



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz



ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

# Equations aux Dérivées Partielles

## 2005-2006

Fausto Ferrari, Bruno Franchi, et Hervé Pajot

**Courbure et sous-ensembles de courbes rectifiables dans le groupe de Heisenberg**

*Séminaire É. D. P.* (2005-2006), Exposé n° XII, 10 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2005-2006\\_\\_\\_\\_A12\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2005-2006____A12_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# COURBURE ET SOUS-ENSEMBLES DE COURBES RECTIFIABLES DANS LE GROUPE DE HEISENBERG

FAUSTO FERRARI, BRUNO FRANCHI, AND HERVÉ PAJOT

RÉSUMÉ. Nous présentons une condition suffisante pour qu'un compact dans le groupe de Heisenberg (muni de sa structure de Carnot-Carathéodory) soit contenu dans une courbe rectifiable. Cette condition est aussi nécessaire dans le cas de courbes régulières (en particulier, des géodésiques) et elle est inspirée du lemme géométrique faible dû à Peter Jones dans le cas euclidien. Cette note repose sur l'exposé fait par le troisième auteur (au Séminaire X-EDP) et décrit les principaux résultats de l'article [FFP1].

## 1. INTRODUCTION : LE CAS EUCLIDIEN

Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. A quelle(s) condition(s) un compact  $E \subset X$  est-il contenu dans une courbe rectifiable  $\Gamma$  de  $X$ ? Nous souhaiterions aussi avoir une estimation de la longueur de la courbe la plus courte contenant  $E$ . Ceci est le problème géométrique du voyageur de commerce (ou encore problème du voyageur de commerce des analystes). Ici, espace métrique géodésique signifie que tout couple de points peut être joint par une courbe dont la longueur réalise la distance entre les deux points. Cette hypothèse implique l'existence de beaucoup de courbes rectifiables et donc donne un sens à notre problème! Rappelons qu'une courbe rectifiable est une courbe de longueur finie et qu'elle admet toujours un paramétrage lipschitzien (par exemple, par longueur d'arc). Ainsi, une autre formulation possible dans le cas d'un espace métrique (géodésique ou non) est de se demander à quelle(s) conditions un compact  $E$  de  $X$  peut s'écrire  $E = f(I)$  où  $I$  est un sous-ensemble de  $[0, 1]$  et  $f : I \rightarrow X$  est lipschitzienne. Dans ce cas, nous souhaitons contrôler la constante de Lipschitz de  $f$ .

Une condition nécessaire évidente (dans le cas euclidien) pour qu'un ensemble  $E$  soit contenu dans une courbe rectifiable est que  $E$  soit de 1-mesure de Hausdorff finie. Rappelons que, pour  $s \geq 0$ , la  $s$ -mesure de Hausdorff de  $E$  dans  $(X, d)$  est

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam} B_i)^s; E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i, \text{diam} B_i \leq \delta \right\} \right),$$

et sa dimension de Hausdorff est alors  $\text{Hdim}(E) = \inf\{s \geq 0, H^s(E) = 0\}$  (ou de façon équivalente  $\text{Hdim}(E) = \sup\{s \geq 0, H^s(E) = \infty\}$ ). En particulier, dans le cas

---

Les auteurs bénéficient d'un support partiel de la part du réseau européen "Harmonic Analysis and Related Problems" (HARP). Les deux premiers auteurs sont soutenus par l'Université de Bologne (Funds for selected topics) et par un projet GNAMPA "Analysis in metric spaces and subelliptic equations" (INdAM, Italie).

d'une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ , la 1-mesure de Hausdorff correspond à la longueur et est donc finie si la courbe est rectifiable. Notons aussi que, dans le cas où  $X = \mathbb{R}$ ,  $H^1$  (en tant que mesure extérieure) coïncide avec la mesure de Lebesgue. La condition précédente n'est pas suffisante. En effet, prenons, dans le plan complexe euclidien, l'ensemble de Cantor 4-coins qui se construit de la façon suivante. L'ensemble  $E_0$  est le carré unité. Divisons-le en 16 carrés égaux de longueur de côtés  $1/4$ . L'ensemble  $E_1$  est alors formé des 4 carrés situés dans les coins de  $E_0$  (Voir figure 1). De manière générale, l'ensemble  $E_j$  est formé de  $4^j$  carrés de longueur de côté  $4^{-j}$  qui se trouvent dans les coins des carrés de  $E_{j-1}$ . L'ensemble de Cantor 4-coins est  $E = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j$ . Il est clair que  $E$  est de mesure de Hausdorff finie. Pourtant, il n'est pas contenu dans une courbe de longueur finie. En fait, cet ensemble est purement non rectifiable, c'est à dire satisfait  $H^1(E \cap \Gamma) = 0$  pour toute courbe rectifiable  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ . Voir [Ma] pour plus de détails sur la mesure de Hausdorff et la théorie de la rectifiabilité.

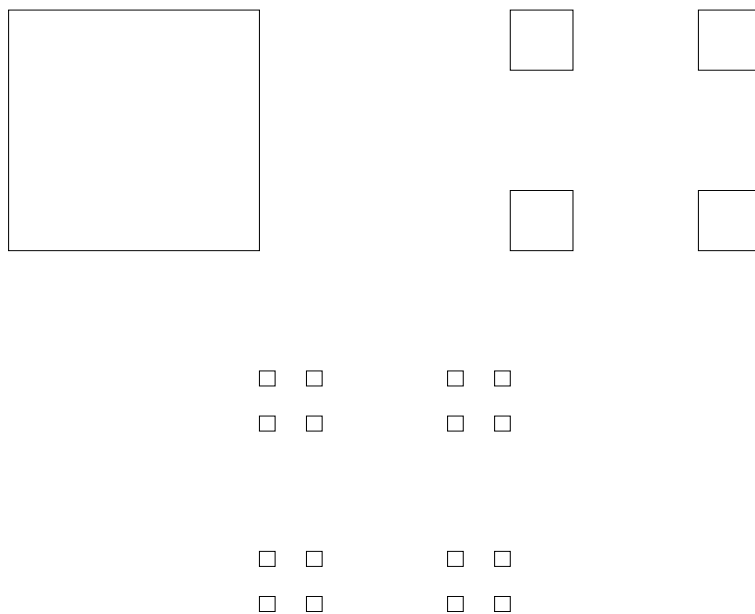


FIG. 1. Les ensembles  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$

Le cas des espaces euclidiens a été considéré par P. Jones [J2]. Sa motivation venait de l'étude de l'opérateur de Cauchy (voir [J1]). Nous allons décrire ses travaux dans cette introduction. Très récemment, le problème a été abordé pour d'autres géométries : les espaces de Hilbert par R. Shul [Sc], le groupe de Heisenberg par les auteurs [FFP1], et même le cas général des espaces métriques par I. Hahlomaa [Ha1]. Les sections suivantes présenteront les résultats de [FFP1]. Signalons au lecteur que les résultats d'Hahlomaa sont loins d'impliquer de façon triviale les résultats de [FFP1].

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un compact. L'idée de Peter Jones est de mesurer en tout point et à toutes les échelles comment  $E$  est approximé par des droites. Pour cela, il a introduit les nombres  $\beta$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t > 0$ , posons

$$\beta_\infty(x, t) = \inf_L \sup_{y \in E \cap B(x, t)} \frac{d(y, L)}{t}$$

où l'infimum est pris sur toutes les droites  $L$  de  $\mathbb{R}^n$ . Plaçons nous dans le cas où  $E$  est une courbe et considérons un point  $x$  de  $E$  où la courbe admet une tangente. Alors,  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta_\infty(x, t) = 0$ . Nous pouvons donc nous attendre à ce que  $E$  soit contenu dans une courbe rectifiable si ses nombres  $\beta$  sont petits. En fait, la condition de Jones s'exprime en termes d'intégrabilité des  $\beta$ .

Posons  $\beta(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \beta_\infty(x, t)^2 d\mathcal{L}^n(x) \frac{dt}{t^n}$ , où  $\mathcal{L}^n$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1** (P. Jones, K. Okikiolu). *Soit  $E$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $E$  est contenu dans une courbe rectifiable  $\Gamma$  si et seulement si  $\beta(E) < +\infty$ . De plus, dans ce cas,*

$$C^{-1}(\beta(E) + \text{diam}E) \leq \inf_{\Gamma \supseteq E} l(\Gamma) \leq C(\beta(E) + \text{diam}E)$$

où la constante  $C > 0$  ne dépend que de  $n$ .

Le fait que la finitude de  $\beta(E)$  implique l'existence d'une courbe contenant  $E$  est du à Peter Jones [J2]. La réciproque est aussi démontrée dans [J2] pour le cas  $n = 2$  par des méthodes d'analyse complexe et par Kate Okikiolu [Ok] dans le cas général. Notons que la constante peut être choisie indépendamment de  $n$ , à condition de remplacer la version intégrale de  $\beta(E)$  par une version discrète bien choisie (voir [Sc]). Avant de donner une idée de preuve du théorème 1, nous allons présenter la motivation initiale de Jones. Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive à support compact dans  $\mathbb{C}$  (pour nous, la restriction de la 1-mesure de Hausdorff sur un sous-ensemble compact de dimension 1 du plan complexe). Nous dirons que l'opérateur de Cauchy  $\mathcal{C}_\mu$  est borné sur  $L^2(\mu)$  s'il existe  $C > 0$  de sorte que pour tout  $\varepsilon > 0$ , tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\int |\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq C \int |f(x)|^2 d\mu(x),$$

où  $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(f)(x) = \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{f(y)}{y-x} d\mu(y)$ . Dans le cas où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , l'opérateur s'appelle l'opérateur d'Hilbert et sa continuité  $L^2$  est une conséquence quasi immédiate du théorème de Plancherel. Le cas où  $\mu$  est la mesure de longueur sur un graphe lipschitzien est plus ardu et a passionné les analystes harmoniciens pendant des dizaines d'années. La continuité  $L^2$  de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens avait été conjecturée dans les années 1960 par les initiateurs de la théorie moderne des intégrales singulières, A.P. Calderón et A. Zygmund. Cette conjecture a été résolue par A.P. Calderón [Ca] en 1977 dans le cas où la constante de Lipschitz est assez petite et par R. Coifman, A McIntosh et Y. Meyer [CMM] en 1981 dans le cas général. La preuve donnée par P. Jones dans [J1] consiste à approximer le graphe lipschitzien par des droites. L'opérateur de Cauchy s'exprime

alors en fonction d'opérateurs de Hilbert, plus un terme d'erreur qui fait intervenir les  $\beta$ . Il est naturel de se demander sur quels ensembles (munis de leur 1-mesure de Hausdorff) l'opérateur de Cauchy est borné. Une solution est donnée dans [MMV].

**Théorème 2** (P. Mattila, M. Melnikov J. Verdera). *Soit  $E \subset \mathbb{C}$  un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1 et soit  $\mu$  la restriction de la mesure de Hausdorff  $H^1$  sur  $E$ . L'opérateur de Cauchy  $C_\mu$  est borné sur  $L^2(\mu)$  si et seulement si  $E$  est uniformément rectifiable.*

Rappelons qu'un ensemble (fermé)  $E \subset \mathbb{C}$  est Ahlfors-régulier s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$C^{-1}r \leq H^1(E \cap B(x, r)) \leq Cr, \forall x \in E, \forall r \in ]0, \text{diam}E[$$

et qu'un ensemble Ahlfors-régulier est uniformément rectifiable s'il est contenu dans une courbe Ahlfors-régulière. La preuve du théorème 2 repose sur la version suivante du théorème de Jones.

**Théorème 3.** *Supposons que  $E \subset \mathbb{R}^n$  soit Ahlfors-régulier de dimension 1. Alors,  $E$  est contenu dans une courbe Ahlfors-régulière si et seulement si il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x \in E$ , tout  $R \in ]0, \text{diam}E[$ ,*

$$\int_{y \in E \cap B(x, R)} \int_0^R \beta_\infty(y, t)^2 dH^1(y) \frac{dt}{t} \leq CR.$$

Nous renvoyons à [Pa2] pour un survol des liens entre rectifiabilité, continuité de l'opérateur de Cauchy et capacité analytique. Notons que le théorème 3 a une version dans les espaces métriques (voir [Ha2]) et a des analogues pour des ensembles  $d$ -dimensionnels ( $d > 1$ ) dans  $\mathbb{R}^n$  (voir [DS] par exemple). La condition sur les  $\beta$  dit qu'en fait  $\beta_\infty(y, t)^2 dH^1(y) dt/t$  est une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$ . Elle permet un contrôle sur la taille de l'ensemble des  $(y, t) \in E \times \mathbb{R}^+$  pour lesquels  $\beta_\infty(y, t)$  est grand. Il est possible de remplacer dans le théorème 3 les  $\beta_\infty$  par des  $\beta_q$  qui font intervenir des normes  $L^q$  à la place de la norme sup (voir [DS]). Les arguments de Peter Jones peuvent alors s'adapter (voir [Pa1]). Nous allons maintenant donner une idée de la preuve du sens  $\beta(E) \implies E \subset \Gamma$ . Notons qu'il est suffisant de construire un continuum  $\Gamma$  tel que  $E \subset \Gamma$  et  $H^1(\Gamma) \leq C(\beta(E) + \text{diam}E)$  (voir le théorème 1.8 de [DS]). Supposons que  $\text{diam}E = 1$  et considérons une famille croissante de sous-ensembles  $(\Delta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $E$  de sorte que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , nous avons

- (i) Pour tout  $x \in \Delta_j$ , tout  $y \in \Delta_j$  avec  $x \neq y$ ,  $|x - y| > 2^{-j}$ .
- (ii) Pour tout  $x$  dans  $E$ , il existe  $y \in \Delta_j$  tel que  $|x - y| \leq 2^{-j}$ .

Le but est de construire par récurrence des continua  $\Gamma_j$  qui contiennent les points de  $\Delta_j$ . Le continuum  $\Gamma$  sera la limite de la suite  $(\Gamma_j)$ . Le point-clé est d'estimer  $l(\Gamma_{j+1}) - l(\Gamma_j)$  en fonction des  $\beta$  et ceci se fait (en partie) grâce au théorème de Pythagore. Supposons que l'on ait construit  $\Gamma_{j-1}$  et soit  $x \in \Delta_j \setminus \Delta_{j-1}$ . Supposons de plus qu'il existe  $y$  et  $z$  dans  $\Delta_{j-1}$  tel que  $[y, z] \subset \Gamma_{j-1}$  et tel que

(H1)  $|x - y| < |x - z| < |y - z|$ ;

(H2) Pour une constante fixé  $C_0 > 0$ , nous avons

$$C_0^{-1}2^{-j} \leq |x - y| \leq C_0 2^{-j}$$

$$C_0^{-1}2^{-j} \leq |y - z| \leq C_02^{-j}$$

$$C_0^{-1}2^{-j} \leq |z - x| \leq C_02^{-j}.$$

Notons que ce cas n'est pas le seul. Il se pourrait que  $x$  soit très proche de  $y$  ou de  $z$  (c'est à dire les distances mutuelles entre  $x$ ,  $y$  et  $z$  ne soient pas comparables), ou que le coté ( $yz$ ) ne soit pas le plus long. Le continuum  $\Gamma_j$  est obtenu, à partir de  $\Gamma_{j-1}$ , en remplaçant  $[y, z]$  par  $[y, x] \cup [x, z]$ . Nous avons donc (au voisinage de  $x$ )

$$l(\Gamma_j) - l(\Gamma_{j-1}) = |y - x| + |x - z| - |y - z|.$$

Si  $\beta_\infty(x, C \cdot 2^{-j})$  (où  $C$  est une constante assez grande) est très petit, les points sont alors presque alignés (le point  $x$  est proche du milieu de  $[y, z]$ ) et la droite  $L_{yz}$  passant par  $y$  et  $z$  minimise presque  $\beta_\infty(x, C \cdot 2^{-j})$  (d'où  $d(x, L_{yz})$  est contrôlé par  $\beta_\infty(x, C \cdot 2^{-j})2^{-j}$ ). Il vient d'après le théorème de Pythagore

$$(1) \quad |y - x| + |x - z| - |y - z| \leq C \left( \frac{d(x, L_{yz})}{2^{-j}} \right)^2 2^{-j}$$

puis puisque  $\beta_\infty(x, C \cdot 2^{-j})$  est petit,

$$(2) \quad |y - x| + |x - z| - |y - z| \leq C\beta_\infty(x, C \cdot 2^{-j})^2 2^{-j},$$

Il s'en suit que l'insertion de  $x$  a coûté

$$(3) \quad l(\Gamma_j) - l(\Gamma_{j-1}) \leq C\beta_\infty(x, C \cdot 2^{-j})^2 2^{-j}.$$

Un des problèmes dans le cas du groupe de Heisenberg que nous allons maintenant aborder sera d'obtenir une estimation du type (1) dans une situation géométrique identique.

## 2. SOUS-ENSEMBLES DE COURBES RECTIFIABLES DANS LE GROUPE D'HEISENBERG

Nous désignerons par  $\mathbb{H}$  le (premier) groupe de Heisenberg qui est modelé sur  $\mathbb{R}^3$ . Un point  $P$  dans  $\mathbb{H}$  est noté  $P = [z, t] = [x + iy, t]$  où  $x$ ,  $y$  et  $t$  sont des réels. Si  $P = [z, t]$ ,  $Q = [\zeta, \tau] \in \mathbb{H}$ , l'opération du groupe est

$$P \cdot Q = [z + \zeta, t + \tau + 2\Im(z\bar{\zeta})].$$

Cette loi n'est pas commutative. Le centre du groupe est l'axe des  $t$ , c'est à dire  $\{[0, t], t \in \mathbb{R}\}$ . L'inverse d'un point  $P = [z, t]$  est  $-P = [-z, -t]$ . Il est utile de considérer une famille de dilatations anisotropiques  $\delta_r$  données par  $\delta_r(P) = [rz, r^2t]$  pour un  $r > 0$  et les translations (à gauche)  $\tau_P$  données par

$$Q \mapsto \tau_P(Q) := P \cdot Q$$

pour un  $P \in \mathbb{H}$ .

L'algèbre de Lie du groupe est engendrée par

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Notons que  $[X, Y] = -4T$  et les autres crochets sont triviaux. Une courbe absolument continue  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}$  est horizontale si pour presque tout  $t$ ,  $\gamma'(t) = h(t)X(\gamma(t)) +$

$k(t)Y(\gamma(t))$  où  $h, k$  sont mesurables. Si  $P, Q \in \mathbb{H}$ , la distance de Carnot-Carathéodory  $d_c(P, Q)$  entre  $P$  et  $Q$  est donnée par

$$d_c(P, Q) = \inf \int_0^T |\gamma'(t)| dt,$$

où l'inf est pris sur toutes les courbes horizontales  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}$  de sorte que  $\gamma(0) = P$  et  $\gamma(T) = Q$ . Le groupe de Heisenberg muni de cette distance est un espace métrique géodésique (comme défini dans la section 1). Si  $P = [z, t]$ , l'unique géodésique reliant l'origine à  $P$  est le segment euclidien  $[0, P]$  contenu dans le plan  $t = 0$ . Si  $P = [0, t]$ , il y a une infinité de géodésiques reliant l'origine à  $P$  (voir la discussion à la fin de cette section). La mesure de Haar du groupe est la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^3$ , et nous noterons  $|A|$  la mesure de Lebesgue de  $A$ . Elle est invariante à gauche et à droite, et vérifie  $|\delta_r(A)| = r^4|A|$  si  $r > 0$  et  $A \subset \mathbb{H}$ . Il s'en suit que  $|B(P, R)| = |B(0, 1)|R^4$ , pour tout  $P \in \mathbb{H}$ , tout  $R > 0$ . Le groupe de Heisenberg (muni de sa structure de Carnot-Carathéodory) est donc de dimension de Hausdorff 4, mais sa topologie étant équivalente à celle du  $\mathbb{R}^3$  euclidien, sa dimension topologique est 3. Le groupe de Heisenberg a donc une structure "fractale". Posons, pour  $P = [z, t]$ ,  $\|P\| = (\|z\|^4 + |t|^2)^{\frac{1}{4}}$ . La distance de Koranyi entre deux points  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{H}$  est alors défini par  $d_K(P, Q) = \|P^{-1} \cdot Q\|$ . Cette distance est bilipschitz équivalente à la distance de Carnot-Carathéodory. Il est facile de voir que la mesure de Lebesgue d'une boule pour  $d_K$  de centre 0 et de rayon  $R$  doit être de l'ordre de  $R^4$ . Nous allons maintenant faire une digression et parler du problème isopérimétrique dans  $\mathbb{H}$ . Pour un sous-ensemble de bord régulier  $\Omega \subset \mathbb{H}$ , l'inégalité isopérimétrique de Pansu ([P1], [P2]) dit que

$$(4) \quad C_I |\Omega|^{3/4} \leq H_c^3(\partial\Omega)$$

où  $C_I$  est la meilleure constante possible et  $H_c^3$  est la 3-mesure de Hausdorff relative à la distance de Carnot-Carathéodory. Il aurait été peut-être plus judicieux d'énoncer l'inégalité isopérimétrique (4) en utilisant le périmètre plutôt que  $H_c^3$  et la frontière essentielle. Mais, cela nous aurait amené à discuter de ces notions, ce qui ne s'imposait pas dans cette exposition. Récemment, G. P. Leonardi et S. Rigot [LR] ont démontré qu'il existe des ensembles isopérimétriques  $E$  (c'est à dire des ensembles pour lequel il y a égalité dans (4)) et ces ensembles  $E$  vérifient les deux propriétés suivantes :

- (i)  $\partial E$  est Ahlfors-régulier (de dimension 3);
- (ii)  $\partial E$  vérifie la condition de Semmes : pour toute boule  $B$  centrée sur  $\partial E$ , il existe des boules  $B_1$  et  $B_2$  contenues dans  $B$  de sorte que

$$\begin{aligned} \text{diam} B_1, \text{diam} B_2 &\geq 1/C \text{diam} B, \\ B_1 &\subset E \cap B, \\ B_2 &\subset B \setminus E. \end{aligned}$$

A quoi ressemble un tel ensemble isopérimétrique? Notons que contrairement au cas euclidien, les boules ne sont pas isopérimétriques! Si un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^4$  vérifie

les propriétés (i) et (ii) ci-dessus (pour la condition (ii), on demande que les boules  $B_1$  et  $B_2$  soient dans deux composantes connexes différentes de  $\mathbb{R}^4 \setminus F$ ), alors  $F$  est uniformément rectifiable. Une définition possible (voir [DS] pour beaucoup d'autres définitions équivalentes) est qu'il existe  $M > 0$  et  $\varepsilon > 0$  de sorte que pour tout  $x \in F$ , tout  $R > 0$ , il existe une application lipschitzienne  $\rho$  de la boule unité  $B_3(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  de constante de Lipschitz  $\leq M$  vérifiant

$$H^3(F \cap \rho(B_3(0, 1)) \cap B(x, R)) \geq \varepsilon R^3.$$

Cette condition s'appelle BPLI (big pieces of Lipschitz images) et signifie que dans toute boule  $B$  centrée sur  $F$ , il existe une part fixe de  $F \cap B$  qui est contenue dans une image lipschitzienne (avec contrôle uniforme de la constante de Lipschitz) de  $\mathbb{R}^3$ . La difficulté dans le cas du groupe de Heisenberg est que si

$$\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{H}$$

est lipschitzienne, alors pour  $d = 2, 3, 4$ ,  $H_c^d(\rho(\mathbb{R}^d)) = 0$ ! Donc, la condition BPLI devient vide dans  $\mathbb{H}$ . Nous aimerions en outre donner une version du théorème 3 en grandes dimensions dans le cas du groupe de Heisenberg, mais nous ne sommes pour l'instant capables que de traiter le cas des ensembles de dimension 1. Ce que nous allons maintenant expliquer.

Si nous voulons donner une version du théorème de Jones dans le cas de  $\mathbb{H}$ , une première difficulté est de donner une version adéquate des nombres  $\beta$ . Nous avons donc besoin d'une bonne notion de "droites". Une idée naive est de considérer que les "droites" de  $\mathbb{H}$  sont les géodésiques de  $\mathbb{H}$ . Le problème est que, si nous prenons un point  $P = [0, t]$  sur l'axe des  $t$ , il n'y a pas unicité de la géodésique allant de 0 à  $P$  (les géodésiques forment un ensemble d'hélices, celles-ci sont obtenues à partir de l'une d'entre elles par rotation autour de l'axe des  $t$ ), et la longueur de cette géodésique est de l'ordre de  $\sqrt{t}$ . Ce qui revient à dire que "monter" suivant l'axe des  $t$  coûte très cher en termes de longueur. Il nous faut tenir compte de cette contrainte et ceci nous a amené aux définitions suivantes. Une  $\mathbb{H}$ -droite est un ensemble  $\ell$  de la forme  $\ell = a \cdot r$ , où  $a$  est un point de  $\mathbb{H}$  et  $r$  est une droite euclidienne passant par l'origine et restant dans  $\{[z, 0] \mid z \in \mathbb{C}\}$ . Remarquons que ces droites  $r$  sont des sous-groupes de  $\mathbb{H}$ . Une  $\mathbb{H}$ -droite est une géodésique (mais toutes les géodésiques ne sont pas de cette forme). Notons  $G(\mathbb{H}, 1)$  l'ensemble des  $\mathbb{H}$ -droites. Soit  $E \subset \mathbb{H}$  un ensemble compact, et soit  $P \in \mathbb{H}$ . Pour tout  $t > 0$ , posons

$$\beta_{\mathbb{H}}(P, t) = \inf_{L \in G(\mathbb{H}, 1)} \sup_{Q \in E \cap B_c(P, t)} \frac{d_c(Q, L)}{t},$$

et  $\beta_{\mathbb{H}}(E) = \int_{\mathbb{H}} \int_0^{+\infty} \beta_{\mathbb{H}}(P, t)^2 dP \frac{dt}{t^4}$ . L'intégration en  $P$  se fait par rapport à la mesure de Haar du groupe et le 4 dans  $dt/t^4$  correspond, comme dans le cas euclidien, à la dimension de Hausdorff de  $\mathbb{H}$ .

Le résultat principal de [FFP1] est le suivant



**Théorème 4.** (i) Soit  $E \subset \mathbb{H}$  compact. Alors,  $E$  est contenu dans une courbe rectifiable  $\Gamma$  si

$$\beta_{\mathbb{H}}(E) < +\infty.$$

De plus,  $\inf_{\Gamma \supset E} \ell(\Gamma) \leq C(\text{diam}E + \beta_{\mathbb{H}}(E))$  (où  $C > 0$  est une constante absolue).

(ii) Si  $\Gamma$  est une géodésique dans  $\mathbb{H}$ , alors

$$\beta_{\mathbb{H}}(\Gamma) \leq C\ell(\Gamma),$$

où  $C$  est une constante absolue.

Notons que si  $\Gamma$  est une courbe simple, horizontale de classe  $C^{1,\alpha}$ , la condition  $\beta_{\mathbb{H}}(\Gamma) < \infty$  est satisfaite, mais nous n'avons pas un contrôle uniforme en fonction de  $\ell(\Gamma)$ . L'algorithme de construction de la courbe  $\Gamma$  est essentiellement le même que celui de Peter Jones dans le cas euclidien. Comme nous l'avons vu dans la section 1, une des estimation clé s'obtient (dans le cas euclidien) par le théorème de Pythagore. Dans le cas du groupe de Heisenberg, nous n'avons pas un tel théorème et l'estimation est obtenue par comparaison avec le cas euclidien. Ceci nous amène à discuter de la "courbure" du groupe de Heisenberg.

### 3. ESTIMATIONS DE COURBURE DANS LE GROUPE DE HEISENBERG

Soit  $(X, d)$  un espace géodésique. Etant donnés trois points  $x, y$  et  $z$  dans  $X$ , un triangle géodésique dans  $X$  de sommets  $x, y, z$  est l'union de trois segments géodésiques  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$  reliant les sommets et un triangle de comparaison est un triangle dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  de sommets  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  avec  $d(x, y) = |\bar{x} - \bar{y}|$ ,  $d(y, z) = |\bar{y} - \bar{z}|$ ,  $d(z, x) = |\bar{z} - \bar{x}|$ . On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est à courbure positive au sens d'Alexandrov si pour tout triangle géodésique dans  $X$  de sommets  $x, y, z$  et tout point  $w \in [x, y]$ , alors

$$d(z, w) \geq |\bar{z} - \bar{w}|$$

où  $\bar{w}$  est le point sur le côté  $[\bar{x}, \bar{y}]$  du triangle de comparaison  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  avec  $d(w, x) = |\bar{w} - \bar{x}|$ . Autrement dit, les triangles géodésiques dans l'espace  $(X, d)$  sont moins fins que ceux du plan euclidien. Cette notion d'espaces à courbure positive est une version métrique de la notion de variétés riemanniennes à courbure sectionnelle positive (voir par exemple [BBI]). Revenons à notre inégalité (1) et prenons trois points  $x, y$  et  $z$  qui vérifient les hypothèses (H1) et (H2) du paragraphe 1 (pour la distance  $d$ ). Alors, les sommets  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  d'un triangle de comparaison associé vérifient aussi (H1) et (H2). D'où, nous obtenons d'après (1)

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(x, z) - d(y, z) &= |\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{x} - \bar{z}| - |\bar{y} - \bar{z}| \\ &\leq c \left( \frac{d(\bar{x}, L_{\bar{y}, \bar{z}})}{2^{-j}} \right)^2 2^{-j}. \end{aligned}$$

Donc, si notre espace est à courbure positive au sens d'Alexandrov, nous avons  $d(\bar{x}, L_{\bar{y}, \bar{z}}) \leq d(x, L_{yz})$  où  $L_{yz}$  est une géodésique reliant  $y$  à  $z$ . Donc, nous obtenons

$$(5) \quad d(y, x) + d(x, z) - d(y, z) \leq C \left( \frac{d(x, L_{yz})}{2^{-j}} \right)^2 2^{-j},$$

ce qui est l'inégalité cherchée. Nous aurions donc essentiellement gagné si nous démontrons que le groupe de Heisenberg est à courbure positive au sens d'Alexandrov. Cependant, pour de tels espaces, la dimension topologique et celle de Hausdorff sont égales, ce qui écarte le groupe d'Heisenberg d'après la section 2. Mais, tout n'est pas perdu, car nous avons le

**Théorème 5.** *Considérons  $t > 0$  et des points  $P_1, P_2$  et  $P_3$  de  $\mathbb{H}$  tels que  $P_1$  et  $P_2$  sont sur une  $\mathbb{H}$ -droite  $r_0$  et*

(H1)  $d_c(P_3, P_1) \leq d_c(P_3, P_2) \leq d_c(P_1, P_2)$  ;

(H2) *Pour une constante fixé  $C_0 > 0$ , nous avons pour  $i \neq j$*

$$C_0^{-1}t \leq d_c(P_i, P_j) \leq C_0t.$$

*Alors, si les points  $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$  sont les sommets d'un triangle de comparaison associé à  $P_1, P_2$  et  $P_3$ , et si  $\overline{r}_0$  est la droite reliant  $P_1$  à  $P_2$ , nous avons*

$$d_c(P_3, r_0) \geq C^{-1}d(\overline{P}_3, \overline{r}_0)$$

*où la constante  $C$  dépend de  $C_0$  mais pas de  $t$ .*

La preuve de cette estimation se fait "à la main". Ceci permet d'obtenir comme précédemment une inégalité du type (5). Le lecteur pourrait avoir peur de l'hypothèse " $P_1$  et  $P_2$  sont sur une  $\mathbb{H}$ -droite", mais cette condition est inutile si  $\beta_{\mathbb{H}}$  est petit en  $P_1$  et à une échelle comparable à  $t$ . Nous ne savons pas démontrer le théorème 5 (et donc étendre le théorème 4) dans le cas de groupes de Carnot plus généraux. Cependant, ce résultat devrait nous permettre de donner une version (avec des  $\beta_q$ ) du théorème 3 dans le cas du groupe de Heisenberg et de développer une théorie de la rectifiabilité uniforme pour les ensembles de dimension 1 (voir [FFP2]). Dans ce sens, une autre question naturelle est de voir si nous pouvons définir des intégrales singulières (du type l'opérateur de Cauchy) sur des courbes de  $\mathbb{H}$  et obtenir un analogue du théorème 2. Cela sera peut-être l'objet d'un prochain exposé au Séminaire X-EDP !

## RÉFÉRENCES

- [BBI] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33** (2001), American Mathematical Society.
- [Ca] A. P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA Volume 74 (1977), p 1324-1327.
- [CMM] R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  sur les courbes lipschitziennes*, Annals of Mathematics Volume 116 (1982), p 361-388.
- [DS] G. David, S. Semmes, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 38 (1993), American Mathematical Society.
- [FFP1] F. Ferrari, B. Franchi, H. Pajot, *The geometric traveling salesman problem in the Heisenberg group*, à paraître dans Revista Matemática Iberoamericana.
- [FFP2] F. Ferrari, B. Franchi, H. Pajot, en préparation.
- [Ha1] I. Hahlomaa, *Menger curvature and Lipschitz parametrizations in metric spaces*, Fundamenta Mathematicae 185 (2005), p 143-169.
- [Ha2] I. Hahlomaa, *Curvature integral and Lipschitz parametrization of 1-regular metric spaces*, Preprint (2005), University of Jyväskylä.

- [J1] P. W. Jones, *Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure*, in “Harmonic analysis and partial differential equations”, Lecture Notes in Mathematics Volume 1384 (1989), Springer-Verlag, 24–68.
- [J2] P. Jones, *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, *Inventiones Mathematicae* **102** (1990), 1–15.
- [LR] G. P. Leonardi, S. Rigot, *Isoperimetric sets on Carnot groups*, *Houston Journal of Mathematics* 29 (2003) p 603-637.
- [Ma] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Volume 44, Cambridge University Press (1995).
- [MMV] P. Mattila, M. Melnikov, J. Verdera, *The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability*, *Annals of Mathematics* Volume 144 (1996), p 127-136.
- [Ok] K. Okikiolu, *Characterizations of subsets of rectifiable curves in  $\mathbb{R}^n$* , *Journal of the London Mathematical Society* **46** (1992), 336–348.
- [Pa1] H. Pajot, *Sous-ensembles de courbes Ahlfors-régulières et nombre de Jones*, *Publicacions Matemàtiques* **40**, 497–526.
- [Pa2] H. Pajot, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, *Lecture Notes in Mathématiques* Volume 1799, Springer (2002).
- [P1] P. Pansu, *Géométrie du Groupe d’Heisenberg*, Thèse pour le titre de Docteur de 3ème cycle, Université Paris VII, (1982).
- [P2] P. Pansu, *Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **295**, I, (1982), 127–130.
- [Sc] R. Schul, *Subset of rectifiable curves in Hilbert space and the analyst’s TSP*, Phd dissertation, Yale University (2005).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BOLOGNA PIAZZA DI PORTA S. DONATO, 5  
40127 BOLOGNA, ITALY

*E-mail address:* ferrari@dm.unibo.it

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BOLOGNA PIAZZA DI PORTA S. DONATO, 5  
40127 BOLOGNA, ITALY

*E-mail address:* franchib@dm.unibo.it

UNIVERSITY OF GRENOBLE I FOURIER INSTITUTE, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, 100 RUE  
DES MATHS, BP 74, 38402 SAINT-MARTIN D’HÈRES, FRANCE

*E-mail address:* herve.pajot@ujf-grenoble.fr