



SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2006-2007**

Francis Nier

**À propos des fonctions thêta et des réseaux d'Abrikosov**

*Séminaire É. D. P.* (2006-2007), Exposé n° XII, 25 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2006-2007\\_\\_\\_\\_A12\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A12_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# A propos des fonctions thêta et des réseaux d'Abrikosov.

F. Nier

## 1 Introduction.

Nous nous intéressons à des inégalités fonctionnelles pour des fonctions entières sur  $\mathbb{C}$ . Pour  $h > 0$  nous associons à une fonction entière  $f$  la fonction

$$u(z) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{2h}}.$$

Avec ces notations les propriétés d'hypercontractivité du semigroupe des dilatations  $f_t(z) = f(e^{-t}z)$  s'écrivent tout simplement

$$\|u\|_{L^p} \leq C_{p,q,h} \|u\|_{L^q}, \quad \text{pour } p \geq q,$$

avec  $L^p = L^p(\mathbb{C}, L(dz))$  en notant  $L(dz)$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$ . On notera que l'espace

$$\mathcal{F}_h = \{f \in H(\mathbb{C}), u \in L^2\}$$

n'est rien d'autre que l'espace de Bargmann, image de  $L^2(\mathbb{R}, dy)$  par la transformée de Bargmann semiclassique.

Cette inégalité pour laquelle la constante  $C_{p,q,h}$  est obtenue par saturation par les gaussiennes, est très fortement liée aux inégalités de Sobolev logarithmiques qui en sont une version infinitésimale (voir [Car][Gro][Nel] pour plus de détails). L'inégalité réciproque

$$\|u\|_{L^p} \geq K_{p,q,\varepsilon,h} \left\| e^{-\varepsilon|z|^2} u \right\|_{L^q}, \quad (p \geq q)$$

a trivialement un sens pour  $\varepsilon > 0$  et dégénère quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  au sens où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{p,q,\varepsilon,h} = 0$ . En fait le problème de minimisation

$$\inf_{f \text{ entière}} \frac{\|u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^q}} \quad (p \geq q)$$

est mal posé à cause d'un défaut de compacité et une bonne compréhension de cela doit donner des informations précises sur l'explosion de la constante  $K_{p,q,\varepsilon,h}^{-1}$  et plus particulièrement à des constantes explicites dans les inégalités de Sobolev logarithmiques inverses (voir [GaSo][GGs]). Un cas particulièrement intéressant est le cas  $q = 2$  et  $p = 4$  qui est directement lié au problème des réseaux d'Abrikosov intervenant dans la théorie de la supraconductivité, la superfluidité et plus récemment dans l'étude des condensats de Bose-Einstein en rotation rapide

(voir [Abr][KRA][Aft]). Une façon de corriger le défaut de compacité est de rajouter un terme de potentiel confinant (non nécessairement harmonique) comme cela est fait dans les expériences de condensats en rotation rapide. Cela conduit dans le cas harmonique au problème

$$\inf_{f \text{ entière, } \|u\|_{L^2}=1} \int_{\mathbb{C}} |z|^2 |u|^2 + |u|^4 L(dz)$$

qui a été étudié dans [ABN]. A ce jour, aucune minoration précise de l'infimum n'a été établie tandis que la majoration peut-être traitée de façon assez poussée.

Une autre façon d'introduire de la compacité dans le problème, est de considérer des fonctions entières  $f$  telles que  $|u|$  soit périodique. Non seulement cela permet de faire un grand nombre de calculs explicites à l'aide des fonctions thêta, mais de plus cela fournit un modèle local. Dans le cadre de la limite  $h \rightarrow 0$ , l'introduction d'échelles intermédiaires et des techniques de modulation d'amplitude mises en oeuvre dans [ABN], doivent permettre de traiter des situations avec des potentiels confinant ou des situations géométriques plus complexes.

Avec ce cadre périodique, nous rappelons dans cet exposé quelques notions autour des fonctions thêta et présentons quelques calculs. Il apparaîtra que les réseaux réguliers sont des points critiques, une fois fixé un paramètre de forme, et que le réseau hexagonal est un minimum local. Au passage nous montrerons comment le problème de minimisation sous l'hypothèse d'un zéro par cellule de périodicité est exactement le problème des fonctions thêta minimales considéré par Montgomery dans [Mon].

## 2 Définitions, notations.

Compte tenu des différentes notations suivant les auteurs et les points de vue considérés, il n'est pas inutile de fixer précisément les choses.

## 2.1 La fonction thêta.

Les fonctions thêta usuelles sont données en suivant [Cha] par :

$$\theta_0(z, \tau) = \frac{1}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})z} \quad Z_0 = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \quad (2.1)$$

$$\theta_1(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})z} \quad Z_1 = \frac{1}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \quad (2.2)$$

$$\theta_1(z, \tau) = \theta_0\left(\frac{1}{2} - z, \tau\right) = -\theta_0\left(z - \frac{1}{2}, \tau\right) \quad (2.3)$$

$$\theta_2(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} e^{2i\pi n z} \quad Z_2 = \frac{\tau}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \quad (2.4)$$

$$\theta_2(z, \tau) = \theta_0\left(\frac{\tau}{2} - z, \tau\right) q^{\frac{1}{4}} e^{-i\pi z} (-i) \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2i\pi n z} \quad Z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \quad (2.7)$$

$$\theta_3(z, \tau) = \theta_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - z, \tau\right) q^{\frac{1}{4}} e^{-i\pi z}, \quad (2.8)$$

avec  $q = e^{i\pi\tau}$  et en précisant pour chaque  $k = 0, 1, 2, 3$  le lieu  $Z_k = \theta_k^{-1}(\{0\})$ .

Suivant les auteurs  $\theta$  correspond à différents choix :

– **Chandrasekharan [Cha]** :  $\theta = \theta_0$ .

– **Mumford [Mum]** :  $\theta = \theta_3$ .

– **Nonnenmacher-Voros [NoVo]** : Le  $\theta_1$  de Whittaker et Watson [WhWa] correspond ici à  $\theta_0$ . Ils travaillent donc avec  $\theta = \theta_0$ .

Les propriétés de quasipériodicité et de symétrie de  $\theta_0$  et  $\theta_3$  sont :

$$\theta_0(-z, \tau) = -\theta_0(z, \tau) \quad (2.9)$$

$$\theta_0(z+1, \tau) = -\theta_0(z, \tau) \quad (2.10)$$

$$\theta_0(z+\tau, \tau) = -q^{-1} e^{-2i\pi z} \theta_0(z, \tau) = -e^{-2i\pi(z-\frac{\tau}{2})} \theta_0(z, \tau), \quad (2.11)$$

$$\text{et } \theta_3(z+1, \tau) = \theta_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - z - 1, \tau\right) q^{\frac{1}{4}} e^{-i\pi(z+1)} \quad (2.12)$$

$$= -\theta_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - z, \tau\right) q^{\frac{1}{4}} e^{-i\pi z} = \theta_3(z, \tau)$$

$$\theta_3(-z, \tau) = \theta_3(z, \tau) \quad (2.13)$$

$$\theta_3(z+\tau, \tau) = q^{-1} e^{-2i\pi z} \theta_3(z, \tau). \quad (2.14)$$

## 2.2 Espaces $L^2$ .

On pose  $\tau = \tau_R + i\tau_I$ ,  $h = \frac{\tau_I}{\pi}$ . Le paramètre  $h > 0$  est donc fixé ici. Il n'est pas inutile de garder à l'esprit le paramètre  $h$  correspondant au principe d'incertitude. Plus loin la limite

semiclassique sera réintroduite en considérant des cellules de périodicité de grand volume.

$$\mathcal{F}_h = \left\{ f \text{ holomorphe, } \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{h}} L(dz) < +\infty \right\} .$$

En introduisant la fonction  $|u(z)| = e^{-\frac{|z|^2}{2h}}$ , on a

$$\|f\|_{\mathcal{F}_h}^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{h}} L(dz) = \|u\|_{L^2}^2 .$$

Dans [Mum], Mumford travaille plutôt avec l'espace

$$G_h = \left\{ g \text{ holomorphe, } \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-\frac{2\pi|\operatorname{Im} z|^2}{\tau_I}} L(dz) < +\infty \right\} .$$

La correspondance unitaire se fait en posant

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\frac{\pi z^2}{2\tau_I}} g(z) \\ |u(z)|^2 &= e^{-\frac{\pi|z|^2}{\tau_I}} |f(z)|^2 = e^{-\frac{\pi|z|^2}{\tau_I}} e^{\frac{\pi \operatorname{Re} z^2}{\tau_I}} |g(z)|^2 \\ |u(z)|^2 &= e^{-\frac{2\pi(\operatorname{Im} z)^2}{\tau_I}} |g(z)|^2 . \end{aligned}$$

et

$$(f \in \mathcal{F}_h) \Leftrightarrow (g \in G_h) \tag{2.15}$$

avec  $\|f\|_{\mathcal{F}_h} = \|g\|_{G_h}$ .

On notera que si  $f \in \mathcal{F}_h$  peut être vue comme image d'un vecteur  $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dy)$  par la transformée de Bargmann,  $|u|^2(z)$  n'est rien d'autre que la fonction de Husimi associée à  $\psi$ , c'est à dire le symbole de Wick du projecteur  $|\psi\rangle\langle\psi|$ . C'est le point de vue du travail de Nonnenmacher et Voros [NoVo].

### 2.3 Translations de phase.

Nous rappelons maintenant comment sont définies les translations de phase sur  $\mathcal{F}_h$  et leur traduction sur  $G_h$ .

Pour  $z_0 \in \mathbb{C}$  on définit la translation de phase  $\tau_{z_0}^h$  par

$$\tau_{z_0}^h f(z) = e^{\frac{\bar{z}_0(z-z_0)}{2h}} f(z-z_0) = e^{\frac{\pi}{2\tau_I} \bar{z}_0(z-z_0)} f(z-z_0) .$$

On remarque que pour  $u(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2h}} f(z)$ , cela se traduit par

$$u_{z_0}(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2h}} [\tau_{z_0}^h f](z) = e^{-\frac{|z|^2}{2h}} e^{\frac{\bar{z}_0(2z-z_0)}{h}} f(z-z_0)$$

et finalement par

$$|u_{z_0}(z)| = e^{-\frac{|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z) + |z_0|^2}{2h}} |f(z-z_0)| = |u(z-z_0)| . \tag{2.16}$$

Cela assure que  $\tau_{z_0}^h$  est un opérateur unitaire, pour toutes les normes  $\|u\|_{L^p}$ . On ne sera pas surpris de la relation entre  $|u_{z_0}(z)|^2 = |u(z - z_0)|^2$  donnant l'action des translations de phase sur les fonctions de Husimi.

Sur  $G_h$  cela se traduit par

$$\begin{aligned} (\tau_{z_0}^h f)(z) &= e^{\frac{\pi}{2\tau_I} \bar{z}_0 (2z - z_0)} e^{\frac{\pi |z - z_0|^2}{2\tau_I}} g(z - z_0) \\ &= e^{\frac{\pi}{2\tau_I} z^2} (\tilde{\tau}_{z_0} g)(z) \\ \text{avec } (\tilde{\tau}_{z_0} g)(z) &= e^{-i\frac{2\pi}{\tau_I} (\text{Im } z_0) z} e^{-\frac{\pi}{\tau_I} (\text{Im } z_0)^2} e^{i\frac{\pi}{\tau_I} (\text{Im } z_0) (\text{Re } z_0)} g(z - z_0) \end{aligned}$$

En introduisant les translations  $S_b$  et  $T_a$  définies par Mumford dans [Mum] pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , cela donne

$$\begin{aligned} (S_b g)(z) &= g(z + b) = (\tilde{\tau}_{-b} g)(z) \\ (T_a g)(z) &= e^{2i\pi a z} e^{i\pi a^2 \tau} g(z + a\tau) = (\tilde{\tau}_{-a\tau} g)(z) \end{aligned}$$

**Exemples :** Pour la fonction  $\theta_3$  on obtient

$$\begin{aligned} (S_1 \theta_3)(z) &= \theta_3(z + 1) = \theta_3(z) \\ (T_1 \theta_3)(z) &= e^{2i\pi z} e^{i\pi \tau} \theta_3(z + \tau) = \theta_3(z). \end{aligned}$$

La relation entre  $\theta_0$  et  $\theta_3$  est donnée par

$$\begin{aligned} S_{-\frac{1}{2}} T_{-\frac{1}{2}} \theta_0 &= S_{-\frac{1}{2}} \left[ e^{-i\pi z} e^{i\frac{\pi \tau}{4}} \theta_0 \left( z - \frac{\tau}{2}, \tau \right) \right] \\ &= e^{-i\pi \left( z - \frac{1}{2} \right)} e^{i\frac{\pi \tau}{4}} \theta_0 \left( z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, \tau \right) = \theta_3(z, \tau). \end{aligned}$$

En inversant  $T_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} = -S_{\frac{1}{2}} T_{\frac{1}{2}}$  et en posant suivant [Mum]

$$\theta_{a,b} = S_b T_a \theta_3 \quad \text{pour } a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

on obtient

$$\theta_{0,0} = \theta_3 \quad \text{et} \quad \theta_0 = -\theta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

**Relations CCR :** La forme symplectique naturelle sur  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  via l'identification  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\xi)$  est

$$\sigma(z, z') = 2 \text{Im}(\bar{z} z').$$

La composition de deux translations de phase est donnée par

$$\tau_{z_1}^h \circ \tau_{z_2}^h = e^{i\frac{2 \text{Im} \bar{z}_1 \cdot z_2}{2h}} \tau_{z_1 + z_2}^h$$

et on obtient

$$\tilde{\tau}_{z_1} \circ \tilde{\tau}_{z_2} = e^{i\frac{\pi \text{Im} \bar{z}_1 \cdot z_2}{\tau_I}} \tilde{\tau}_{z_1 + z_2} = e^{i\pi(b_1 a_2 - a_1 b_2)} \tilde{\tau}_{z_1 + z_2}$$

en prenant pour la dernière égalité  $z_k = -b_k - a_k\tau$ ,  $k = 1, 2$ .

**Exemple :**

$$S_b T_a = \tilde{\tau}_{-b} \circ \tilde{\tau}_{-a\tau} = e^{2i\pi ab} T_a S_b.$$

Dans [Mum], Mumford introduit la représentation du groupe de Heisenberg donnée par groupe des translations de phase sous la forme,

$$U_{(\lambda, a, b)} = \lambda T_a S_b = \lambda \tilde{\tau}_{-a\tau} \circ \tilde{\tau}_{-b} = \lambda e^{i\pi ab} \tilde{\tau}_{-b-a\tau},$$

pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  ou  $\lambda \in \mathbb{S}^1$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On rappelle la loi de composition

$$(\lambda, a, b) \circ (\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' e^{2i\pi ba'}, a + a', b + b').$$

## 2.4 Fonctions thêta de plusieurs variables.

Pour exprimer les quantités finales, il est commode d'introduire les fonctions thêta de plusieurs variables. Une définition possible associe à une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^d$  une fonction thêta.

**Definition 2.1.** Pour  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive et pour  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^d$ , la quantité  $\theta(\gamma, \delta, A)$  est définie par

$$\theta(\gamma, \delta, A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{-\pi(n+\gamma).A(n+\gamma)} e^{2i\pi\delta.n}$$

où  $x.y$  est le produit scalaire usuel de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Une conséquence de la formule de Poisson donne

**Proposition 2.2.** Pour  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  symétrique définie positive et pour  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$\theta(\gamma, \delta, A) = \frac{e^{-2i\pi\delta.\gamma}}{(\det A)^{1/2}} \theta(\delta, -\gamma, A^{-1}).$$

**Preuve :** On utilise la formule de Poisson

$$|V_L| \sum_{n \in L} \delta(x - \ell) = \sum_{\ell \in L^*} e^{i\ell.x}$$

avec ici  $L = \mathbb{Z}^d$ ,  $|V_L| = 1$  et  $L^* = (2\pi\mathbb{Z})^d$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(n+\gamma).A(n+\gamma)} e^{2i\pi\delta.x} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \delta(x - n) \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(x+\gamma).A(x+\gamma)} e^{2i\pi\delta.x} \left( \sum_{\ell \in (2\pi\mathbb{Z})^d} e^{i\ell.x} \right) dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(x+\gamma).A(x+\gamma)} e^{\pi[2i(\delta+\ell).(x+\gamma)]} e^{-2i\pi(\delta+\ell).\gamma} dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \frac{e^{-2i\pi\delta.\gamma}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\pi(\ell+\delta).A^{-1}(\delta+\gamma)} \\ &= \frac{e^{-2i\pi\delta.\gamma}}{(\det A)^{1/2}} \theta(\delta, -\gamma, A^{-1}). \end{aligned}$$

■

Comme cas particulier on retrouve la formule donnée dans [Cha]

$$\theta(\pm\delta, 0, A) = (\det A)^{-1/2} \theta(0, \pm\delta, A^{-1}). \quad (2.18)$$

Une définition plus générale consiste à poser pour une matrice  $\Omega \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , symétrique,  $\Omega^t = \Omega$ , de partie imaginaire  $\text{Im } \Omega = \frac{1}{2i}(\Omega - \overline{\Omega}) = \frac{1}{2i}(\Omega - \Omega^*)$  définie positive, pour  $a, b \in \mathbb{R}^d$  et  $z \in \mathbb{C}^d$ ,

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{i\pi(n+a) \cdot \Omega(n+a)} e^{2i\pi(n+a) \cdot (z+b)}.$$

La quantité  $\theta(\gamma, \delta, A)$  correspond au cas

$$\Omega = iA, \quad a = \gamma \in \mathbb{R}^d, \quad b = \delta \in \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad z = 0,$$

et la Proposition 2.2 est un cas particulier de l'invariance modulaire par rapport à  $\Omega$  (voir[Mum]). Le cas qui nous intéressera plus particulièrement est celui de la forme quadratique associée au réseau hexagonal :

$$x \cdot A_{\pm} x = \frac{1}{\tau_I} |x_1 \tau \pm x_2|^2 \quad \text{avec} \quad \tau = e^{2i\pi/3}.$$

Parmi les nombreuses propriétés du réseau hexagonal (voir [CoSl]), l'auto-dualité se traduit par

$$A_+ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A_+) = 1 \quad \text{et} \quad A_+^{-1} = A_- = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\theta(\gamma, \delta, A_+) = e^{-2i\pi\gamma \cdot \delta} \theta(\delta, -\gamma, A_-) = e^{-2i\pi\gamma \cdot \delta} \theta((\delta_1, \delta_2), (\gamma_1, -\gamma_2), A_+)$$

et va jouer un rôle important.

### 3 Fonctions entières $f, g$ et périodicité de $|u|$ .

On rappelle les relations pour  $f \in \mathcal{F}_h$ ,

$$f(z) = e^{\frac{z^2}{2h}} g(z), \quad h = \frac{\pi}{\tau_I}$$

$$u(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2h}} f(z) = e^{-\frac{|z|^2 - z^2}{2h}} g(z).$$

Etant donné un réseau (à isométrie près)

$$\mathcal{L} = \ell(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), \quad \ell > 0,$$

avec  $\tau = \tau_R + i\tau_I$  et

$$|\tau| \geq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \tau_R < \frac{1}{2} \quad (\tau_R \leq 0 \text{ if } |\tau| = 1),$$



on précise les fonctions  $g$  entières telles que

$$|u(z + \ell)| = |u(z)| \quad |u(z + \ell\tau)| = |u(z)| .$$

La contrainte de périodicité sur  $|u|$  entraîne avec  $h = \pi/\tau_I$

$$\frac{|S_\ell g(z)|}{|g(z)|} = \frac{|g(z + \ell)|}{|g(z)|} = \frac{\left| e^{\frac{|z+\ell|^2 - (z+\ell)^2}{2h}} \right|}{\left| e^{\frac{|z|^2}{2h}} \right|} = \left| e^{\frac{2 \operatorname{Re} z - 2z}{2h/\ell}} \right| = 1$$

et

$$\frac{|(T_\ell g)(z)|}{|g(z)|} = e^{\ell \operatorname{Re} 2i\pi z} \left| e^{\frac{2 \operatorname{Re}(\bar{\tau}z) - 2\tau z}{2h/\ell}} \right| = 1 .$$

Ainsi  $\frac{S_\ell g}{g}$  et  $\frac{T_\ell g}{g}$  sont deux fonctions entières de module 1. Il existe deux constantes  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$  telles que

$$S_\ell g = e^{2i\pi\varphi_1} g \quad \text{et} \quad T_\ell g = e^{2i\pi\varphi_2} g . \quad (3.1)$$

**Proposition 3.1.** *On fixe le réseau  $\mathcal{L} = \ell(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$  comme précédemment. Soit  $g$  une fonction entière telle que  $u(z) = e^{-\frac{\pi(|z|^2 - z^2)}{2\tau_I}} g(z)$  a un module  $\mathcal{L}$ -périodique. Si  $g$  a  $N$ -zéros,  $z_1, \dots, z_N$  comptés avec multiplicité, dans  $\{t_1 + t_2\tau, t_1, t_2 \in [0, \ell)\}$  alors on a*

a)  $\ell = N^{1/2}$  ;

b)  $g$  est proportionnelle à

$$e^{-\frac{2i\pi}{N\tau_I} \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^N z_k)z} \prod_{k=1}^N \theta_0\left(\frac{z - z_k}{N^{1/2}}, \tau\right) ;$$

c)  $g$  vérifie de plus les conditions de quasipériodicité (3.1) pour  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  donnés par

$$\sum_{k=1}^N z_k = \left(\varphi_2 - \frac{N}{2}\right)\ell + \left(\frac{N}{2} - \varphi_1\right)\ell\tau \quad \text{mod}(\mathcal{L}) . \quad (3.2)$$

**Preuve :** a) On sait que la périodicité de  $|u|$  impose les conditions de quasipériodicité (3.1). On en déduit de

$$g(z + \ell) = e^{2i\pi\varphi_1} g(z)$$

et

$$e^{2i\pi\ell z} e^{i\pi\ell^2} g(z + \tau\ell) = (T_\ell g)(z) = g(z)$$

la valeur  $\ell^2$  pour l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

sur le bord d'une cellule de périodicité  $Q$ . D'où  $N = \ell^2$ .

b) et c) Pour  $\varphi_1 \in \mathbb{R}$  on pose

$$g_0(z) = e^{-2i\pi\frac{(N/2 - \varphi_1)z}{\ell}} \prod_{k=1}^N \theta_0\left(\frac{z - z_k}{\ell}, \tau\right) .$$

On a

$$\begin{aligned} S_\ell g_0(z) &= e^{-2i\pi(N/2-\varphi_1)} e^{-2i\pi \frac{(N/2-\varphi_1)}{\ell} z} \prod_{k=1}^N \theta_0 \left( \frac{z - z_k}{\ell} + 1, \tau \right) \\ &= e^{2i\pi\varphi_1} g_0(z). \end{aligned}$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} T_\ell g_0(z) &= e^{2i\pi\ell z} e^{i\pi\ell^2\tau} e^{-2i\pi(N/2-\varphi_1)\tau} e^{-\frac{2i\pi}{\ell}(N/2-\varphi_1)z} \prod_{k=1}^N \theta_0 \left( \frac{z - z_k}{\ell} + \tau, \tau \right) \\ &= e^{2i\pi\ell z} e^{i\pi\ell^2\tau} e^{-2i\pi(N/2-\varphi_1)\tau} (-1)^N e^{-i\pi\tau N} e^{-\frac{2i\pi}{\ell}z} g_0(z) = e^{2i\pi\varphi_2} g_0(z), \end{aligned}$$

en prenant  $\varphi_2$  tel que

$$\sum_{k=1}^N z_k = \left( \varphi_2 - \frac{N}{2} \right) \ell + \left( \frac{N}{2} - \varphi_1 \right) \ell \tau.$$

Avec les hypothèses faites sur  $g$ , la fonction  $\frac{g(z)}{g_0(z)}$  est holomorphe et de module périodique. D'où la deuxième assertion. ■

**Remarque 3.2.** Nous rappelons ici l'interprétation (très classique) de ces propriétés :

- Pour  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  fixés, la condition de quasi-périodicité (3.1) nous dit que les objets qui nous intéressent sont des sections holomorphes d'un fibré en droite sur le tore  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ .
- Les propriétés b) et c) font le lien avec l'ensemble des fonctions méromorphes  $\mathcal{L}$ -périodiques dont les pôles sont fixés (notion de diviseur en géométrie algébrique).
- La propriété a) est une contrainte venant du principe d'incertitude sur la quantification géométrique du tore que nous précisons plus loin. La limite  $\ell$  ou  $N \rightarrow \infty$  est une limite semiclassique, avec petit paramètre  $h' = N^{-1} = \ell^{-2}$  étudiée par de nombreux auteurs (voir [NoVo] [ShZe][BoGu]).

## 4 Quantification du tore.

On se donne le réseau  $\mathcal{L} = \ell\mathbb{Z} + \ell\tau\mathbb{Z}$  et on pose

$$N = \ell^2, \quad h = \frac{\pi}{\tau_I}, \quad \tau = \tau_R + i\tau_I.$$

Toutes les intégrales sont faite sur une cellule de périodicité et on pose

$$\oint a(z) L(z) = \frac{\int_Q a(z) L(dz)}{\int_Q 1 L(dz)}, \quad Q + \mathcal{L} = \mathbb{C},$$

ainsi que

$$\|g\|_2^2 = \int |u(z)|^2 L(dz)$$

et

$$\|g\|_4^4 = \int |u(z)|^4 L(dz).$$

On veut donc étudier l'infimum de la quantité

$$\frac{\int |u(z)|^4 L(dz)}{(\int |u(z)|^2 L(dz))^2} = \frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4}, \quad (4.1)$$

où  $u(z) = e^{-\frac{|z|^2 - z^2}{2h}} g(z)$  vérifie les conditions

- $g$  est holomorphe,
- $|u|$  est  $\mathcal{L}$ -périodique.

D'après la Section 3, cela se traduit par

$$S_\ell g = e^{2i\pi\varphi_1} \quad T_\ell = e^{2i\pi\varphi_2} g$$

et on peut se ramener par translation de phase (sans changer la quantité (4.1)) au cas  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .

Nous allons donner diverses expressions explicites de la quantité (4.1).

## 4.1 Espaces de Hilbert sur le tore.

Revenons sur le groupe de Heisenberg

$$U_{(\lambda, a, b)} = \lambda T_a \circ S_b$$

$$(\lambda, a, b) \circ (\lambda', a', b') = \left( \lambda \lambda' e^{2i\pi b a'}, a + a', b + b' \right).$$

L'ensemble

$$\Gamma = \{(1, a, b), \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$$

en est un sous-groupe discret isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . On peut aussi considérer pour  $\ell \in \mathbb{N}$

$$\ell\Gamma = \{(1, a, b), \quad a, b \in \ell\mathbb{Z}\}.$$

**Definition 4.1.** Pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , l'espace  $V_\ell$  est défini par

$$V_\ell = \{g \text{ entière}, \quad U_{(1, a, b)} g = g, \forall (1, a, b) \in \ell\Gamma\}.$$

Comme espace de Hilbert, il est muni de la norme  $\|\cdot\|_2$  et du produit scalaire associé noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Nous rappelons la caractérisation suivante (voir [Mum]) qui assure que  $V_\ell$  est un espace de dimension  $N = \ell^2$  (nombre de zéros par cellule).

**Lemme 4.2.** Une fonction entière  $g$  appartient à  $V_\ell$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) si et seulement si

$$g(z) = \sum_{n \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} c_n e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z}$$

avec la contrainte  $c_m = c_n$  si  $m - n \in \ell\mathbb{Z}$ .

**Preuve :** La périodicité  $g(z + \ell) = g(z)$  permet d'écrire

$$g(z) = \sum_{n \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} c'_n e^{2i\pi n z}$$

et on pose  $c'_n = c_n e^{i\pi \tau n^2}$ . La deuxième contrainte

$$\begin{aligned} T_\ell g(z) &= e^{i\ell^2 \pi \tau} e^{2i\pi \ell z} g(z + \tau) \\ &= \sum_{n \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} c_n e^{i\pi n^2 \tau} e^{i\pi \ell^2 \tau} e^{2i\pi \ell z} e^{2i\pi n(z + \ell \tau)} \\ &= \sum_{m \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} c_{m-\ell} e^{i\pi m^2 \tau} e^{2i\pi m z}, \end{aligned}$$

conduit à  $c_m = c_n$  si  $m - n \in \ell\mathbb{Z}$ . ■

## 4.2 Calcul des normes sur $V_\ell$ .

On peut préciser la série de Fourier de la fonction  $|u|^2$  en fonction des coefficients  $(c_n)_{n \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})}$  de  $g$ .

**Lemme 4.3.** Pour  $g = \sum_{n \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} c_n e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z} \in V_\ell$ , la fonction  $u(z) = e^{-\pi \frac{|z|^2 - z^2}{2\tau I}} g(z)$  vérifie

$$|u(x + y\tau)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\tau I} \ell} \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} \hat{U}_{k_1, k_2} e^{2i\pi(k_1 x + k_2 y)} \quad (4.2)$$

$$\text{avec } \hat{U}_{k_1, k_2} = \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} c_{k_1 + \omega} \overline{c_\omega} e^{2i\pi k_2 \omega} e^{i\pi k_1 k_2} e^{-\frac{\pi}{2\tau I} |k_1 \tau - k_2|^2}. \quad (4.3)$$

**Preuve :** On a

$$|u(z)|^2 = e^{-2\pi \frac{(\text{Im } z)^2}{\tau I}} \sum_{n_1, n_2 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})} c_{n_1} \overline{c_{n_2}} e^{i\pi n_1^2 \tau - i\pi n_2^2 \tau} e^{2i\pi(n_1 z - n_2 \bar{z})}.$$

En posant  $z = x + y\tau$ , cela donne

$$|u(x + y\tau)|^2 = \sum_{n_1, n_2 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})} c_{n_1} \overline{c_{n_2}} e^{i\pi[\tau(n_1 + y)^2 - \tau(n_2 + y)^2]} e^{2i\pi(n_1 - n_2)x}.$$

De l'expression de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi[\tau(n_1+y)^2 - \bar{\tau}(n_2+y)^2]} e^{-i\eta y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\tau_I}} e^{-\frac{\pi}{\tau_I} |(n_1-n_2)\tau - \frac{\eta}{2\pi}|^2} e^{i\frac{\eta(n_1+n_2)}{2}},$$

on déduit

$$\begin{aligned} \widehat{|u|^2}(x, \eta) &= \int_{\mathbb{R}} |u(x + y\tau)|^2 e^{-i\eta y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\tau_I}} \sum_{n_1, n_2 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})} c_{n_1} \bar{c}_{n_2} e^{-\frac{\pi}{2\tau_I} |(n_1-n_2)\tau - \frac{\eta}{2\pi}|^2} e^{i\frac{\eta(n_1+n_2)}{2}} e^{2i\pi(n_1-n_2)x} \end{aligned}$$

et en prenant

$$k_1 = n_1 - n_2 \text{ puis } n_2 = \ell j_2 + \omega, j_2 \in \mathbb{Z}, \omega \in \left\{ 0, \frac{1}{\ell}, \dots, \frac{\ell^2 - 1}{\ell} \right\},$$

$$\widehat{|u|^2}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\tau_I}} \left[ \sum_{\substack{k_1 \in \ell^{-1}\mathbb{Z} \\ \omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})}} c_{k_1+\omega} \bar{c}_{\omega} e^{-\frac{\pi}{2\tau_I} |k_1\tau - \frac{\eta}{2\pi}|^2} e^{i\frac{\eta k_1}{2}} e^{2i\pi k_1 x} e^{i\eta\omega} \right] \times \left[ \sum_{j_2 \in \mathbb{Z}} e^{i\eta \ell j_2} \right].$$

La formule de Poisson dit que le dernier facteur est égal à

$$\frac{2\pi}{\ell} \sum_{k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} \delta(\eta - 2\pi k_2).$$

La transformée de Fourier inverse

$$|u(x + \tau y)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{|u|^2}(x, \eta) e^{i\eta y} \frac{d\eta}{2\pi}$$

conduit alors à

$$\hat{U}_{k_1, k_2} = \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} c_{k_1+\omega} \bar{c}_{\omega} e^{-\frac{\pi}{2\tau_I} |k_1\tau - k_2|^2} e^{i\pi k_1 k_2} e^{2i\pi k_2 \omega}.$$

Cette expression de  $|u|^2$  conduit à ■

**Proposition 4.4.** *Pour  $g = \sum_{n \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} c_n e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z} \in V_{\ell}$ , la fonction  $u(z) = e^{-\pi \frac{|z|^2 - z^2}{2\tau_I}} g(z)$*

vérifie

$$\int |u(z)|^2 L(dz) = \frac{1}{\sqrt{2\tau_I}\ell} \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} |c_\omega|^2 \quad (4.4)$$

$$\int |u(z)|^4 L(dz) = \frac{1}{2\tau_I\ell^2} \sum_{k_1, k_2 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})} e^{-\frac{\pi}{\tau_I}|k_1\tau - k_2|^2} \left| \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} c_{k_1+\omega} \overline{c_\omega} e^{2i\pi k_2\omega} \right|^2 \quad (4.5)$$

$$\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4} = \frac{\sum_{k_1, k_2 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})} e^{-\frac{\pi}{\tau_I}|k_1\tau - k_2|^2} \left| \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} c_{k_1+\omega} \overline{c_\omega} e^{2i\pi k_2\omega} \right|^2}{\left( \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} |c_\omega|^2 \right)^2} \quad (4.6)$$

**Preuve :** Il suffit de calculer l'intégrale et la norme  $L^2$  d'une série de Fourier. ■

### 4.3 Traduction des translations de phase sur les coefficients $c_\omega$ .

D'après la Section 2.3, on sait qu'une translation de phase, c'est à dire  $U_{(\lambda, a, b)}$  avec  $|\lambda| = 1$  préserve le caractère entier de  $g$ , la  $\mathcal{L}$ -périodicité de  $|u|$  et la quantité  $\int |u|^2$ . Néanmoins l'appartenance d'une fonction entière  $g$  à  $V_\ell$  est caractérisée par

$$S_\ell g = g \quad \text{et} \quad T_\ell g = g$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{\ell^2} z_k = \frac{\ell}{2}(1 + \tau) \pmod{\mathcal{L}}.$$

Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que  $U_{(\lambda, a, b)}$  agisse sur  $V_\ell$  est  $a, b \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})$ . On introduit donc le sous-groupe du groupe de Heisenberg

$$\mathcal{G}_\ell = \left\{ U_{(\lambda, a, b)}, \lambda^{\ell^2} = 1, a, b \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z} \right\},$$

qui est un groupe de transformations unitaires de  $V_\ell$ .

On introduit une première base de  $V_\ell$  qui permet d'expliciter l'action de  $\mathcal{G}_\ell$ .

**Definition 4.5.** Pour  $\omega_0 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})$  on note  $e_{\omega_0}$  l'élément de  $V_\ell$  donné par

$$e_{\omega_0} = (2\tau_I\ell^2)^{\frac{1}{4}} \sum_{m \in \ell\mathbb{Z}} e^{i\pi(m+\omega_0)^2\tau} e^{2i\pi(m+\omega)z}.$$

L'expression de la norme  $\| \cdot \|_2$  de la Proposition 4.4 indique que la base  $(e_\omega)_{\omega_0 \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})}$  est orthonormée.

Pour  $g = \sum_\omega c_\omega e_\omega \in V_\ell$ ,  $a$  et  $b$  dans  $\ell^{-1}\mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} S_b g(z) &= g(z+b) = \sum_\omega c_\omega e^{2i\pi b\omega} e_\omega(z) \\ T_a g(z) &= e^{2i\pi a z} e^{i\pi a^2 \tau} g(z+a\tau) \\ &= e^{2i\pi a z} e^{i\pi a^2 \tau} \sum_\omega c_\omega \left[ \sum_{m \in \ell\mathbb{Z}} e^{i\pi(m+\omega)^2 \tau} e^{2i\pi(m+\omega)(z+a\tau)} \right] \\ &= \sum_\omega c_\omega \left[ \sum_{m \in \ell\mathbb{Z}} e^{i\pi(m+\omega+a)^2 \tau} e^{2i\pi(m+\omega+a)z} \right] \\ &= \sum_\omega c_{\omega-a} e_\omega. \end{aligned}$$

Dans la base  $(e_\omega)_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})}$  de  $V_\ell$ , les translations  $S_a$  et  $T_b$  pour  $a$  et  $b$  dans  $\ell^{-1}\mathbb{Z}$  sont données par

$$\begin{aligned} S_b &: (c_\omega)_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} \rightarrow (e^{2i\pi b\omega} c_\omega)_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} ; \\ T_a &: (c_\omega)_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} \rightarrow (c_{\omega-a})_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} . \end{aligned}$$

On en déduit l'expression suivante pour  $\|g\|_4^4 = f |u|^4$ .

**Proposition 4.6.**

$$\forall g \in V_\ell, \quad \|g\|_4^4 = \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\tau_I} |k_1 \tau - k_2|^2} |\langle g, S_{k_2} T_{-k_1} g \rangle|^2 .$$

**Preuve :** Il suffit de remarquer

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\tau_I \ell}} \sum_\omega c_{k_1+\omega} \overline{c_\omega} e^{2i\pi k_2 \omega} &= \frac{1}{\sqrt{2\tau_I \ell}} \sum_\omega e^{-2i\pi k_2 \omega} \overline{c_\omega} \cdot c_{\omega - (-k_1)} \\ &= \langle S_{-k_2} g, T_{-k_1} g \rangle . \end{aligned}$$

■

## 5 Etude du quotient $\|g\|_4^4 / \|g\|_2^4$ .

On considère la question de la minimisation de

$$\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4} = \|g\|_2^{-4} \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\tau_I} |k_1 \tau - k_2|^2} |\langle g, S_{k_2} T_{-k_1} g \rangle|^2 .$$

Le résultat attendu est que le minimum vaut

$$\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\tau_I} |n_1 \tau + n_2|^2} \quad \text{pour } \tau = j = e^{2i\pi/3},$$

c'est à dire pour une distribution uniforme de zéros suivant un réseau hexagonal. Nous allons préciser tous les résultats partiels qui vont dans ce sens.

## 5.1 Le cas $\ell = 1$ .

Dans ce cas l'espace  $V_\ell$  est de dimension 1 et la quantité  $\|g\|_4^4 / \|g\|_2^4$  est le réel paramétré par  $\tau$  :

$$\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4} = \sum_{n_1, n_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\tau_I} |n_1 \tau - n_2|^2} = \theta(0, 0, A_\tau)$$

en introduisant la fonction  $\theta$  associée à la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  de matrice

$$A_\tau = \frac{1}{\tau_I} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & -\tau_R \\ -\tau_R & 1 \end{pmatrix}.$$

L'optimisation par rapport au paramètre  $\tau$  a été considérée avec des méthodes différentes par Nonnenmacher et Voros dans [NoVo] et antérieurement par Montgomery dans [Mon] : Le minimum est atteint pour le réseau hexagonal  $\tau = j = e^{2i\pi/3}$  avec la valeur  $\theta(0, 0, A_j) \sim 1,159$ .

## 5.2 Choix d'une bonne base.

Comme le minimum pour  $\ell > 1$  est censé être atteint pour une distribution uniforme de zéros, nous introduisons la base faite de fonctions thêta associées à des distributions uniformes de zéros. En suivant [Mum] on pose

$$\theta_{0,0}(z) = (2\tau_I)^{1/4} \theta_3(z) = (2\tau_I)^{1/4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2} e^{2i\pi n z}.$$

Dans la base  $(e_\omega)_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})}$  de la Section 4.3 c'est le vecteur unitaire,  $\|\theta_{0,0}\|_2 = 1$ , donné par

$$\theta_{0,0} = \sum_{\omega} c_\omega e_\omega \quad \text{avec} \quad c_\omega = \begin{cases} (2\tau_I)^{1/4} & \text{si } \omega \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Definition 5.1.** Pour  $(a, b) \in \{0, \frac{1}{\ell}, \dots, \frac{\ell-1}{\ell}\}^2$  on pose

$$\theta_{a,b} = S_b T_a \theta_{0,0}.$$

**Représentation de  $\theta_{a,b}$  dans la base  $(e_\omega)_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})}$  :** On écrit les coordonnées de  $g = \sum_{\omega \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})/(\ell\mathbb{Z})} c_\omega e_\omega$  sous la forme d'un tableau

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_{\frac{1}{\ell}} & \cdots & c_{\frac{\ell-1}{\ell}} \\ c_1 & c_{\frac{\ell+1}{\ell}} & \cdots & c_{\frac{2\ell-1}{\ell}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{\ell-1} & c_{\ell-1+\frac{1}{\ell}} & \cdots & c_{\ell-1+\frac{\ell-1}{\ell}} \end{pmatrix}.$$



Le vecteur  $\theta_{0,0}$  est

$$(2\tau_I)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\theta_{a,0} = T_a \theta_{0,0}$  est

$$(2\tau_I)^{1/4} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec des 1 sur la  $(a\ell)$ -ième colonne.

Et enfin  $\theta_{a,b} = S_b \theta_{a,0}$  est

$$(2\tau_I)^{1/4} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & e^{2i\pi b a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{2i\pi b(a+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{2i\pi b(a+\ell-1)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où seule la  $(a\ell)$ -ième colonne est non nulle.

**Notations :** On rappelle les notations  $[r]$  pour la partie entière d'un réel  $r \in \mathbb{R}$  et  $\{r\} = r - [r]$  pour sa partie fractionnaire.

De cette écriture on déduit aisément.

**Proposition 5.2.** *La famille  $(\theta_{a,b})_{a,b \in \{0, \frac{1}{\ell}, \dots, \frac{\ell-1}{\ell}\}}$  forme une base orthonormée de  $V_\ell$  pour laquelle on a*

$$\forall k \in (\ell^{-1}\mathbb{Z}), \quad T_k \theta_{a,b} = e^{-2i\pi b[a+k]} \theta_{\{a+k\}, b} \quad (5.1)$$

$$S_k \theta_{a,b} = e^{2i\pi [b+k]a} \theta_{a, \{b+k\}}. \quad (5.2)$$

**Remarque 5.3.** *Avec ce résultat et notamment avec (5.1) et (5.2), il vaut mieux indexer  $\theta_{a,b}$  par  $a$  et  $b$  dans  $\{0, \frac{1}{\ell}, \dots, \frac{\ell-1}{\ell}\}$  plutôt que par  $(\ell^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ .*

Pour  $\theta_{0,0} = \theta_3$  on a  $\theta_{0,0}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . On en déduit que d'une façon générale les zéros de  $\theta_{a,b}$  sont sur le réseau

$$-b + \frac{1}{2} + (-a + \frac{1}{2})\tau + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}.$$

En fait les fonctions  $\theta_{a,b}$  sont à une constante près les seules éléments de  $V_\ell$  dont les zéros sont sur un réseau régulier.

**Proposition 5.4.** *Si  $g \in V_\ell$  vérifie*

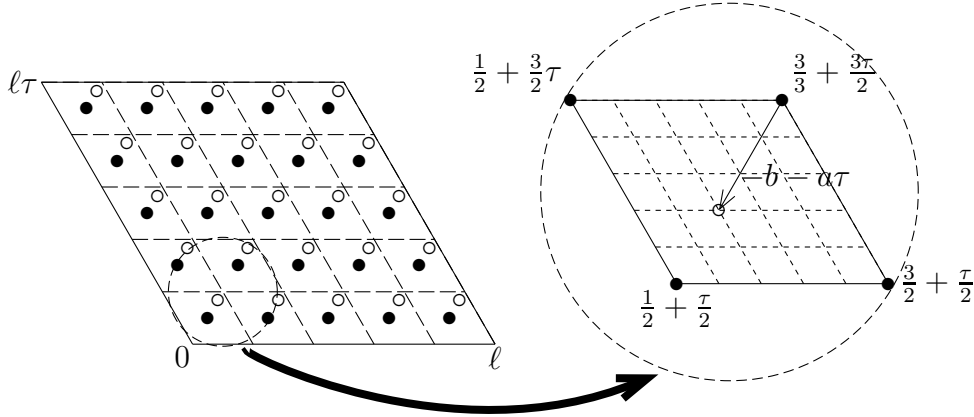
$$g^{-1}(\{0\}) = (-b_g - a_g \tau) + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$$

*alors  $a_g$  et  $b_g$  appartiennent à  $\ell^{-1}\mathbb{Z}$  et en posant  $a = \{a_g\}$  et  $b = \{b_g\}$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $g = \lambda \theta_{a,b}$ .*

**Preuve :** Il suffit de noter que la contrainte

$$\sum_k^{\ell^2} z_k = \ell \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \right) \pmod{\mathcal{L}}$$

implique  $a_g \in \ell^{-1}\mathbb{Z}$  et  $b_g \in \ell^{-1}\mathbb{Z}$ . Ensuite le quotient  $g/\theta_{a,b}$  est holomorphe périodique, donc constant. ■



**Fig 1.** Zéros de  $\theta_{00}$  (•) et  $\theta_{a,b}$  (◦), pour  $a, b \in \{0, \frac{1}{\ell}, \dots, \frac{\ell-1}{\ell}\}$ .

On peut maintenant calculer la quantité  $\|g\|_4^4$  dans cette base.

**Proposition 5.5.** Pour

$$g = \sum_{a,b \in \{0, 1/\ell, \dots, (\ell-1)/\ell\}} g_{a,b} \theta_{a,b}$$

la quantité  $\|g\|_4^4$  vaut

$$\|g\|_4^4 = \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\tau} |k_1 \tau + k_2|^2} |\langle g, S_{k_2} T_{k_1} g \rangle|^2,$$

$$\begin{aligned} \text{avec } |\langle g, S_{k_2} T_{k_1} g \rangle|^2 &= \sum_{a_1, b_1, a_2, b_2 \in \{0, \dots, \frac{\ell-1}{\ell}\}} g_{\{a_1+k_1\}, \{b_1+k_2\}} \overline{g_{\{a_2, b_1\}}} \overline{g_{\{a_1+k_1, b_2+k_2\}}} g_{a_2, b_2} \\ &\times e^{-2i\pi([b_1+k_2]\{a_1+k_1\} - b_1[a_1+k_1])} \times e^{2i\pi([b_2+k_2]\{a_2+k_1\} - b_2[a_2+k_1])}. \end{aligned}$$

**Preuve :** Il suffit d'utiliser

$$S_{k_2} T_{k_1} \theta_{a,b} = e^{-2i\pi[a+k_1]b} e^{2i\pi[b+k_2]\{a+k_1\}} \theta_{\{a+k_1\}, \{b+k_2\}},$$

et d'écrire le produit scalaire  $\langle g, S_{k_2} T_{k_1} g \rangle$  dans la base orthonormée  $(\theta_{a,b})_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}}$  :

$$\langle g, S_{k_2} T_{k_1} g \rangle = \sum_{a,b} \overline{g_{\{a+k_1\}, \{b+k_2\}}} g_{a,b} e^{2i\pi([b+k_2]\{a+k_1\} - b[a+k_1])}.$$

### 5.3 Les distributions uniformes de zéros sont des points critiques.

Au lieu de chercher à minimiser le quotient  $\|g\|_4^4 / \|g\|_2^4$ , l'homogénéité nous permet de considérer à la place la fonction

$$\Phi_{4,2}(g) = \|g\|_4^4 - \left( \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|n_1\tau + n_2|^2} \right) \|g\|_2^4 \quad (5.3)$$

sur la sphère  $\{\|g\|_2 = 1\}$ .

**Proposition 5.6.** *Pour  $\tau$  fixé, tout élément de la base  $(\theta_{a,b})_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}}$  est un point critique pour la fonction  $\Phi_{4,2}$  sur la sphère  $\{\|g\|_2 = 1\}$ .*

**Preuve :** L'invariance par les translations de phase de la fonction  $\Phi_{4,2}$  et le fait que  $\theta_{a,b} = S_b T_a \theta_{0,0}$  permettent de ne considérer que  $\theta_{0,0}$ . Reprenons le calcul précédent pour

$$\begin{aligned} g &= \theta_{0,0} + tg' \\ \text{avec } g' &= \sum_{\substack{a, b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\} \\ (a, b) \neq (0, 0)}} g'_{a,b} \theta_{a,b}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle g, S_{k_2} T_{k_1} g \rangle &= \delta_{\mathbb{Z}^2}(k_1, k_2) + t \left( \overline{g'_{\{k_1\}, \{k_2\}}} e^{2i\pi[k_2]\{k_1\}} + e^{2i\pi\{-k_1\}[-k_2]} g'_{\{-k_1\}, \{-k_2\}} \right) \\ &\quad + t^2 \langle g', S_{k_2} T_{k_1} g' \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\theta_{0,0} + tg'\|_4^4 &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|n_1\tau + n_2|^2} + 0 \times t \quad (5.4) \\ &\quad + t^2 \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|k_1\tau + k_2|^2} \left[ 2\delta_{\mathbb{Z}^2}(k_1, k_2) \operatorname{Re} \langle g', S_{k_2} T_{k_1} g' \rangle \right. \\ &\quad \quad \left. + \left| e^{2i\pi[k_2]\{k_1\}} \overline{g'_{\{k_1\}, \{k_2\}}} + e^{2i\pi\{-k_2\}[-k_1]} g'_{\{-k_1\}, \{-k_2\}} \right|^2 \right] \\ &\quad + t^3 \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|k_1\tau + k_2|^2} 2 \operatorname{Re} \left[ \overline{(e^{2i\pi[k_2]\{k_1\}} \overline{g'_{\{k_1\}, \{k_2\}}} + e^{2i\pi\{-k_2\}[-k_1]} g'_{\{-k_1\}, \{-k_2\}})} \langle g', S_{k_2} T_{k_1} g' \rangle \right] \\ &\quad + t^4 \sum_{k_1, k_2 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|k_1\tau + k_2|^2} |\langle g', S_{k_2} T_{k_1} g' \rangle|^2. \end{aligned}$$

Pour obtenir  $\Phi_{4,2}(\theta_{0,0} + tg')$ , il suffit de retrancher

$$\left( \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|n_1\tau + n_2|^2} \right) \|\theta_{0,0} + tg'\|_2^4 = \left( \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{T}|n_1\tau + n_2|^2} \right) \left( 1 + 2t^2 \|g'\|_2^2 + t^4 \|g'\|_2^4 \right),$$

ce qui ne change pas l'absence de terme en  $t^1$ . ■

## 6 Etude du cas $\tau = e^{2i\pi/3}$ .

Les résultats qui suivent montrent que les distributions de zéros uniformes suivant un réseau hexagonal donnent des minima locaux.

**Proposition 6.1.** *On se restreint au cas  $\tau = e^{2i\pi/3}$  avec  $\ell > 1$ . Le spectre de la Hessienne de la fonction  $\Phi_{4,2}$  restreinte à la sphère  $\{\|g\|_2 = 1\}$  en un élément de la base  $(\theta_{a,b})_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}}$  est*

$$\left\{ 2\theta((a, b), (0, 0), A_+) - \theta(0, 0, A_+) - |\theta((a, b), (b, -a), A_+)|, \right. \\ \left. (a, b) \in \{0, 1/\ell, \dots, (\ell-1)/\ell\}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}$$

où chaque valeur propre a la multiplicité 2, la Hessienne étant associée à la structure euclidienne réelle.

Il n'est pas difficile de vérifier numériquement

$$\forall (a, b) \in \left\{ 0, 1/\ell, \dots, \frac{\ell-1}{\ell} \right\}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 2\theta((a, b), (0, 0), A_+) - \theta(0, 0, A_+) - |\theta((a, b), (b, -a), A_+)| > 0. \quad (6.1)$$

On en déduit :

**Corollaire 6.2.** *Une fois le paramètre  $\tau$  fixé égal à  $j = e^{2i\pi/3}$ , les éléments de la base  $(\theta_{a,b})_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}}$  sont des minima locaux de la quantité  $\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4}$ .*

Nous reviendrons dans les commentaires du paragraphe suivant sur la question de la vérification numérique. Pour se convaincre qu'une preuve analytique de la positivité (6.1) ne coule pas de source, on pourra considérer les autres formes d'inégalités suivantes.

**Proposition 6.3.** *Les trois assertions suivantes vérifient les relations logiques (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c) :*

(a) *Pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$ , la quantité*

$$2\theta((a, b), (0, 0), A_+) - \theta(0, 0, A_+) - |\theta((a, b), (b, -a), A_+)|$$

*est positive ou nulle.*

(b) *Pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$ , la quantité*

$$2\theta((a, b), (0, 0), A_+)^2 - \theta(0, 0, A_+)^2 - |\theta((a, b), (b, -a), A_+)|^2$$

*est positive ou nulle.*

(c) Pour tout  $\delta \in [0, 1]^2$ , le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} \sum_{p \in (2\mathbb{Z})^2} e^{-\frac{\pi}{2}pA+p} \sin^2(\pi\delta p) \\ \sum_{p \in (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}+1)} e^{-\frac{\pi}{2}pA+p} \sin^2(\pi\delta p) \\ \sum_{p \in (2\mathbb{Z}+1) \times (2\mathbb{Z})} e^{-\frac{\pi}{2}pA+p} \sin^2(\pi\delta p) \\ \sum_{p \in (2\mathbb{Z}+1)^2} e^{-\frac{\pi}{2}pA+p} \sin^2(\pi\delta p) \end{pmatrix}.$$

est de type temps pour la forme quadratique donnée par

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Preuve de la Proposition 6.1 :** Le développement au deuxième ordre de  $\Phi_{4,2}(\theta_{0,0} + tg')$  donne d'après (5.4) le coefficient

$$\begin{aligned} 2\partial_g^2 \Phi_{4,2}(\theta_{0,0}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi n \cdot A + n} \langle g', S_{n_2} T_{n_1} g' \rangle \\ &+ \sum_{k \in (\ell^{-1}\mathbb{Z})^2} e^{-\pi k \cdot A + k} \left[ |g'_{\{k_1\}, \{k_2\}}|^2 + |g'_{\{-k_1\}, \{-k_2\}}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} \left[ e^{2i\pi([k_2]\{k_1\} - \{-k_2\}\{-k_1\})} g'_{\{k_1\}, \{k_2\}} g'_{\{-k_1\}, \{-k_2\}} \right] \right] \\ &- 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi n \cdot A + n} \|g'\|_2^2, \end{aligned}$$

pour le terme en  $t^2$ . Le premier terme se calcule avec

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi n \cdot A + n} \langle g', S_{n_2} T_{n_1} g' \rangle &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi n \cdot A - n} \langle g', S_{n_2} T_{-n_1} g' \rangle \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi n \cdot A - n} \sum_{a, b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} e^{2i\pi(n_2 a + n_1 b)} |g'_{a,b}|^2 \\ &= 2 \sum_{a, b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \theta(0, (b, a), A_-) |g'_{a,b}|^2 \\ &\stackrel{(2.18)}{=} 2 \sum_{a, b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \theta((b, a), 0, A_+) |g'_{a,b}|^2 \\ &= 2 \sum_{a, b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[(n_1+b)^2 + (n_1+b)(n_2+a) + (n_2+a)^2]} \right] |g'_{a,b}|^2 \\ &\stackrel{n_1 \leftrightarrow n_2}{=} 2 \sum_{a, b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \theta((a, b), 0, A_+) |g'_{a,b}|^2. \end{aligned}$$

En introduisant la décomposition  $k_1 = a + n_1$  et  $k_2 = b + n_2$  avec  $n_i = [k_i]$ ,  $a = \{k_1\}$  et  $b = \{k_2\}$ , dans le deuxième terme, on obtient

$$\begin{aligned}
2\partial_{g'}^2 \Phi_{4,2}(\theta_{0,0}) &= 2 \sum_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \theta((a, b), 0, A_+) |g'_{a,b}|^2 \\
&\quad + \sum_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{T}|(n_1+a)\tau+(n_2+b)|^2} \left( |g'_{a,b}|^2 + |g'_{\{-a\}, \{-b\}}|^2 \right) \\
&\quad + \sum_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{T}|(n_1+a)\tau+(n_2+b)|^2} e^{-2i\pi(n_2a - \{-n_2-b\}[-n_1-a])} \right. \\
&\hspace{20em} \left. g'_{a,b} g'_{\{-a\}, \{-b\}} \right] \\
&\quad - 2 \sum_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \theta(0, 0, A_+) |g'_{a,b}|^2 \\
&= \sum_{a,b \in \{0, \dots, (\ell-1)/\ell\}} \lambda_{a,b} |g'_{a,b}|^2 + \lambda_{a,b} |g'_{\{-a\}, \{-b\}}|^2 + 2 \operatorname{Re} \left( (\alpha_{a,b} + i\beta_{a,b}) g'_{a,b} g'_{\{-a\}, \{-b\}} \right) .
\end{aligned}$$

On a posé

$$\begin{aligned}
\lambda_{a,b} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} 2e^{-\frac{\pi}{T}|(n_1+a)\tau+(n_2+b)|^2} - e^{-\frac{\pi}{T}|n_1\tau+n_2|^2} = 2\theta((a, b), (0, 0), A_+) - \theta(0, 0, A_+) , \\
\alpha_{a,b} &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{T}|(n_1+a)\tau+(n_2+b)|^2} e^{-2i\pi(n_2a - \{-n_2-b\}[-n_1-a])} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{T}|(n_1+a)\tau+(n_2+b)|^2} e^{-2i\pi(n_2a - bn_1)} e^{-2i\pi b[-a]} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ e^{-2i\pi b[-a]} \theta((a, b), (b, -a), A_+) \right] , \\
\beta_{a,b} &= \operatorname{Im} \left[ e^{-2i\pi b[-a]} \theta((a, b), (b, -a), A_+) \right] .
\end{aligned}$$

Il nous reste à étudier la forme quadratique définie sur  $\mathbb{C}^2$  par

$$\lambda |z_1|^2 + \lambda |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re} [(\alpha + i\beta)z_1 z_2] ,$$

avec  $\lambda \geq 0$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . En posant  $z_k = x_k + iy_k$  c'est la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^4$  associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 & -\beta \\ \alpha & \lambda & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda & -\alpha \\ -\beta & 0 & -\alpha & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix} ,$$

où les blocs  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B$  commutent. Son polynôme caractéristique n'est autre que

$$\det(M - X \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = [(\lambda - X)^2 - \alpha^2 - \beta^2]^2$$

et ses valeurs propres  $\lambda \pm |\alpha + i\beta|$ . ■

**Preuve de la Proposition 6.3 :** Pour  $\gamma = (a, b)$  et  $\delta = (b, -a)$ , on veut vérifier la positivité de

$$2\theta(\gamma, 0, A_+) - \theta(0, 0, A_+) - |\theta(\gamma, \delta)| \geq \frac{2}{\theta(0, 0, A_+)} \left( \theta^2(\gamma, 0, A_+) - \theta^2(0, 0, A_+) + \theta^2(\gamma, 0, A_+) - \theta(\gamma, \delta, A_+) \overline{\theta(\gamma, \delta, A_+)} \right).$$

Avec (2.18), on a

$$\theta((a, b), (0, 0), A_+) = \theta((0, 0), (-a, -b), A_-) = \theta((0, 0), (b, -a), A_+).$$

Nous avons donc à minorer

$$[\theta^2(0, \delta, A_+) - \theta^2(0, 0, A_+)] + [\theta^2(\gamma, 0, A_+) - \theta^2(\gamma, \delta, A_+) \theta(\gamma, -\delta, A_+)] = -\mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(\gamma).$$

On a

$$\theta(\gamma, \delta, A_+) \theta(\gamma, -\delta, A_+) = \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi[(n+\gamma)A_+(n+\gamma) + (n'+\gamma)A_+(n'+\gamma)]} e^{2i\pi\delta \cdot (n-n')}$$

et

$$\begin{aligned} \theta^2(\gamma, 0, A_+) - |\theta(\gamma, \delta, A_+)|^2 &= \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi[(n+\gamma)A_+(n+\gamma) + (n'+\gamma)A_+(n'+\gamma)]} \operatorname{Re} [1 - e^{2i\pi\delta \cdot (n-n')}] \\ &= 2 \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi[(n+\gamma)A_+(n+\gamma) + (n'+\gamma)A_+(n'+\gamma)]} \sin^2(\pi\delta \cdot (n - n')) \\ \theta^2(0, \delta, A_+) - \theta^2(0, 0, A_+) &= -2 \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}^2} e^{-\pi(nA_+ + n'A_+)} \sin^2(\pi\delta(n - n')). \end{aligned}$$

En introduisant le changement d'indices

$$p = \frac{n + n'}{2}, \quad q = n - n'$$

la quantité  $\mathcal{A}(\gamma)$  devient

$$\mathcal{A}(\gamma) = \theta^2(\gamma, 0, A_+) - |\theta(\gamma, \delta, A_+)|^2 = 2 \sum_{q, p \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{2}qA_+} \sin^2(\pi\delta q) e^{-2\pi(p+\gamma+a_q)A_+(p+\gamma+a_q)},$$

en posant

$$a_q = (a_{q1}, a_{q2}) \quad , \quad a_q = \widehat{q} \text{ dans } (1/2\mathbb{Z})^2/\mathbb{Z}^2.$$

En utilisant

$$\theta(a_q + \gamma, 0, 2A_+) = \frac{1}{2}\theta(0, -a_q - \gamma, \frac{1}{2}A_-) = \frac{1}{2}\theta(0, (a_{q2}, -a_{q1}) + \delta, \frac{1}{2}A_+)$$

on obtient

$$\mathcal{A}(\gamma) - \mathcal{A}(0) = 2 \sum_{q,p \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{2}[qA+q+pA+p]} \sin^2(\pi\delta q) [e^{2i\pi\gamma p} - 1] e^{2i\pi(a_{q_2}p_1 - a_{q_1}p_2)} .$$

Puisque la quantité est réelle et avec  $e^{2i\pi(a_{q_2}p_1 - a_{q_1}p_2)} = (-1)^{q_2p_1 - q_1p_2}$ , on en déduit

$$\mathcal{A}(\gamma) - \mathcal{A}(0) = -2 \sum_{q,p \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\pi}{2}[qA+q+pA+p]} (-1)^{q_2p_1 - q_1p_2} \sin^2(\pi\delta q) \sin^2(\pi\delta p) = -2V.BV .$$

■

## 7 Commentaires.

- a) Des résultats précis sur le problème de minimisation sur le tore doit conduire dans l'asymptotique d'un grand nombre de tourbillons ( $h \rightarrow 0$  ou  $\ell \rightarrow \infty$ ), par des partitions de l'unité multiéchelle et des techniques similaires à celles introduite dans [ABN], à une bonne compréhension du problème de minimisation dans des géométries variées, avec des potentiels confinants, voire pour des problèmes de type Ginzburg-Landau ou Gross-Pitaevskii sans la contrainte de plus bas niveau de Landau. Une telle analyse est considérée dans le travail récent de Aftalion-Serfaty[AS].
- b) Dans le même esprit que le a), le tore particulier  $\tau = j = e^{2i\pi/3}$  fournit un modèle local pour les autres tores dans l'asymptotique  $\ell \rightarrow \infty$ . Pour  $\tau \neq j$  et dans l'asymptotique  $\ell \rightarrow \infty$ , on s'attend à ce que localement les tourbillons se disposent suivant un réseau hexagonal tandis que des dislocations permettent d'ajuster cette disposition à la forme du réseau imposée par  $\tau \neq j$ .
- c) Il est intéressant de noter que pour  $\ell \in \mathbb{N}^*$  fixé, les fonctions  $\theta_{a,b}$  sont des minima locaux de  $\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4}$  est quand  $\tau$  reste dans un voisinage  $\mathcal{V}_\ell$  de  $j = e^{2i\pi/3}$ . En effet la Hessienne pour  $\tau = j$  est non dégénérée avec une borne inférieure du spectre minorée par une puissance de  $\ell^{-2}$ . Il serait intéressant d'étudier les bifurcations (ou transitions de phase) par rapport à  $\tau$  dans la minimisation de  $\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4}$ , en fonction de  $\ell$ . L'information sur la hessienne indique que le réseau régulier est bien élastique à petite échelle et devient moins robuste quand le nombre de tourbillons augmente.
- d) Le calcul de toutes les valeurs propres de la Hessienne donné dans la Proposition 6.1 doit conduire à des résultats pour la dynamique hamiltonienne linéarisée dans l'esprit de [Ni]. Cela doit donner des informations très explicites sur les modes de vibration des condensats, aussi appelés modes de Tkatchenko.
- e) La vérification numérique qui conduit au Corollaire 6.2 peut être
  - faite pour toute valeur fixée de  $\ell \in \mathbb{N}^*$  ;
  - rendue rigoureuse car il est aisé d'avoir des contrôles explicites sur la dérivée de la quantité à minorer en dehors de  $(a, b) = (0, 0)$  et sur les premiers termes du développement



limité au point  $(a, b) = (0, 0)$ . Une discrétisation assez fine dépendant de la précision machine (un ordinateur calcule avec des intervalles) et de ces estimations permet de vérifier l'inégalité (6.1) pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$ .

- f) L'écriture du b) de la Proposition 6.3 fait penser à utiliser les identités de Riemann (voir [Mum]) pour les fonctions thêta pour déduire (6.1). Cela n'a pas abouti à ce jour.
- g) Compte tenu des points b) et c), on ne peut espérer de solution analytique simple de la minimisation globale de  $\frac{\|g\|_4^4}{\|g\|_2^4}$  que dans le cas  $\tau = j$ . Pour résoudre ce problème qui reste ouvert et probablement crucial, il est impératif de bien prendre en compte les propriétés spécifiques du réseau hexagonal, comme l'auto-dualité déjà utilisée ici pour l'étude des minima locaux.

**Remerciements :** L'auteur tient à remercier A. Aftalion, X. Blanc, A. Chambert-Loir, B. Helffer, C. Mourougane, S. Nonnenmacher et A. Voros pour diverses discussions autour de ce problème.

## Références

- [Abr] A.A. Abrikosov Magnetic properties of group II Superconductors. J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR) 32(5) (1957), pp 1147–1182.
- [Aft] A. Aftalion, Vortices in Bose Einstein condensates. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 67, Birkhauser, 2006.
- [ABN] A. Aftalion, X. Blanc, F. Nier. Lowest Landau Level functional and Bargmann spaces for Bose Einstein Condensates. Journal Functional Analysis 241(2) (2006) 661-702.
- [AS] A. Aftalion, S. Serfaty. Lowest Landau level approach in superconductivity for the Abrikosov lattice close to Hc2. prépublication.
- [BoGu] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin. The spectral theory of Toeplitz operators. Annals of Mathematics Studies, 99. Princeton University Press, (1981).
- [Car] E. Carlen Some Integral Identities and Inequalities for Entire Functions and Their Application to the Coherent State Transform. J. Funct. Analysis 97 (1991).
- [Cha] K. Chandrasekharan *Elliptic Functions* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 281, Springer (1985).
- [CoSl] J.H. Conway and N.J. Sloane. *Sphere packing*. 2nd edition, Springer (1993).
- [GGS] F. Galaz-Fontes, L. Gross, S.B. Sontz Reverse hypercontractivity over manifolds. Ark. Mat. 39 (2001), no. 2, 283–309.
- [GaSo] F. Galaz-Fontes, S.B. Sontz On two reverse inequalities in the Segal-Bargmann space. Proceedings of the Symposium on Mathematical Physics and Quantum Field Theory (Berkeley, CA, 1999), 103–111, Electron. J. Differ. Equ. Conf., 4 (2000).
- [Gro] L. Gross Hypercontractivity on complex manifolds. Acta Math. 182, (1999).

- [KRA] W.H. Kleiner, L.M. Roth and S.H. Autler. Bulk Solutions of Ginzburg-Landau Equations for type II Superconductors : Upper Critical Field Region. *Phys. Rev.* 133(5A) (1964), pp 1226–1227.
- [Mon] H.L. Montgomery. Minimal theta functions. *Glasgow Math. J.* 30 (1988) pp 75-85.
- [Mum] D. Mumford. *Tata lectures on theta. I.*, Progress in Mathematics 28, Birkhäuser (1983).
- [Nel] E. Nelson A quartic interaction in two dimensions in *Mathematical Theory of Elementary Particles* 69–73, MIT Press (1966), 69–73.
- [Ni] F. Nier. Bose-Einstein condensates in the Lowest Landau Level : Hamiltonian dynamics. *Reviews in Mathematical Physics*, 19(1) (2007) 101-130.
- [NoVo] S. Nonnenmacher, A. Voros, Chaotic Eigenfunctions in Phase Space, *J. Stat. Phys.* 92 (1998) 431-518.
- [ShZe] B. Shiffman and S. Zelditch Distribution of zeroes of random and quantum chaotic sections of positive line bundles *Comm. Math. Phys.* 200(3), 661-683 (1999).
- [WhWa] E.T. Whittaker, G.N. Watson *A Course in Modern Analysis. An introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions.* Cambridge University Press, (1962).

Université de Rennes  
 IRMAR  
 Campus de Beaulieu  
 35042 RENNES CEDEX