulières d'opérateurs pseudo-différentiels non auto-adjoints.

1.2. Pseudo-spectres semi-classiques. Pour mener notre étude, il est intéressant de se placer dans un cadre semi-classique et d'étudier des notions de pseudo-spectre semi-classique. On définit pour toute famille semi-classique $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, de domaine D , les notions suivantes de pseudo-spectre semi-classique.

Définition 1.2.1. *Pour tout $\mu \geq 0$, l'ensemble*

$$\Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) = \{z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \|(P_h - z)^{-1}\| \geq Ch^{-\mu}\},$$

est appelé pseudo-spectre semi-classique d'indice μ de la famille $(P_h)_{0 < h \leq 1}$.

Le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini est défini par

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(P_h) = \bigcap_{\mu \geq 0} \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h).$$

D'après cette définition, les points appartenant à l'ensemble complémentaire du pseudo-spectre semi-classique d'indice μ sont les points du plan complexe pour lesquels on a le contrôle suivant de la norme de la résolvante pour des valeurs suffisamment petites du paramètre semi-classique h ,

$$(1.2.1) \quad \exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \|(P_h - z)^{-1}\| < Ch^{-\mu}.$$

Pour démontrer l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice μ , on va s'intéresser à la question de l'existence de quasi-modes semi-classiques

$$(1.2.2) \quad \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \exists u_h \in D,$$

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \|P_h u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq Ch^\mu,$$

en certains points z de l'ensemble résolvant. Ces points peuvent être considérés comme des « presque valeurs propres » en $O(h^\mu)$ dans la limite semi-classique.

2. SUR LE PSEUDO-SPECTRE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUADRATIQUES ELLIPTIQUES

2.1. La classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. On s'intéresse dans cette section à la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Il s'agit de la classe des opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl

$$(2.1.1) \quad q(x, \xi)^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi,$$

par des symboles $q(x, \xi)$, où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, qui sont des *formes quadratiques elliptiques à valeurs complexes* i.e. des formes quadratiques à valeurs complexes vérifiant

$$(2.1.2) \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = (0, 0).$$

Commençons par remarquer que comme leurs symboles sont des formes quadratiques, ces opérateurs sont seulement des opérateurs différentiels qui sont a priori non auto-adjoint puisque leurs symboles de Weyl sont à valeurs complexes. Comme nous l'avons

précisé précédemment, l'oscillateur harmonique non auto-adjoint est un exemple de tel opérateur

$$D_x^2 + e^{i\theta} x^2 = (\xi^2 + e^{i\theta} x^2)^w, \quad 0 < \theta < \pi, \quad D_x = i^{-1} \partial_x.$$

Cet opérateur est un exemple très simple d'opérateur non auto-adjoint pour lequel nous avons constaté sur la simulation numérique précédente qu'il se produit de très fortes instabilités spectrales sous de petites perturbations pour ses hautes énergies. Ces phénomènes ont été étudiés dans plusieurs travaux récents. On peut citer en particulier les travaux de L.S. Boulton [1], E.B. Davies [3], K. Pravda-Starov [10] et M. Zworski [20], qui ont permis d'en obtenir une bonne compréhension.

Une question qui a été à l'origine de nos travaux a été d'étudier si ces phénomènes propres à l'oscillateur harmonique non auto-adjoint étaient représentatifs, ou non, de ce qui se produit plus généralement dans la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en toute dimension. Nous avons essayé de répondre aux quelques questions suivantes :

- Se produit-il toujours de très fortes instabilités spectrales sous de petites perturbations pour les hautes énergies de ces opérateurs ?
- Si ce n'est pas le cas, est-il possible de donner une condition nécessaire et suffisante sur le symbole de Weyl de ces opérateurs qui assure leurs stabilités spectrales ?
- Peut-on décrire précisément quelle géométrie sépare les régions de l'ensemble résolvant sur lesquelles la norme de la résolvante de ces opérateurs est non bornée, de celles où l'on garde un contrôle sur leurs tailles ?

Pour répondre à ces questions, nous allons mener une étude dans un cadre semi-classique. L'intérêt de travailler dans un cadre semi-classique est essentiellement une question de géométrie. En effet, nous allons voir que pour un opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$, il est plus facile de décrire la géométrie des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques de l'opérateur semi-classique associé

$$(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1},$$

que celle des ensembles ε -pseudo-spectraux. Ce cadre semi-classique est particulièrement adapté à l'étude des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques car il existe pour ces opérateurs un lien très simple entre ce cadre semi-classique et le cadre quantique. En effet, en utilisant que les symboles de ces opérateurs sont des formes quadratiques q , on obtient en effectuant le changement de variables, $y = h^{1/2}x$ où $h > 0$, l'identité suivante entre l'opérateur quantique $q(x, \xi)^w$ et l'opérateur semi-classique associé $(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}$,

$$(2.1.3) \quad q(x, \xi)^w - \frac{z}{h} = \frac{1}{h} (q(y, h\eta)^w - z),$$

si $z \in \mathbb{C}$. Cette identité permet d'obtenir des informations concernant le comportement de la norme de la résolvante de l'opérateur quantique

$$(q(x, \xi)^w - z)^{-1},$$

lorsque l'on possède des informations concernant les pseudo-spectres semi-classiques de l'opérateur semi-classique associé. Mentionnons par exemple que si un nombre complexe non nul z appartient au pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'opérateur

$$(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1},$$

l'identité (2.1.3) induit que la résolvente de l'opérateur quantique explose en norme le long de la demi-droite $z\mathbb{R}_+$ plus rapidement que toute croissance polynomiale

$$(2.1.4) \quad \forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \|(q(x, \xi)^w - z\eta)^{-1}\| \geq C\eta^N,$$

et ce, même si cette demi-droite $z\mathbb{R}_+$ n'intersecte pas le spectre de l'opérateur $q(x, \xi)^w$. Dans le cas contraire où $z \notin \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(y, h\eta)^w)$, $z \neq 0$ et $0 \leq \mu \leq 1$, on déduit facilement de (1.2.1) et (2.1.3) que l'on peut trouver des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que la résolvente de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ reste bornée en norme dans une région de l'ensemble résolvant de la forme

$$(2.1.5) \quad \{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1, d(\Delta, u) \leq C_2 |\text{proj}_\Delta u|^{1-\mu}\} \cap \mathbb{C} \setminus \sigma(q(x, \xi)^w),$$

où $\Delta = z\mathbb{R}_+$ et où $\text{proj}_\Delta u$ désigne la projection orthogonale de u sur la demi-droite fermée Δ . Remarquons que l'ensemble précédent contient plus ou moins largement la demi-droite

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1, u \in z\mathbb{R}_+\},$$

selon la valeur de l'indice μ , $0 \leq \mu < 1$. Ce fait explique l'attention que nous porterons par la suite à déterminer avec précision l'indice du pseudo-spectre semi-classique auquel un point n'appartient pas, lorsqu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en ce point.

2.2. Quelques notations et résultats préliminaires concernant les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Commençons par fixer quelques notations et rappeler quelques résultats connus concernant les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Considérons q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, \xi) &\mapsto q(x, \xi), \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. une forme quadratique à valeurs complexes vérifiant (2.1.2). L'image numérique $\Sigma(q)$ de q est définie comme le sous-ensemble du plan complexe de toutes les valeurs prises par ce symbole

$$(2.2.1) \quad \Sigma(q) = q(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n),$$

et l'application hamiltonienne $F \in M_{2n}(\mathbb{C})$ associée à la forme quadratique q est définie de manière unique par l'identité

$$(2.2.2) \quad q((x, \xi); (y, \eta)) = \sigma((x, \xi), F(y, \eta)), \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

où $q(\cdot; \cdot)$ est la forme polaire associée à la forme quadratique q et où σ désigne la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^{2n} ,

$$(2.2.3) \quad \sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \xi \cdot y - x \cdot \eta, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Remarquons que l'application hamiltonienne F est anti-symétrique par rapport à σ . Ce fait est juste une conséquence des propriétés d'anti-symétrie de la forme symplectique et de symétrie de la forme polaire

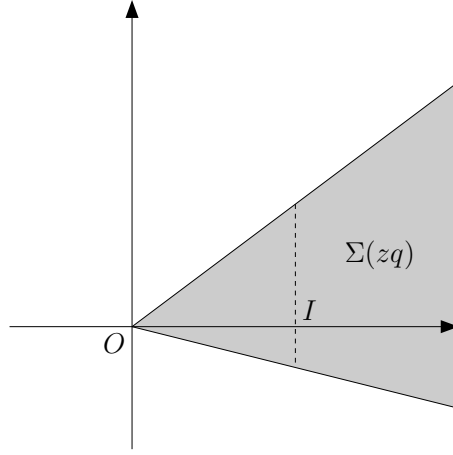
$$(2.2.4) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \sigma(X, FY) = q(X; Y) = q(Y; X) = \sigma(Y, FX) = -\sigma(FX, Y).$$

Sous l'hypothèse d'ellipticité, l'image numérique d'une forme quadratique ne peut prendre que des formes très particulières. C'est une conséquence du résultat suivant démontré par J. Sjöstrand (Lemme 3.1 dans [16]),

Proposition 2.2.1. *Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes. Si $n \geq 2$, il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que la forme quadratique $\operatorname{Re}(zq)$ soit définie positive. Si $n = 1$, le même résultat est vérifié si on suppose de plus que $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$.*

Cette proposition montre que l'image numérique d'une forme quadratique elliptique ne peut prendre que deux formes. La première possibilité est que l'image numérique $\Sigma(q)$ remplisse tout le plan complexe. Ce cas peut se produire uniquement en dimension $n = 1$. La seconde possibilité est que $\Sigma(q)$ soit un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement plus petite que π .

FIG. 2. Forme de l'image numérique $\Sigma(q)$ si $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$.



En effet, si $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$, en utilisant que l'ensemble $\Sigma(q)$ possède une structure de semi-cône

$$tq(x, \xi) = q(\sqrt{t}x, \sqrt{t}\xi), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

puisque q est une forme quadratique, on obtient que

$$\Sigma(q) = \mathbb{R}_+ z^{-1} I,$$

si z est le nombre complexe non nul donné par la proposition 2.2.1, et I désigne le segment compact

$$I = 1 + i \operatorname{Im}(zq)(K),$$

où K est le sous-ensemble compact de \mathbb{R}^{2n} ,

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : \operatorname{Re}(zq)(x, \xi) = 1\}.$$

La compacité de K est une conséquence directe du fait que la forme quadratique $\operatorname{Re}(zq)$ soit définie positive.

Les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques définissent des opérateurs de Fredholm (voir le lemme 3.1 dans [7] ou le théorème 3.5 dans [16]),

$$(2.2.5) \quad q(x, \xi)^w + z : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

où B est l'espace de Hilbert

$$(2.2.6) \quad \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ si } |\alpha + \beta| \leq 2\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_B^2 = \sum_{|\alpha+\beta|\leq 2} \|x^\alpha D_x^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

L'indice de Fredholm de l'opérateur $q(x, \xi)^w + z$ est indépendant de z et, est égal à 0 si $n \geq 2$. Dans le cas où $n = 1$, cet indice peut prendre les valeurs $-2, 0$ ou 2 . Plus précisément, cet indice est toujours égal à 0 si $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$.

Dans la suite, nous supposons toujours que $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$. Sous cette hypothèse, J. Sjöstrand a démontré dans le théorème 3.5 de [16] (voir aussi le lemme 3.2 et le théorème 3.3 de [7]) que le spectre des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités finies

$$(2.2.7) \quad \sigma(q(x, \xi)^w) = \left\{ \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(F), \\ -i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}}} (r_\lambda + 2k_\lambda)(-i\lambda) : k_\lambda \in \mathbb{N} \right\},$$

où F désigne l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q et r_λ désigne la dimension du sous-espace vectoriel caractéristique complexe associé à la valeur propre λ de l'application hamiltonienne F . On peut remarquer que le spectre de ces opérateurs est toujours inclus dans l'image numérique de leurs symboles.

Soulignons pour finir ce paragraphe concernant les propriétés préliminaires des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques, que la propriété de normalité se caractérise très aisément dans cette classe d'opérateurs par une condition d'annulation du crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de leurs symboles

$$(2.2.8) \quad \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\} = \frac{\partial \operatorname{Re} q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \operatorname{Im} q}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Re} q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \operatorname{Im} q}{\partial \xi}.$$

Proposition 2.2.2. *Un opérateur différentiel quadratique elliptique*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

est normal si et seulement si la forme quadratique définie par le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de son symbole est identiquement nulle

$$(2.2.9) \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x, \xi) = 0.$$

Preuve de la proposition 2.2.2. Cette proposition est une conséquence directe de la formule de composition en quantification de Weyl (voir le théorème 18.5.4 de [8]), qui induit que le symbole de Weyl du commutateur

$$[q^w, (q^w)^*] = [q^w, \bar{q}^w] = -2i[(\operatorname{Re} q)^w, (\operatorname{Im} q)^w],$$

est égal à

$$-2i(\operatorname{Re} q \sharp \operatorname{Im} q - \operatorname{Im} q \sharp \operatorname{Re} q) = -2\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\},$$

puisque les symboles $\operatorname{Re} q$ et $\operatorname{Im} q$ sont des formes quadratiques. La notation $\operatorname{Re} q \sharp \operatorname{Im} q$ désigne le symbole de Weyl de l'opérateur obtenu par composition $(\operatorname{Re} q)^w (\operatorname{Im} q)^w$. \square

Remarque. Notons que la propriété d'invariance symplectique du crochet de Poisson (voir (21.1.4) dans [8]),

$$(2.2.10) \quad \{(\operatorname{Re} q) \circ \chi, (\operatorname{Im} q) \circ \chi\} = \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\} \circ \chi,$$

si χ est une transformation linéaire symplectique de \mathbb{R}^{2n} , implique que la condition (2.2.9) est symplectiquement invariante.

2.3. Énoncé des résultats principaux. Considérons un opérateur différentiel quadratique elliptique

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

On sait d'après (2.2.7) que le spectre de cet opérateur est contenu dans l'image numérique de son symbole $\Sigma(q)$. La proposition suivante donne une première localisation des régions où la résolvante peut prendre en norme des tailles très significatives i.e. des régions où peuvent se développer des instabilités spectrales sous l'effet de petites perturbations.

Proposition 2.3.1. *Soit $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une forme quadratique elliptique à valeurs complexes. On a*

$$\forall z \notin \Sigma(q), \quad \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q))},$$

si $d(z, \Sigma(q))$ désigne la distance séparant le point z de l'image numérique $\Sigma(q)$.

Ce résultat montre que la résolvante d'un opérateur différentiel quadratique elliptique ne peut pas exploser en norme en dehors d'un voisinage de l'image numérique de son symbole. Nous allons maintenant étudier quels phénomènes peuvent se produire dans cet ensemble particulier. Il y a deux cas à séparer selon que l'opérateur est, ou non, normal.

2.3.1. Cas d'un opérateur normal. Considérons un opérateur différentiel quadratique elliptique *normal*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Rappelons que d'après la proposition 2.2.2, cette propriété de normalité est exactement équivalente au fait que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x, \xi) = 0.$$

Dans ce cas, on a l'expression classique de la norme de la résolvante (1.1.1),

$$(2.3.1) \quad \forall z \notin \sigma(q(x, \xi)^w), \quad \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(q(x, \xi)^w))},$$

qui induit que le ε -pseudo-spectre de cet opérateur est exactement égal au ε -voisinage de son spectre

$$\sigma_\varepsilon(q(x, \xi)^w) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(q(x, \xi)^w)) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Cette formule classique (2.3.1) assure que la résolvante ne peut pas exploser en norme loin du spectre et induit que le spectre d'un tel opérateur est stable sous de petites perturbations.

Exemple 1. L'opérateur

$$(2.3.2) \quad q_1(x, \xi)^w = -(1+i)\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(-1+i)x_2\partial_{x_1} + 6ix_2\partial_{x_2} \\ + 2ix_1\partial_{x_2} + (6+5i)x_1^2 + (11+i)x_2^2 + (10+4i)x_1x_2 - 2 + 5i,$$

est un exemple d'opérateur différentiel quadratique elliptique normal. Son spectre est donné par

$$\sigma(q_1(x, \xi)^w) = \{(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} : (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Exemple 2. Remarquons que lorsque l'image numérique $\Sigma(q)$ se réduit à une demi-droite fermée, l'opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ est nécessairement normal puisque

$$\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\} = |z|^2 \{\operatorname{Re}(z^{-1}q), \operatorname{Im}(z^{-1}q)\} = 0,$$

si $z \in \mathbb{C}^*$ est choisi tel que $\operatorname{Im}(z^{-1}q) = 0$. En fait, l'opérateur $q(x, \xi)^w$ peut dans ce cas particulier être réduit à l'opérateur

$$z \sum_{j=1}^n \lambda_j (D_{x_j}^2 + x_j^2),$$

où $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, après une conjugaison par un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.3.2. Cas d'un opérateur non normal. Considérons un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On suppose que l'image numérique $\Sigma(q)$ est distincte du plan complexe

$$(2.3.3) \quad \Sigma(q) \neq \mathbb{C}.$$

Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2, cette hypothèse supplémentaire est toujours vérifiée en dimension $n \geq 2$. Elle exclut seulement quelques opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels (voir la remarque suivant la proposition 2.3.2 pour plus de précision concernant ces opérateurs).

Sous cette hypothèse supplémentaire, l'image numérique $\Sigma(q)$ est toujours un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture *strictement positive* et strictement plus petite que π .

2.3.2.a. Etude du pseudo-spectre à l'intérieur de l'image numérique. Considérons l'opérateur différentiel quadratique elliptique semi-classique associé

$$(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}.$$

On peut construire en tout point de l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$ des quasi-modes semi-classiques.

Théorème 2.3.1. *Si l'opérateur différentiel quadratique elliptique*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

est non normal et vérifie $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$ alors pour tout $z \in \overset{\circ}{\Sigma}(q)$ et $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $h_0 > 0$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \text{ et } \|q(x, h\xi)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+.$$

Ce résultat induit l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$.

D'après (2.1.4), ce résultat semi-classique induit que la norme de la résolvante de l'opérateur quantique $q(x, \xi)^w$ explose rapidement le long de toutes les demi-droites contenues dans l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$,

$$(2.3.4) \quad \forall z \in \overset{\circ}{\Sigma}(q), \forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \|(q(x, \xi)^w - z\eta)^{-1}\| \geq C\eta^N.$$

On déduit de (2.2.7) que dès qu'un opérateur différentiel quadratique elliptique est *non normal* sa résolvante explose en norme dans des régions de l'ensemble résolvant lointaines de son spectre. Ce fait induit que les hautes énergies d'un tel opérateur

sont très instables sous de petites perturbations comme nous l'avons déjà remarqué sur la simulation numérique réalisée pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Il s'ensuit que dans la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques¹ la propriété de stabilité spectrale est exactement équivalente à la propriété de normalité :

$$\begin{array}{ccc} \sigma(q(x, \xi)^w) \text{ est } \textit{stable} \text{ sous} & \Leftrightarrow & q(x, \xi)^w \text{ est un opérateur} & \Leftrightarrow & \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\} = 0. \\ \text{de petites perturbations} & & \textit{normal} & & \end{array}$$

Par stabilité spectrale, on entend ici le fait que la résolvante de ces opérateurs n'explose pas en norme dans des régions lointaines de leurs spectres. Ajoutons qu'il n'est pas très surprenant d'avoir cette propriété de stabilité spectrale sous une hypothèse de normalité, mais il est remarquable de noter que dès que cette propriété est violée, il se produit dans cette classe d'opérateurs de très fortes instabilités spectrales pour leurs hautes énergies.

Exemples. Les deux opérateurs suivants

$$(2.3.5) \quad q_2(x, \xi)^w = -\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4ix_2\partial_{x_2} + 2x_1^2 + (4+i)x_2^2 + 4x_1x_2 + 2i$$

et

$$(2.3.6) \quad q_3(x, \xi)^w = -(1+i)\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(1-i)x_2\partial_{x_1} - 4ix_1\partial_{x_2} \\ + (9+4i)x_1^2 + (2+i)x_2^2 - 4(1+i)x_1x_2 - 2 + 2i,$$

sont des exemples d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux.

2.3.2.b. Etude du pseudo-spectre à la frontière de l'image numérique. Nous étudions maintenant ce qu'il se passe à la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q)$ pour un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Mentionnons que nous supposons toujours que $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$. Sous ces hypothèses, la frontière de l'image numérique est composée de l'union de l'origine 0 et de deux demi-droites Δ_1 et Δ_2 ,

$$(2.3.7) \quad \partial\Sigma(q) = \{0\} \sqcup \Delta_1 \sqcup \Delta_2,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(2.3.8) \quad \Delta_1 = z_1\mathbb{R}_+^* \text{ et } \Delta_2 = z_2\mathbb{R}_+^* \text{ où } z_1, z_2 \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}.$$

Il est nécessaire de définir une notion d'*ordre* pour le symbole $q(x, \xi)$ sur ces deux demi-droites Δ_j , $j = 1, 2$. Commençons par rappeler la définition classique de l'ordre $k(x_0, \xi_0)$ d'un symbole $p(x, \xi)$ en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ (voir la section 27.2, chapitre 27 dans [8]). Cet ordre $k(x_0, \xi_0)$ est l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$(2.3.9) \quad k(x_0, \xi_0) = \sup \{j \in \mathbb{Z} : p_I(x_0, \xi_0) = 0, \forall 1 \leq |I| \leq j\},$$

où $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, $|I| = k$ et p_I désigne les crochets de Poisson itérés

$$p_I = H_{p_{i_1}} H_{p_{i_2}} \dots H_{p_{i_{k-1}}} p_{i_k},$$

si p_1 et p_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du symbole p , $p = p_1 + ip_2$. L'ordre d'un symbole q en un point z est ensuite défini comme l'ordre maximal du symbole $p = q - z$ en tout point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant

$$p(x_0, \xi_0) = q(x_0, \xi_0) - z = 0.$$

Soulignons que l'invariance symplectique du crochet de Poisson (2.2.10) induit la même propriété pour l'ordre d'un symbole en un point.

¹Si on exclut les cas particuliers unidimensionnels mentionnés précédemment.

Comme le symbole q que nous étudions, est une forme quadratique, tous les crochets de Poisson itérés sont également des formes quadratiques. Cette propriété d'homogénéité de degré deux qu'ont ces crochets de Poisson, induit que le symbole q a le même ordre en tout point de chaque demi-droite Δ_j , $j = 1, 2$. Ceci permet de définir l'ordre du symbole q sur la demi-droite Δ_j par l'ordre de ce symbole en n'importe lequel de ses points. Cet ordre peut être *fini* ou *infini*.

Exemples. On peut facilement vérifier que le symbole de Weyl

$$\xi^2 + e^{i\theta} x^2, \quad 0 < \theta < \pi,$$

de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint est d'ordre 2 sur les deux demi-droites \mathbb{R}_+^* et $e^{i\theta}\mathbb{R}_+^*$, qui composent la frontière de son image numérique. Le symbole q_2 de l'opérateur défini en (2.3.5) a un ordre égal à 2 sur $i\mathbb{R}_+^*$ et, égal à 6 sur \mathbb{R}_+^* ,

$$\Sigma(q_2) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Par contre, on peut vérifier que le symbole q_3 de l'opérateur défini en (2.3.6) est d'ordre infini sur la demi-droite \mathbb{R}_+^* et que l'ordre sur la demi-droite $e^{i\pi/4}\mathbb{R}_+^*$ vaut 2,

$$\Sigma(q_3) = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}.$$

Dans le cas où le symbole est d'ordre *fini* sur une demi-droite Δ_j , $j = 1, 2$, on a le résultat suivant.

Théorème 2.3.2. *Si le symbole de Weyl $q(x, \xi)$ d'un opérateur différentiel quadratique elliptique est d'ordre fini k_j sur la demi-droite*

$$\Delta_j, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \Delta_j \subset \partial\Sigma(q) \setminus \{0\},$$

cet ordre est nécessairement pair et il n'y pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice $k_j/(k_j + 1)$ sur Δ_j pour l'opérateur semi-classique associé

$$\Delta_j \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda_{k_j/(k_j+1)}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w).$$

Remarque. Plus précisément, on peut établir qu'en dimension $n \geq 1$, l'ordre k_j est un entier pair vérifiant

$$2 \leq k_j \leq 4n - 2.$$

Ce résultat est démontré dans [14].

En reformulant ce résultat dans un cadre quantique, il découle de (2.1.5) et (2.2.7) que lorsque le symbole q d'un opérateur différentiel quadratique elliptique non normal $q(x, \xi)^w$ est d'ordre *fini* k_j sur la demi-droite

$$\Delta_j, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \Delta_j \subset \partial\Sigma(q) \setminus \{0\},$$

la résolvante de cet opérateur reste bornée en norme sur un ensemble de la forme

$$(2.3.10) \quad \{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1, \quad d(\Delta_j, u) \leq C_2 |\operatorname{proj}_{\Delta_j} u|^{\frac{1}{k_j+1}}\},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives.

Comme nous le verrons dans sa démonstration, cette absence de pseudo-spectre semi-classique est liée à des propriétés de sous-ellipticité. Ajoutons juste pour le moment, que l'indice $k_j/(k_j + 1)$ qui apparaît dans ce résultat est exactement égal à la perte apparaissant dans l'estimation sous-elliptique sous-jacente.

Concernant le cas d'ordre *infini*, la situation est nettement plus compliquée. Néanmoins, on peut tout d'abord remarquer dans ce cas que l'on ne peut pas espérer démontrer un résultat plus fort qu'un résultat d'absence de pseudo-spectre semi-classique

d'indice 1. En effet, on peut facilement vérifier sur l'exemple donné par l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$ défini en (2.3.6) que son spectre est donné par

$$\sigma(q_3(x, \xi)^w) = \{(2k_1 + 1)\sqrt{2} + (2k_2 + 1)3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}} : (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Rappelons que le spectre de cet opérateur est uniquement composé de valeurs propres et que son symbole est d'ordre infini sur \mathbb{R}_+^* . Il découle de la structure de ce spectre et de (2.1.5) que s'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en un point de la demi-droite \mathbb{R}_+^* , il n'y a nécessairement pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice $\mu \geq 1$. En fait, on peut démontrer en utilisant un résultat de décroissance exponentielle en temps de la norme des semi-groupes à contraction générés par les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques (voir [14]) qu'il n'y a effectivement jamais de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur toutes les demi-droites d'ordre infini. Mentionnons que ce résultat de décroissance exponentielle ne sera pas démontré ici mais nous expliquerons comment il induit l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1.

2.3.3. Géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Expliquons maintenant quelles sont les conséquences des résultats précédents sur la géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Commençons par considérer le cas unidimensionnel qui est un peu particulier. En dimension $n = 1$, un opérateur différentiel quadratique elliptique peut après une similitude et une conjugaison par un opérateur unitaire, être réduit à l'oscillateur harmonique auto-adjoint ou l'oscillateur harmonique non auto-adjoint.

Proposition 2.3.2. *Considérons $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes telle que $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$. Pour tout $h > 0$, il existe un opérateur unitaire (plus précisément un opérateur métaplectique) U_h sur $L^2(\mathbb{R})$, qui est un automorphisme des espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et B , $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in [0, \pi[$ tels que*

$$\forall h > 0, q(x, h\xi)^w = zU_h((hD_x)^2 + e^{i\theta}x^2)U_h^{-1}.$$

Remarque. Dans le cas où $\Sigma(q) = \mathbb{C}$, un opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ peut être réduit après une similitude et une conjugaison par un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ à l'opérateur défini en quantification de Weyl par le symbole

$$(\xi + ix)(\xi + \eta x) \text{ où } \eta \in \mathbb{C}, \text{ Im } \eta > 0,$$

ou

$$(\xi - ix)(\xi + \eta x) \text{ où } \eta \in \mathbb{C}, \text{ Im } \eta < 0,$$

selon la valeur de l'indice de Fredholm qui est égal à -2 dans le premier cas et à 2 dans le second.

Comme nous le verrons dans la suite, cette proposition permet de réduire l'étude des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux unidimensionnels vérifiant

$$\Sigma(q) \neq \mathbb{C},$$

à celle de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint

$$H_\theta = D_x^2 + e^{i\theta}x^2, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Mentionnons que les résultats précédents (Théorème 2.3.1 et Théorème 2.3.2) étaient déjà connus dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. En effet, l'existence de quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre

semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique pour l'opérateur semi-classique associé, est une conséquence directe d'un résultat démontré par E.B. Davies dans [4] (Théorème 1). Concernant l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$ sur la frontière de l'image numérique, ce résultat a été démontré pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint dans [10]².

Comme démontré dans [10], cette absence de pseudo-spectre semi-classique permet de donner une preuve d'une conjecture énoncée par L.S. Boulton dans [1]. Elle concerne la géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Rappelons quelques faits concernant cette conjecture et les résultats démontrés par L.S. Boulton dans [1].

L.S. Boulton a tout d'abord démontré (Théorème 3.3 dans [1]) que la résolvante de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint explose en norme le long de toute une famille de courbes

$$\eta \mapsto b\eta + e^{i\theta}\eta^p,$$

où b et p sont des constantes strictement positives vérifiant $1/3 < p < 3$,

$$(2.3.11) \quad \|(H_\theta - (b\eta + e^{i\theta}\eta^p))^{-1}\| \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \eta \rightarrow +\infty.$$

D'un autre côté, il a également démontré que la résolvante de cet opérateur reste bornée en norme sur deux demi-bandes parallèles aux demi-droites \mathbb{R}_+ et $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$. Plus précisément, il a démontré qu'il existe des constantes strictement positives d et M_d telles que

$$(2.3.12) \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq b \leq d} \|(H_\theta - (\eta + ib))^{-1}\| \leq M_d,$$

$$(2.3.13) \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq b \leq d} \|(H_\theta - e^{i\theta}(\eta - ib))^{-1}\| \leq M_d.$$

Ces bornes permettent d'obtenir certaines informations sur la forme des ensembles ε -pseudo-spectraux de l'opérateur H_θ . En effet, L.S. Boulton a déduit de ces résultats que pour toute valeur suffisamment petite du paramètre strictement positif ε , le ε -pseudo-spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint est contenu dans l'ensemble grisé apparaissant sur la figure suivante. Les valeurs propres apparaissent sous forme de \diamond .

Plus précisément, L.S. Boulton a démontré que pour tout $0 < \delta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante strictement positive ε_0 telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$(2.3.14) \quad \sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\} \cup [\lambda_{m+1} - \delta e^{i\theta/2} + S_\theta],$$

où

$$\lambda_n = e^{i\theta/2}(2n + 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \theta\} \cup \{0\}.$$

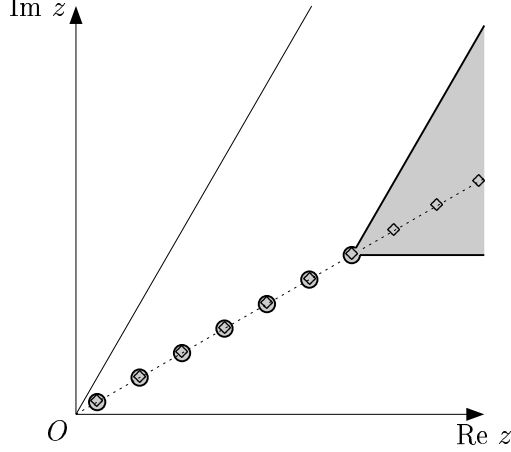
En fait, à la vue de certains calculs numériques réalisés par E.B. Davies dans [3], L.S. Boulton a conjecturé que l'indice $p = 1/3$ apparaissant dans (2.3.11) est l'indice *critique* au sens suivant :

Considérons $0 < p < 1/3$, $0 < \delta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Si $b_{m,p}$ et E sont des constantes strictement positives vérifiant

$$b_{m,p}E + e^{i\theta}E^p = \lambda_m \text{ et } \forall \eta > E, \arg z_\eta < \theta/2,$$

²Rappelons que la valeur de l'ordre est égal à 2 dans ce cas.

FIG. 3. Une première localisation des ε -pseudo-spectres de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint.



où $z_\eta = b_{m,p}\eta + e^{i\theta}\eta^p$, posons

$$\Omega_{m,p} = \{|z_\eta|e^{i\alpha} \in \mathbb{C} : \eta \geq E, \arg z_\eta \leq \alpha \leq \arg(\overline{z_\eta}e^{i\theta})\}.$$

L.S. Boulton a conjecturé le résultat suivant.

Conjecture de Boulton. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$(2.3.15) \quad \sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\} \cup \Omega_{m,p}.$$

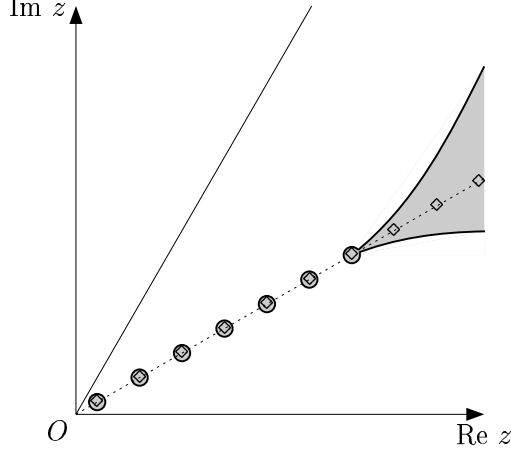
L'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$ à la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$ pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint³ donnée par le théorème 2.3.2 montre que l'indice $1/3$ est bien l'indice *critique*. En effet, on peut déduire (2.3.15) de (2.3.10) (voir [10] pour plus de détails) puisque ici $k_j = 2$, $j \in \{1, 2\}$. Comme nous le verrons, ce théorème 2.3.2 est une conséquence d'une estimation sous-elliptique démontrée par N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski dans [5] (Théorème 1.4) pour une classe très générale d'opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques. Dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint, une preuve plus élémentaire de ce résultat utilisant seulement un découpage fréquentiel non trivial est donnée dans [10].

Remarquons que cette inclusion (2.3.15) permet de donner une description précise des ensembles ε -pseudo-spectraux de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint qui est *optimale* au regard de (2.3.11).

En revenant maintenant au cas d'une dimension quelconque $n \geq 1$, soulignons que le théorème 2.3.2 permet de donner des descriptions des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux, similaires à celles donnée par L.S. Boulton pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint, lorsque les symboles de ces opérateurs sont d'ordre *fini* sur les deux demi-droites qui composent la frontière de leurs images numériques. La seule différence avec le cas particulier de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint est que les indices critiques qui apparaissent dans ces descriptions, peuvent être *différents*. En effet, ces indices critiques dépendent

³L'ordre du symbole de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint est égal 2 sur $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$.

FIG. 4. Forme des ε -pseudo-spectres de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint.



directement d'après (2.3.10) de l'ordre des symboles sur les deux demi-droites composant la frontière de l'image numérique de leurs symboles. Nous invitons le lecteur à se référer à [10] pour davantage de détails concernant la manière d'obtenir de telles descriptions des ensembles ε -pseudo-spectraux à partir de (2.3.10).

3. QUELQUES ÉLÉMENTS DE PREUVE DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

Le lecteur pourra trouver une démonstration exhaustive de tous les résultats énoncés précédemment dans [13]. Nous reprenons dans les lignes suivantes quelques éléments de cette démonstration.

Avant de commencer cette démonstration, commençons par rappeler la propriété d'*invariance symplectique* de la quantification de Weyl (voir le théorème 18.5.9 dans [8]). Cette invariance symplectique est la propriété la plus essentielle de la quantification de Weyl.

Pour toute transformation symplectique affine χ de \mathbb{R}^{2n} , il existe une transformation unitaire U de $L^2(\mathbb{R}^n)$, uniquement déterminée à un facteur constant de module 1, telle que U soit un automorphisme des espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, B et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, où B est l'espace de Hilbert défini en (2.2.6), et

$$(3.0.1) \quad (a \circ \chi)(x, \xi)^w = U^{-1}a(x, \xi)^w U,$$

pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. On dit que U est un opérateur métaplectique associé à la transformation symplectique affine χ .

Cette invariance symplectique de la quantification de Weyl induit la même propriété pour les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques au sens où si

$$q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C},$$

est une forme quadratique elliptique à valeurs complexes et χ est une transformation symplectique *linéaire* de \mathbb{R}^{2n} , on a pour tout $\mu \in [0, \infty]$ (voir [13] pour plus de détails),

$$(3.0.2) \quad \Lambda_\mu^{\text{sc}}((q \circ \chi)(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w).$$

Cette propriété d'invariance symplectique va nous permettre dans la suite de réduire l'étude de certains symboles à celle de quelques formes normales par le choix de nouvelles coordonnées symplectiques.

Commençons par démontrer la proposition 2.3.1.

Preuve de la proposition 2.3.1. Si l'image numérique remplit tout le plan complexe, il n'y a rien à démontrer. Si $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$, nous avons vu dans la section précédente que l'image numérique est nécessairement un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement plus petite que π .

Considérons $z \notin \Sigma(q)$ et notons par z_0 sa projection orthogonale sur l'ensemble convexe non vide $\Sigma(q)$. D'après la forme de l'image numérique, le point z_0 doit appartenir à sa frontière. On peut donc trouver un nombre complexe $z_1 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1| = 1$ tel que

$$\Sigma(z_1 q) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

et

$$(3.0.3) \quad z_1 z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}, \quad d(z, \Sigma(q)) = d(z_1 z, i\mathbb{R}).$$

En utilisant maintenant que l'opérateur $i[\operatorname{Im}(z_1 q)]^w$ est formellement anti-auto-adjoint, on obtient que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(3.0.4) \quad \begin{aligned} & \operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi)^w u - z_1 z u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= d(z_1 z, i\mathbb{R}) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + ([\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Puis, comme la forme quadratique $\operatorname{Re}(z_1 q)$ est positive, on déduit de la propriété d'invariance symplectique de la quantification de Weyl et du théorème 21.5.3 de [8] qu'il existe un opérateur métaplectique U tel que

$$[\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w = U^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j (D_{x_j}^2 + x_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2 \right) U,$$

où $k, l \in \mathbb{N}$ et $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$. En utilisant que U est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on obtient que la quantité

$$\begin{aligned} & ([\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j (\|D_{x_j} U u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|x_j U u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} \|x_j U u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

est positive. Ensuite, on peut déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (3.0.3) et (3.0.4) que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$d(z, \Sigma(q)) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |z_1| \|q(x, \xi)^w u - z u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalement, en utilisant la densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans B et le fait que $|z_1| = 1$, on obtient que

$$\forall z \notin \Sigma(q), \quad \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q))},$$

car d'après (2.2.7), $\sigma(q(x, \xi)^w) \subset \Sigma(q)$. \square

On considère tout d'abord le cas unidimensionnel qui est un peu particulier.

3.1. Le cas unidimensionnel. En dimension $n = 1$, on peut réduire, après une similitude et une composition par une transformation symplectique linéaire réelle, l'étude des formes quadratiques elliptiques à valeurs complexes à exactement trois formes normales.

Lemme 3.1.1. *Soit $q : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes en dimension 1. Il existe alors une transformation linéaire symplectique χ de \mathbb{R}^2 telle que le symbole $q \circ \chi$ soit égal à l'une des formes normales suivantes :*

- (i) $\alpha(\xi^2 + e^{i\theta}x^2)$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $0 \leq \theta < \pi$.
- (ii) $\alpha(\xi + ix)(\xi + \eta x)$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \eta > 0$.
- (iii) $\alpha(\xi - ix)(\xi + \eta x)$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \eta < 0$.

Dans les deux derniers cas (ii) et (iii), l'image numérique $\Sigma(q)$ remplit tout le plan complexe, $\Sigma(q) = \mathbb{C}$.

Preuve du lemme 3.1.1. Ce résultat est démontré dans [13].

Notons que la proposition 2.3.2 et la remarque suivant son énoncé sont des conséquences directes de la propriété d'invariance symplectique de la quantification de Weyl et du lemme précédent. Concernant les indices de Fredholm de ces opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels, le calcul établi à la suite du lemme 3.1 dans [7] montre que l'indice de Fredholm des opérateurs définis par les symboles de type (i), (ii) et (iii) est respectivement égal à 0, -2 et 2 .

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, les résultats des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 étaient déjà connus dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. L'existence de quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique pour l'opérateur semi-classique associé, est une conséquence directe d'un résultat démontré par E.B. Davies dans [4] (Théorème 1) et ; l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$ sur la frontière de l'image numérique a été démontrée pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint dans [10]⁴. Comme nous l'avons précisé précédemment (voir (2.2.10) et (3.0.2)), la propriété de non normalité, l'ordre des symboles et les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques sont *symplectiquement invariants*. Ces propriétés permettent de réduire par des transformations linéaires symplectiques réelles les symboles des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques que nous considérons dans nos preuves des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2. En utilisant le lemme 3.1.1, on déduit des résultats des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 démontrés pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint qu'ils sont par conséquent également vérifiés par tous les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux dont l'image numérique est distincte du plan complexe.

Considérons maintenant le cas multidimensionnel. Comme nous le verrons dans les lignes suivantes, il y a un réel saut de complexité entre le cas unidimensionnel et le cas multidimensionnel. Ce saut est lié à l'accroissement de la complexité de la géométrie symplectique en dimension $n \geq 2$ et de la plus grande diversité apparaissant dans le bestiaire des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

⁴Rappelons que la valeur de l'ordre est égale à 2 dans ce cas.

3.2. Cas des dimensions $n \geq 2$. Il suffit de considérer le cas d'un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal*

$$(3.2.1) \quad q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

en dimension $n \geq 2$. Rappelons que dans ce cas, l'image numérique $\Sigma(q)$ est un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture *strictement positive* et strictement plus petite que π , et que la proposition 2.2.2 montre que

$$(3.2.2) \quad \exists(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, \{ \operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q \}(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

Commençons par étudier ce qui se produit à l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$.

3.2.1. Etude du pseudo-spectre à l'intérieur de l'image numérique. Pour démontrer l'existence de quasi-modes semi-classiques pour l'opérateur semi-classique associé donnée par le théorème 2.3.1, nous avons besoin d'une première étape purement algébrique pour établir une caractérisation particulière des points appartenant à l'intérieur de l'image numérique.

Considérons la décomposition suivante de l'image numérique

$$(3.2.3) \quad \Sigma(q) = \tilde{A} \sqcup \tilde{B},$$

où

$$(3.2.4) \quad \tilde{A} = \{ z \in \Sigma(q) : \exists(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, z = q(x_0, \xi_0), \{ \operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q \}(x_0, \xi_0) \neq 0 \}$$

et

$$(3.2.5) \quad \tilde{B} = \{ z \in \Sigma(q) : z = q(x_0, \xi_0) \Rightarrow \{ \operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q \}(x_0, \xi_0) = 0 \}.$$

On peut établir en avançant des arguments purement algébriques la description suivante de ces deux ensembles (voir [13] pour une démonstration de ce résultat),

$$(3.2.6) \quad \tilde{A} = \overset{\circ}{\Sigma}(q) \text{ et } \tilde{B} = \partial \Sigma(q).$$

Ce résultat est une conséquence de la géométrie induite par le cadre quadratique auquel les symboles que nous étudions appartiennent. Ce cadre quadratique induit en effet une certaine rigidité que l'on utilise fortement pour établir ce fait.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la propriété d'invariance symplectique de la quantification de Weyl nous permet de choisir des coordonnées symplectiques adaptées aux symboles des opérateurs que nous étudions. On déduit en particulier de la proposition 2.2.1 et du lemme 18.6.4 de [8] que l'on peut ainsi réduire notre étude au cas où

$$(3.2.7) \quad \operatorname{Re} q(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\xi_j^2 + x_j^2),$$

où $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Pour démontrer l'existence de quasi-modes semi-classiques pour l'opérateur semi-classique associé

$$(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1},$$

en tout point de l'intérieur de l'image numérique (Théorème 2.3.1), on utilise un résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques pour des opérateurs pseudo-différentiels violant la condition $(\overline{\Psi})^5$. Mentionnons que ce résultat généralise les deux résultats d'existence de quasi-modes semi-classiques démontrés par E.B. Davies, dans le cas des opérateurs de Schrödinger (Théorème 1 dans [4]), et par M. Zworski dans [19] et [20], pour des opérateurs pseudo-différentiels.

⁵La définition de la condition $(\overline{\Psi})$ est rappelée ci-dessous.

Ce résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques peut être énoncé comme suit. Considérons un symbole semi-classique $P(x, \xi; h) \in S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$, $m \in \mathbb{R}_+$,

$$\langle(x, \xi)\rangle^2 = 1 + x^2 + \xi^2,$$

où $S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ désigne la classe de symboles

$$(3.2.8) \quad S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2) = \left\{ a(x, \xi; h) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, \mathbb{C}) : \right. \\ \left. \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \sup_{0 < h \leq 1} \|\langle(x, \xi)\rangle^{-m} \partial_{x, \xi}^\alpha a(x, \xi; h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})} < +\infty \right\},$$

qui admet un développement semi-classique

$$(3.2.9) \quad P(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j p_j(x, \xi),$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}$, p_j est un symbole appartenant à la classe $S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$, qui est indépendant du paramètre semi-classique h .

Soit $z \in \mathbb{C}$, on suppose qu'il existe une fonction $q_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, où $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, bornées sur \mathbb{R}^{2n} et dont toutes les dérivées sont également bornées; et une courbe bicaractéristique, $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t)$, de la partie réelle $\text{Re}(q_0(p_0 - z))$ du symbole $q_0(p_0 - z)$, où $a < b$, telles que

$$(3.2.10) \quad \forall t \in [a, b], q_0(\gamma(t)) \neq 0 \text{ et} \\ \text{Im}[q_0(\gamma(a))(p_0(\gamma(a)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(b))(p_0(\gamma(b)) - z)].$$

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses (3.2.9) et (3.2.10), pour tout voisinage ouvert V de l'arc de courbe compact $\gamma([a, b])$ dans \mathbb{R}^{2n} et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $h_0 > 0$ et $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ une famille semi-classique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que*

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \text{ FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \subset \overline{V} \text{ et } \|P(x, h\xi; h)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

La notation $\text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0})$ désigne le *front d'onde semi-classique* de la famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ défini comme le complémentaire dans \mathbb{R}^{2n} de l'ensemble composé des points $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour lesquels il existe un symbole $\chi_0(x, \xi; h) \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tel que

$$\chi_0(x_0, \xi_0; h) = 1 \text{ et } \|\chi_0(x, h\xi; h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

Ce résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques est une adaptation dans un cadre semi-classique de la preuve donnée par L. Hörmander dans [8] de la nécessité de la condition (Ψ) pour assurer la résolubilité d'un opérateur pseudo-différentiel (Théorème 26.4.7 dans [8]). L'existence de ce résultat a été mentionné pour la première fois dans [5]. Une preuve complète de cette adaptation dans un cadre semi-classique est donnée dans [11]. Ce résultat montre que lorsque le symbole principal $p_0 - z$ d'un symbole $P - z$ viole la condition $(\overline{\Psi})$, il existe en ce point z des quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini pour l'opérateur semi-classique $P(x, h\xi; h)^w$.

Condition $(\overline{\Psi})$. Une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ vérifie la condition $(\overline{\Psi})$ s'il n'existe pas de fonction $q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telle que la partie imaginaire $\text{Im}(qp)$ de la fonction qp change de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives le long d'une bicaractéristique orienté du symbole $\text{Re}(qp)$ sur laquelle la fonction q ne s'annule pas.

En usant de la caractérisation de l'intérieur de l'image numérique $\mathring{\Sigma}(q)$ donnée précédemment (voir (3.2.4) et (3.2.6)), nous allons maintenant démontrer que le symbole principal $q(x, \xi) - z$ de l'opérateur semi-classique

$$q(x, h\xi)^w - z,$$

viole la condition $(\overline{\Psi})$ pour tout $z \in \mathring{\Sigma}(q)$. Cette violation de la condition $(\overline{\Psi})$ permettra au regard du théorème 3.2.1 de démontrer que pour tout $z \in \mathring{\Sigma}(q)$ et $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver un quasi-mode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où $h_0 > 0$, vérifiant

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \text{ et } \|q(x, h\xi)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui terminera la preuve du théorème 2.3.1.

Considérons $z \in \mathring{\Sigma}(q)$. Nous allons démontrer qu'il se produit effectivement une violation de la condition $(\overline{\Psi})$ pour le symbole $q - z$. D'après (3.2.4) et (3.2.6), il y a deux cas à étudier.

Cas 1. Supposons qu'il existe $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$(3.2.11) \quad z = q(x_0, \xi_0), \quad \{\text{Re}(q - z), \text{Im}(q - z)\}(x_0, \xi_0) = \{\text{Re } q, \text{Im } q\}(x_0, \xi_0) < 0.$$

En considérant la solution du problème de Cauchy

$$(3.2.12) \quad \begin{cases} Y'(t) = H_{\text{Re } q}(Y(t)) \\ Y(0) = (x_0, \xi_0), \end{cases}$$

associé au champ de vecteurs hamiltonien du symbole $\text{Re } q$,

$$H_{\text{Re } q} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \text{Re } q}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial \text{Re } q}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

on définit la fonction

$$(3.2.13) \quad f(t) = \text{Im } q(Y(t)) - \text{Im } q(x_0, \xi_0).$$

Ce problème de Cauchy (3.2.12) est un problème de Cauchy linéaire puisque le symbole q est une forme quadratique. Il s'ensuit que sa solution Y est globale et que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} . Un calcul direct utilisant (3.2.12) et (3.2.13) montre que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(3.2.14) \quad f'(t) = \{\text{Re } q, \text{Im } q\}(Y(t)).$$

Comme d'après (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14),

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \{\text{Re } q, \text{Im } q\}(x_0, \xi_0) < 0$$

et $H_{\text{Re } q - \text{Re } z} = H_{\text{Re } q}$, on déduit dans ce premier cas que la partie imaginaire de la fonction $q - z$ change de signe, au premier ordre, de valeurs positives vers des valeurs négatives le long de la bicaractéristique orientée Y du symbole $\text{Re } q - \text{Re } z$. Ceci démontre que le symbole $q - z$ viole la condition $(\overline{\Psi})$.

Cas 2. Supposons maintenant qu'il existe $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$(3.2.15) \quad z = q(x_0, \xi_0), \quad \{\text{Re}(q - z), \text{Im}(q - z)\}(x_0, \xi_0) = \{\text{Re } q, \text{Im } q\}(x_0, \xi_0) > 0.$$

Nous considérons comme dans le cas précédent la solution globale Y du problème de Cauchy (3.2.12) et la fonction f définie en (3.2.13). Comme d'après (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14) et (3.2.15),

$$(3.2.16) \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x_0, \xi_0) > 0,$$

on déduit cette fois que la partie imaginaire de la fonction $q - z$ change également de signe, au premier ordre, le long de la bicaractéristique orientée Y du symbole $\operatorname{Re} q - \operatorname{Re} z$. Néanmoins, ce changement de signe se fait dans le « mauvais » sens. Il s'agit d'un changement de signe de valeurs négatives vers des valeurs positives, qui n'induit pas directement une violation de la condition $(\overline{\Psi})$. Pour vérifier qu'il se produit effectivement une violation de la condition $(\overline{\Psi})$ dans ce second cas, il est nécessaire d'étudier plus finement le comportement de la fonction $\operatorname{Im} q - \operatorname{Im} z$ le long de cette bicaractéristique Y .

On déduit de (3.2.16) qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad f'(t) > 0,$$

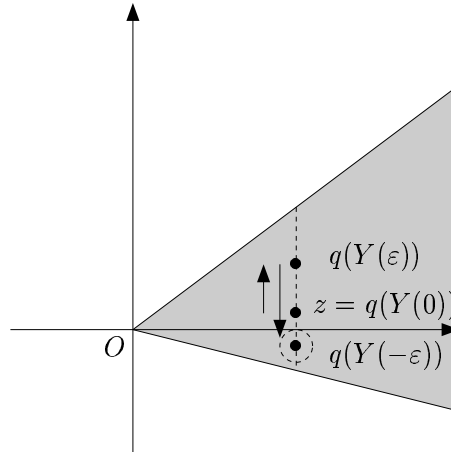
ce qui induit que

$$(3.2.17) \quad f(\varepsilon) > 0 \text{ et } f(-\varepsilon) < 0,$$

puisque d'après (3.2.16), $f(0) = 0$. En usant du lemme suivant, on obtient que pour tout $\delta > 0$, il existe un temps $t_0(\delta) > \varepsilon$ tel que

$$(3.2.18) \quad |Y(t_0(\delta)) - Y(-\varepsilon)| < \delta.$$

FIG. 5



Lemme 3.2.1. Si $Y(t) = (x(t), \xi(t))$ est la fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n})$ vérifiant le système linéaire d'équations différentielles ordinaires

$$Y'(t) = H_{\operatorname{Re} q}(Y(t)),$$

où $\operatorname{Re} q$ est le symbole défini en (3.2.7), on a

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists T_1 > M, \exists T_2 > M,$$

$$|Y(t_0) - Y(t_0 + T_1)| < \varepsilon \text{ et } |Y(t_0) - Y(t_0 - T_2)| < \varepsilon.$$

Preuve du lemme 3.2.1. Si $Y(t_0) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, on déduit de (3.2.7) que la fonction $Y(t) = (x(t), \xi(t))$ résout le problème de Cauchy suivant

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \begin{cases} x'_j(t) = 2\lambda_j \xi_j(t) \\ \xi'_j(t) = -2\lambda_j x_j(t) \\ x_j(t_0) = a_j \\ \xi_j(t_0) = b_j. \end{cases}$$

Il s'ensuit que pour tout $j = 1, \dots, n$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$(3.2.19) \quad \begin{cases} x_j(t) = b_j \sin(2(t-t_0)\lambda_j) + a_j \cos(2(t-t_0)\lambda_j) \\ \xi_j(t) = b_j \cos(2(t-t_0)\lambda_j) - a_j \sin(2(t-t_0)\lambda_j). \end{cases}$$

Posons $\beta_j = \lambda_j/\pi$, $j = 1, \dots, n$. Il faut distinguer deux cas.

Cas 1 : $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_j \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la fonction Y est périodique et le résultat du lemme 3.2.1 est évident.

Cas 2 : $(\beta_1, \dots, \beta_n) \notin \mathbb{Q}^n$. Dans ce second cas, on utilise le résultat classique d'approximation rationnelle suivant : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$, $\exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} \left| \theta_j - \frac{p_j}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Si $0 < \varepsilon_1 < 1/2$, on peut par conséquent trouver des entiers $p_{1,1}, \dots, p_{1,n} \in \mathbb{Z}$ et $q_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_1} \beta_j - p_{1,j}| < \varepsilon_1.$$

Si

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_1} \beta_j - p_{1,j}| > 0,$$

on peut en utilisant à nouveau ce résultat d'approximation rationnelle, trouver d'autres entiers $p_{2,1}, \dots, p_{2,n} \in \mathbb{Z}$ et $q_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_2} \beta_j - p_{2,j}| < \varepsilon_2.$$

En itérant ce procédé, on construit des suites $(p_{m,j})_{m \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{Z} pour tout $j = 1, \dots, n$, $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{R}_+^* et $(q_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{N}^* telles que pour tout $m \geq 2$,

$$(3.2.20) \quad 0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_m} \beta_j - p_{m,j}| < \varepsilon_m = \frac{1}{2} \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_{m-1}} \beta_j - p_{m-1,j}|$$

et

$$(3.2.21) \quad 0 < \varepsilon_m < \frac{1}{2^{m-1}} \varepsilon_1.$$

Les éléments de la suite $(q_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont nécessairement deux à deux distincts. En effet, si $q_{\varepsilon_k} = q_{\varepsilon_l}$ pour $k < l$, ceci induirait d'après (3.2.20) et (3.2.21) que

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad |p_{k,j} - p_{l,j}| \leq |q_{\varepsilon_k} \beta_j - p_{k,j}| + |q_{\varepsilon_l} \beta_j - p_{l,j}| < \varepsilon_k + \varepsilon_l < 1,$$

car $0 < \varepsilon_1 < 1/2$, et impliquerait que $\forall j = 1, \dots, n$, $p_{k,j} = p_{l,j}$ car $p_{k,j}$ et $p_{l,j}$ sont des entiers. Ceci contredirait (3.2.20) puisque

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_l} \beta_j - p_{l,j}| < \varepsilon_l \leq \frac{1}{2} \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_k} \beta_j - p_{k,j}|.$$

Comme la suite $(q_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est composée d'entiers deux à deux distincts, on peut supposer après une possible extraction que $q_{\varepsilon_m} \rightarrow +\infty$ lorsque $m \rightarrow +\infty$. On déduit de (3.2.19), (3.2.20) et (3.2.21) que

$$Y(t_0 + q_{\varepsilon_m}) \rightarrow Y(t_0) \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

En considérant ensuite $(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n) = (-\beta_1, \dots, -\beta_n)$, on obtient en usant de la même méthode une suite $(\tilde{q}_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers telle que $\tilde{q}_{\varepsilon_m} \rightarrow +\infty$ et

$$Y(t_0 - \tilde{q}_{\varepsilon_m}) \rightarrow Y(t_0) \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

Ceci termine la preuve du lemme 3.2.1. \square

Comme d'après (3.2.17), $f(-\varepsilon) < 0$, on déduit d'après (3.2.13) et (3.2.18) qu'il existe $t_0 > \varepsilon$ tel que $f(t_0)$ soit arbitrairement proche de $f(-\varepsilon)$. Il s'ensuit en particulier que l'on peut trouver $t_0 > \varepsilon$ tel que $f(t_0) < 0$. Comme d'après (3.2.17), $f(\varepsilon) > 0$ et $f(t_0) < 0$, on déduit de (3.2.13) et (3.2.15) que la fonction

$$t \mapsto \text{Im } q(Y(t)) - \text{Im } z,$$

change de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives sur l'intervalle compact $[\varepsilon, t_0]$. Ceci démontre que la partie imaginaire de la fonction $q - z$ change effectivement de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives le long de la bicaractéristique orientée Y du symbole $\text{Re } q - \text{Re } z$; et que le symbole $q - z$ viole également dans ce second cas la condition $(\overline{\Psi})$. Ceci termine la preuve du théorème 2.3.1.

3.2.2. Etude du pseudo-spectre à la frontière de l'image numérique. Nous démontrons dans cette section le théorème 2.3.2. Considérons un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

en dimension $n \geq 1$. On suppose que $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$, et que son symbole de Weyl $q(x, \xi)$ est d'ordre fini k_j sur la demi-droite Δ_j , $j \in \{1, 2\}$ (voir la définition donnée en (2.3.9)), composant une partie de la frontière de son image numérique

$$(3.2.22) \quad \partial\Sigma(q) = \{0\} \sqcup \Delta_1 \sqcup \Delta_2.$$

On peut se ramener comme précédemment au cas où (3.2.7) est vérifiée.

Preuve du théorème 2.3.2. Considérons le symbole suivant qui appartient à l'espace $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, composé des fonctions à valeurs complexes, bornées sur \mathbb{R}^{2n} ainsi que toutes leurs dérivées

$$(3.2.23) \quad r(x, \xi) = \frac{q(x, \xi) - z}{1 + x^2 + \xi^2},$$

où $z \in \Delta_j$. Posons $\tilde{\Sigma}(r) = \overline{r(\mathbb{R}^{2n})}$, on peut tout d'abord noter que

$$z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\} \Rightarrow 0 \in \partial\tilde{\Sigma}(r).$$

Remarquons également que le symbole r satisfait à la condition de type principal en 0. En effet, si $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiait $r(x_0, \xi_0) = 0$ et $dr(x_0, \xi_0) = 0$, on obtiendrait de (3.2.23) que

$$(3.2.24) \quad dq(x_0, \xi_0) = 0.$$

Comme d'après (3.2.7) et (3.2.24), on a

$$d\text{Re } q(x_0, \xi_0) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j ((x_0)_j dx_j + (\xi_0)_j d\xi_j) = 0,$$

ceci impliquerait que

$$(x_0, \xi_0) = (0, 0), \quad q(x_0, \xi_0) = 0,$$

car q est une forme quadratique et que $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$. D'un autre côté, comme $r(x_0, \xi_0) = 0$, on obtient de (3.2.23) que $q(x_0, \xi_0) = z \neq 0$ car

$$z \in \Delta_j \subset \partial\Sigma(q) \setminus \{0\},$$

ce qui induit une contradiction. Il s'ensuit que le symbole r vérifie effectivement la condition de type principal en 0. Remarquons que, comme le symbole q est d'ordre fini k_j en z , ceci induit au regard de (3.2.23) que le symbole r est également d'ordre fini k_j en 0 et, que les identités (3.2.7) et (3.2.23) imposent que l'ensemble

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : r(x, \xi) = 0\} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : q(x, \xi) = z\},$$

soit compact. Sous ces hypothèses, on peut appliquer le théorème 1.4 de [5], qui montre que l'entier k_j est *pair* et donne l'existence de constantes strictement positives h_0 et C_1 telles que

$$(3.2.25) \quad \forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|r(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_1 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Remarque. Nous n'avons pas vérifié la condition dynamique (1.7) de [5], car cette hypothèse n'est pas nécessaire à la démonstration du théorème 1.4. En effet, cette preuve utilise seulement une partie de la démonstration du lemme 4.1 de [5] (une partie du second paragraphe), où cette condition (1.7) n'est pas utilisée.

En utilisant des résultats de calcul symbolique donnés par le théorème 18.5.4 de [8] et (3.2.23), on peut écrire

$$(3.2.26) \quad r(x, h\xi)^w (1 + x^2 + h^2 \xi^2)^w = q(x, h\xi)^w - z + h r_1(x, h\xi)^w + h^2 r_2(x, h\xi)^w,$$

où

$$(3.2.27) \quad r_1(x, \xi) = -ix \frac{\partial r}{\partial \xi}(x, \xi) + i\xi \frac{\partial r}{\partial x}(x, \xi)$$

et

$$(3.2.28) \quad r_2(x, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2}(x, \xi).$$

On peut facilement vérifier d'après (3.2.23) que ces fonctions r_1 et r_2 appartiennent à l'espace $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, et on obtient d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt qu'il existe une constante strictement positive C_2 telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq 1$,

$$(3.2.29) \quad \|r_1(x, h\xi)^w u\|_{L^2} \leq C_2 \|u\|_{L^2} \text{ et } \|r_2(x, h\xi)^w u\|_{L^2} \leq C_2 \|u\|_{L^2}.$$

Il s'ensuit d'après (3.2.25), (3.2.26), (3.2.29) et l'inégalité triangulaire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h < h_0$,

$$\begin{aligned} & C_1 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|(1 + x^2 + h^2 \xi^2)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|r(x, h\xi)^w (1 + x^2 + h^2 \xi^2)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_2 h(1 + h) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Comme d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 & \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|xu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & = \|(1 + x^2 + h^2 \xi^2)^w u, u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|(1 + x^2 + h^2 \xi^2)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

on obtient que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h < h_0$,

$$(3.2.30) \quad C_1 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_2 h(1 + h) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $k_j \geq 1$, on déduit de (3.2.30) qu'il existe des constantes strictement positives h'_0 et C_3 telles que pour tout $0 < h < h'_0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_3 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

En utilisant maintenant que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans B et que l'opérateur

$$q(x, h\xi)^w + z,$$

est un opérateur de Fredholm d'indice 0, on obtient que pour tout $0 < h < h'_0$,

$$\|(q(x, h\xi)^w - z)^{-1}\| \leq C_3^{-1} h^{-\frac{k_j}{k_j+1}},$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.3.2. \square

Concernant le cas d'ordre *infini*, la situation est nettement plus compliquée. Comme nous l'avons précisé précédemment, on ne peut pas espérer démontrer mieux qu'un résultat d'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1. En fait, on peut effectivement démontrer qu'il n'y a jamais de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur toute demi-droite d'ordre infini, en utilisant un résultat de décroissance exponentielle en temps pour la norme des semi-groupes à contraction générés par des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques démontré dans [14].

Le résultat démontré dans [14] montre que la norme d'un semi-groupe à contraction

$$\|e^{tq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2)}, \quad t \geq 0,$$

généralisé par un opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ dont le symbole de Weyl vérifie

$$\operatorname{Re} q \leq 0, \quad \exists(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \operatorname{Re} q(x_0, \xi_0) \neq 0,$$

décroît exponentiellement en temps

$$(3.2.31) \quad \exists M, a > 0, \forall t \geq 0, \quad \|e^{tq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq M e^{-at}.$$

Considérons un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

en dimension $n \geq 1$ tel que $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$. Nous allons expliquer dans les lignes suivantes comment (3.2.31) permet de démontrer qu'il n'y a jamais de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur toute demi-droite ouverte composant la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$.

Soit $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$. Comme l'image numérique $\Sigma(q)$ est un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement positive et strictement plus petite que π , on peut trouver $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$(3.2.32) \quad \operatorname{Re}(\varepsilon iz^{-1}q) \leq 0, \quad \exists(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \operatorname{Re}(\varepsilon iz^{-1}q)(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

En utilisant le théorème 2.8 de [2], on obtient que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$(3.2.33) \quad \begin{aligned} (q(x, \xi)^w - \eta z)^{-1} &= -iz^{-1}\varepsilon(\varepsilon i\eta - \varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w)^{-1} \\ &= -iz^{-1}\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-i\varepsilon\eta s} e^{s\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w} ds. \end{aligned}$$

Il s'ensuit d'après (3.2.31) et (3.2.32) que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|(q(x, \xi)^w - \eta z)^{-1}\| &\leq |z|^{-1} \int_0^{+\infty} \|e^{s\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2)} ds \\ &\leq |z|^{-1} \int_0^{+\infty} M e^{-as} ds = |z|^{-1} \frac{M}{a} < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur la demi-droite $z\mathbb{R}_+^*$. On peut vraiment appliquer le théorème 2.8 de [2] car

$$i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w).$$

En effet, si ce n'était pas le cas, on déduirait de (2.2.7) qu'il existe $u_0 \in B \setminus \{0\}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w u_0 = i\lambda_0 u_0.$$

Comme d'après (3.2.32), la forme quadratique $-\operatorname{Re}(\varepsilon iz^{-1}q)$ est positive, on déduit de l'invariance symplectique de la quantification de Weyl et du théorème 21.5.3 de [8] qu'il existe un opérateur métaplectique U tel que

$$(3.2.34) \quad -[\operatorname{Re}(\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi))]^w = U^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j (D_{x_j}^2 + x_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2 \right) U,$$

où $k, l \in \mathbb{N}$ et $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$. En utilisant que U est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on obtient que

$$\begin{aligned} 0 &= -\operatorname{Re}(i\lambda_0 u_0, u_0)_{L^2} \\ &= -\operatorname{Re}(\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w u_0, u_0)_{L^2} \\ &= -([\operatorname{Re}(\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi))]^w u_0, u_0)_{L^2} \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j (\|D_{x_j} U u_0\|_{L^2}^2 + \|x_j U u_0\|_{L^2}^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} \|x_j U u_0\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

ce qui induit que $u_0 = 0$, car d'après (3.2.32) et (3.2.34), $k + l \geq 1$. Il s'ensuit d'après (2.2.7) qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\sigma(\varepsilon iz^{-1}q(x, \xi)^w) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -\varepsilon_0\}.$$

4. SUR LE PSEUDO-SPECTRE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS NON AUTO-ADJOINTS

Nous allons maintenant étudier les propriétés pseudo-spectrales d'une « vraie » classe d'opérateurs pseudo-différentiels non auto-adjoints. Considérons un opérateur pseudo-différentiel semi-classique

$$P_h = P(x, h\xi; h)^w,$$

défini en quantification de Weyl par un symbole $P(x, \xi; h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ admettant un développement semi-classique

$$P(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j p_j(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

Notons $p := p_0$ son symbole principal et $\Sigma(p)$ son image numérique

$$(4.0.1) \quad \Sigma(p) = p(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n).$$

Commençons par rappeler quel est l'état de l'art concernant l'étude du spectre d'un opérateur pseudo-différentiel semi-classique au voisinage d'un point de la frontière de l'image numérique de son symbole principal. Dans un travail récent [5], N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski ont donné des conditions générales en des points z_0 de la frontière de l'image numérique du symbole principal qui assurent que le spectre d'un opérateur pseudo-différentiel semi-classique

$$P_h = P(x, h\xi; h)^w,$$

reste strictement confiner dans l'intérieur de l'image numérique. La première condition est la condition de type principal

$$(4.0.2) \quad p(x, \xi) = z_0 \Rightarrow dp(x, \xi) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

qui assure que z_0 n'est pas une valeur critique du symbole principal p de P_h , et la seconde est condition dynamique suivante :

$$(4.0.3) \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel qu'aucune trajectoire du champ de vecteurs hamiltonien } H_{\text{Re}(\lambda p)} \text{ associée à la partie réelle du symbole } \lambda p \text{ ne reste entièrement contenue dans l'ensemble } p^{-1}(z_0).$$

Sous ces deux conditions (4.0.2) et (4.0.3), le théorème 1.3 de [5] montre que pour toute constante strictement positive M , il n'y a aucune valeur spectrale de l'opérateur P_h dans toute boule du plan complexe de centre z_0 et de rayon $Mh \log(h^{-1})$ pour peu que le paramètre strictement positif h soit suffisamment petit. Si de plus le symbole d'un tel opérateur satisfait à des hypothèses standard d'analycité, le résultat de [5] précise qu'il existe un voisinage suffisamment petit mais fixe du point z_0 dans le plan complexe qui soit entièrement contenu dans l'ensemble résolvant de l'opérateur P_h lorsque le paramètre h est suffisamment petit.

Par la suite, M. Hitrik a étudié une situation dégénérée dans laquelle la condition de type principal (4.0.2) est violée. Cette situation est celle d'un opérateur pseudo-différentiel semi-classique unidimensionnel

$$P_h = P(x, h\xi; h)^w,$$

défini en quantification de Weyl semi-classique par un symbole $P(x, \xi; h)$ vérifiant une hypothèse d'analycité en les variables (x, ξ) dans un voisinage tubulaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C}^2 , et qui appartient à une classe convenable de symboles⁶ dans laquelle il admet un développement asymptotique semi-classique

$$P(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j p_j(x, \xi).$$

Comme précédemment, on note $p := p_0$ son symbole principal. On suppose que ce symbole p est elliptique au voisinage de l'infini et on considère un point z_0 appartenant à la frontière de son image numérique $\partial\Sigma(p)$ tel que

$$p^{-1}(z_0) \cap \mathbb{R}^2 = \{(x_0, \xi_0)\}.$$

On suppose également que le symbole $p - z_0$ s'annule en (x_0, ξ_0) exactement au second ordre au sens où la hessienne de p en ce point est une forme quadratique elliptique

$$(4.0.4) \quad \frac{1}{2} \langle d^2 p(x_0, \xi_0) X, X \rangle = 0, \quad X = (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X = 0$$

et que la condition suivante de cône extérieur est vérifiée

$$(4.0.5) \quad \exists \varepsilon_0 > 0, \exists \theta_0 \in \mathbb{R}, \quad (z_0 + (0, \varepsilon_0) e^{i(\theta_0 - \varepsilon_0, \theta_0 + \varepsilon_0)}) \cap \Sigma(p) = \emptyset.$$

Sous ces hypothèses, l'image numérique de la hessienne de p au point (x_0, ξ_0) , est nécessairement distincte du plan complexe. Il découle de la proposition 2.2.1 que l'on peut trouver un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ tel que la forme quadratique

$$\langle \text{Re}(\alpha d^2 p(x_0, \xi_0)) X, X \rangle,$$

⁶Voir [6] pour plus de précision concernant cette classe de symboles.

soit définie positive définitive. Dans ce cas, M. Hitrik a démontré qu'il existe un voisinage suffisamment petit mais fixe du point z_0 dans \mathbb{C} dans lequel le spectre de l'opérateur P_h est donné par

$$\tilde{z}_k = z_0 + G\left(h\left(k + \frac{1}{2}\right); h\right) + O(h^\infty), \quad k \in \mathbb{N},$$

où $G(z; h)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 dans \mathbb{C} par rapport à la variable z , qui admet un développement asymptotique dans l'espace des fonctions holomorphes

$$G(z; h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j G_j(z),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, tel que

$$G_0(0) = 0 \text{ et } \arg(G'_0(0)) = \arg(i^{-1}\mu),$$

où μ désigne l'unique valeur propre de l'application hamiltonienne

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p''_{x,\xi}(x_0, \xi_0) & p''_{\xi,\xi}(x_0, \xi_0) \\ -p''_{x,x}(x_0, \xi_0) & -p''_{x,\xi}(x_0, \xi_0) \end{pmatrix},$$

vérifiant $\operatorname{Re}(\alpha i^{-1}\mu) > 0$. La distribution du spectre cet opérateur rappelle bien sûr celle de l'oscillateur harmonique. Cette similarité s'explique par le fait que dans ce cas la hessienne du symbole p , prise au point critique (x_0, ξ_0) , définit en quantification de Weyl un opérateur différentiel quadratique elliptique qui, après une similitude et une conjugaison par un opérateur métaplectique, peut être réduit à l'oscillateur harmonique auto-adjoint ou non auto-adjoint (voir la proposition 2.3.2).

Nous allons maintenant étudier ce qu'il reste des phénomènes d'instabilités spectrales observés dans la section précédente pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux lorsque l'on considère des opérateurs pseudo-différentiels qui peuvent être localement « approximés » par de tels opérateurs. Nous allons plus précisément étudier quels phénomènes apparaissent pour un opérateur pseudo-différentiel unidimensionnel lorsque la hessienne de son symbole principal, en un point critique, définit en quantification de Weyl un opérateur différentiel quadratique elliptique non normal. Nous allons voir dans le théorème 4.2.1 que l'on peut construire pour un tel opérateur des quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini dans tout un sous-ensemble particulier de l'image numérique qui peut selon les opérateurs contenir très largement son spectre.

Commençons par préciser quelques notations et par établir un résultat préliminaire.

4.1. Quelques notations et faits préliminaires.

Lemme 4.1.1. *Considérons une forme quadratique elliptique à valeurs complexes q sur \mathbb{R}^2 vérifiant $\Sigma(q) \neq \mathbb{C}$ et*

$$(4.1.1) \quad \exists(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2, \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

Il existe alors une transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^2 , $\alpha \in \mathbb{C}^$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ tels que*

$$(4.1.2) \quad (q \circ \chi)(x, \xi) = \alpha(x^2 + \xi^2 + i(\gamma_1 x^2 + \gamma_2 \xi^2)).$$

De plus, on peut trouver deux droites D_1 et D_2 de \mathcal{D} , $D_1 \neq D_2$, où \mathcal{D} désigne l'ensemble des droites D de \mathbb{R}^2 concourantes en l'origine $(0, 0)$, telles que

$$(4.1.3) \quad \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x, \xi) = 0\} = D_1 \cup D_2$$

et

$$(4.1.4) \quad \partial\Sigma(q) = q(D_1 \cup D_2).$$

Preuve du lemme 4.1.1. Ce résultat est démontré dans [12].

Remarque. Rappelons que d'après la proposition 2.2.2, la condition (4.1.1) est exactement équivalente au fait que l'opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ défini en quantification de Weyl par cette forme quadratique elliptique est un opérateur *non normal*.

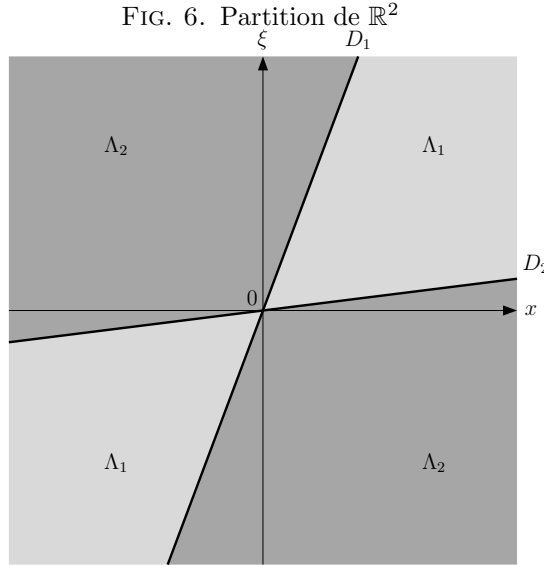
Considérons les ensembles

$$(4.1.5) \quad \Lambda_1 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x, \xi) > 0\}$$

et

$$(4.1.6) \quad \Lambda_2 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x, \xi) < 0\}.$$

On déduit facilement du lemme précédent que ces ensembles permettent de définir une partition de \mathbb{R}^2 (voir la figure suivante). Notons que ces deux ensembles Λ_1 et Λ_2



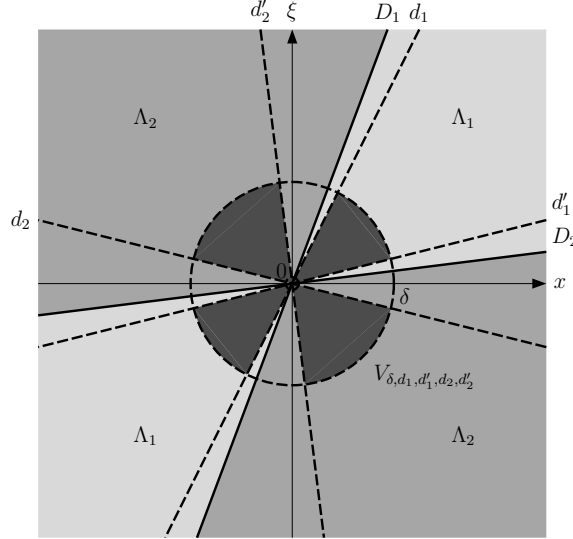
possèdent deux composantes connexes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Considérons maintenant d_1, d'_1, d_2 et d'_2 des éléments de \mathcal{D} , i.e. des droites de \mathbb{R}^2 concourantes en l'origine $(0, 0)$, telles que $d_1 \neq d'_1, d_2 \neq d'_2$,

$$(4.1.7) \quad d_1 \setminus \{(0, 0)\} \cup d'_1 \setminus \{(0, 0)\} \subset \Lambda_1 \text{ et } d_2 \setminus \{(0, 0)\} \cup d'_2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \Lambda_2.$$

On définit par $V_{\delta, d_1, d'_1, d_2, d'_2}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ défini comme l'intersection de la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon δ avec, la réunion du cône défini par les droites d_1 et d'_1 contenu dans Λ_1 et le cône défini par les droites d_2 et d'_2 contenu dans Λ_2 , qui apparaît en noir sur la figure 7.

FIG. 7. Ensemble $V_{\delta, d_1, d'_1, d_2, d'_2}$



4.2. **Énoncé du résultat principal.** Considérons $p \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et posons

$$(4.2.1) \quad q(X) = \frac{1}{2} \langle d^2 p(0, 0) X, X \rangle, \quad X = (x, \xi) \in \mathbb{R}^2.$$

On suppose que le symbole p s'annule en $(0, 0)$ et que cette valeur $(0, 0)$ est une valeur critique

$$(4.2.2) \quad p(0, 0) = 0, \quad dp(0, 0) = 0.$$

On suppose également que la forme quadratique q définie en (4.2.1) est *elliptique* et que

$$(4.2.3) \quad \exists (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

On suppose enfin que la condition suivante de cône extérieur est vérifiée en 0 , i.e. qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(4.2.4) \quad (0, \varepsilon_0) e^{i(\theta_0 - \varepsilon_0, \theta_0 + \varepsilon_0)} \cap \Sigma(p) = \emptyset,$$

où $\Sigma(p) = p(\mathbb{R}^2)$ désigne l'image numérique du symbole p .

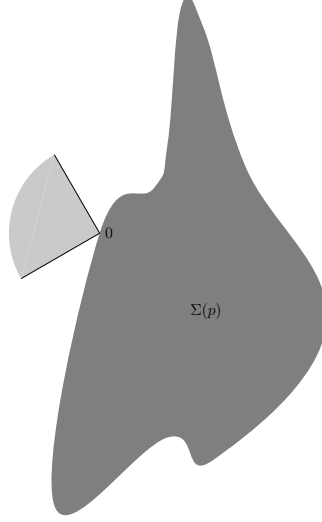
Comme nous l'avons déjà indiqué, les hypothèses (4.2.2) et (4.2.4) induisent que l'image numérique de la hessienne q du symbole p , au point $(0, 0)$, définie en (4.2.1), est nécessairement distincte du plan complexe

$$(4.2.5) \quad \Sigma(q) \neq \mathbb{C}.$$

Théorème 4.2.1. Soient $p \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, q la forme quadratique définie en (4.2.1) et, considérons un symbole $P(x, \xi; h)$ appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ (définie en (3.2.8)) tel que

$$(4.2.6) \quad P(x, \xi; h) \sim p(x, \xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} h^j p_j(x, \xi),$$

FIG. 8. Condition de cône extérieur



où pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, p_j est un symbole appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, indépendant du paramètre semi-classique h . Si les hypothèses énoncées précédemment sont vérifiées, on note D_1 et D_2 les deux droites données par le lemme 4.1.1. En usant des notations introduites en (4.1.5), (4.1.6) et (4.1.7), on obtient que pour toutes droites d_1, d'_1, d_2, d'_2 de \mathcal{D} telles que $d_1 \neq d'_1, d_2 \neq d'_2$, vérifiant (4.1.7), il existe $\delta > 0$ tel que pour tout

$$z \in p(V_{\delta, d_1, d'_1, d_2, d'_2})$$

et $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver une constante $h_0 > 0$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \text{ et } \|P(x, h\xi; h)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+.$$

Nous ne prouverons pas ce résultat ici. Nous renvoyons le lecteur à [12] pour en trouver une démonstration. Précisons néanmoins quels éléments concernant cette démonstration. On distingue en fait dans l'ensemble $p(V_{\delta, d_1, d'_1, d_2, d'_2})$ deux types de points. Le premier type est formé par les points z pour lesquels on peut trouver un couple $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z = p(x_0, \xi_0) \text{ et } \{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(x_0, \xi_0) < 0.$$

Pour ces points, l'existence de quasi-modes semi-classiques est, comme dans le cas des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques, une conséquence du fait que le symbole $p - z$ viole directement la condition $(\bar{\Psi})$ sous cette hypothèse de crochet de Poisson strictement négatif. Le second type est formé par les points z pour lesquels on peut trouver un couple $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z = p(x_0, \xi_0) \text{ et } \{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(x_0, \xi_0) > 0.$$

Pour ces points, on montre que le fait que la hessienne du symbole principal q , prise au point critique, définit un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* induit que le symbole $p - z$ viole également la condition $(\bar{\Psi})$. Cette violation de

la condition $(\overline{\Psi})$ est, comme dans le cas des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques étudié précédemment, une conséquence de la propriété de périodicité du flot associé au champ de vecteurs hamiltonien de la partie réelle $\text{Re}(\alpha q)$ du symbole αq pour un nombre complexe non nul α convenablement choisi⁷.

RÉFÉRENCES

- [1] L.S.Boulton, *Non-self-adjoint harmonic oscillator semigroups and pseudospectra*, J. Operator Theory, **47**, 413-429 (2002).
- [2] E.B.Davies, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London (1980).
- [3] E.B.Davies, *Pseudospectra, the harmonic oscillator and complex resonances*, Proc. R. Soc. Lond. A, **455**, 585-599 (1999).
- [4] E.B.Davies, *Semi-classical states for non-self-adjoint Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys., **200**, 35-41 (1999).
- [5] N.Dencker, J.Sjöstrand, M.Zworski, *Pseudospectra of Semiclassical (Pseudo-)Differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math., **57**, 384-415 (2004).
- [6] M. Hitrik, *Boundary spectral behaviour for semiclassical operators in one dimension*, IMRN **64** (2004), 3417-3438.
- [7] L.Hörmander, *A Class of Hypoelliptic Pseudodifferential Operators with Double Characteristics*, Math. Ann., **217**, 165-188 (1975).
- [8] L.Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* (vol. I,II,III,IV), Springer Verlag (1985).
- [9] T.Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [10] K.Pravda-Starov, *A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator*, J. London Math. Soc. (2) **73**, 745-761 (2006).
- [11] K.Pravda-Starov, *Etude du pseudo-spectre d'opérateurs non auto-adjoints*, PhD Thesis of the University of Rennes 1, France (2006).
- [12] K.Pravda-Starov, *Boundary pseudospectral behaviour for semi-classical operators in one dimension*, to appear in IMRN (2007).
- [13] K.Pravda-Starov, *On the pseudospectrum of elliptic quadratic differential operators*, preprint (2007).
- [14] K.Pravda-Starov, *Contraction semigroups of elliptic quadratic differential operators*, preprint (2007).
- [15] S.Roch, B.Silbermann, *C*-algebra techniques in numerical analysis*, J. Oper. Theory **35**, 241-280 (1996).
- [16] J.Sjöstrand, *Parametrix for pseudodifferential operators with multiple characteristics*, Ark. för Mat., **12**, 85-130 (1974).
- [17] L.N.Trefethen, *Pseudospectra of linear operators*, Siam Review **39**, 383-400 (1997).
- [18] L.N.Trefethen, M.Embree, *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press (2005).
- [19] M.Zworski, *A remark on a paper of E.B.Davies*, Proc. Am. Math. Soc., **129**, 2955-2957 (2001).
- [20] M.Zworski, *Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations*, Comm. Math. Phys., **229**, 293-307 (2002).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CALIFORNIA, EVANS HALL, BERKELEY, CA 94720, USA
E-mail address : karel@math.berkeley.edu

⁷Le flot est toujours périodique en dimension 1. La quasi-périodicité peut apparaître seulement en dimension plus grande que 2.