



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Amandine Aftalion

Vortex dans les condensats de Bose Einstein

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° XVII, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A17_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Vortex dans les condensats de Bose Einstein

Amandine AFTALION¹

Les résultats présentés dans cet exposé ont été obtenus en collaboration avec T.Rivière [12], R.Jerrard [10, 11], I.Danaila [8], S.Alama et L.Bronsard [4], X.Blanc et J.Dalibard [6, 7]. Une partie est résumée dans [2] et l'ensemble sera détaillé dans un livre en préparation [3]. Tous ces travaux ont été motivés par des expériences récentes au laboratoire Kastler Brossel de l'Ecole normale supérieure, dans le groupe de J.Dalibard.

Après avoir présenté le contexte physique, nous décrirons la modélisation mathématique et les résultats que nous avons obtenus.

1 Introduction

Depuis la première réalisation expérimentale de condensats de Bose-Einstein atomiques gazeux effectuée en 1995 et récompensée par le prix Nobel en 2001 [21, 26], de nombreuses propriétés de ces systèmes ont été étudiées expérimentalement et théoriquement, notamment au laboratoire Kastler-Brossel. Les théories mathématiques de ces expériences commencent tout juste à émerger.

1.1 Contexte physique

Les condensats de Bose-Einstein doivent leur nom à la prédiction de Bose et Einstein pour un gaz d'atomes identiques et sans interaction refroidis à très basse température : une fraction importante du gaz doit s'accumuler dans l'état d'énergie minimale, c'est à dire que les atomes sont tous dans le même état quantique décrit par la même fonction d'onde. Cette idée était uniquement théorique, et lorsqu'en 1937 a été découverte la superfluidité de l'hélium, un lien a été établi avec la condensation de Bose-Einstein, mais il y a des différences importantes entre l'hélium qui est un liquide et la théorie qui s'applique à un gaz. La recherche de systèmes expérimentaux proches du modèle d'Einstein et le développement des techniques de refroidissement par laser [18] ont conduit à la première réalisation expérimentale de condensats de Bose-Einstein atomiques gazeux par une équipe américaine en 1995 [21, 26]. Depuis, de nombreuses propriétés de ces systèmes sont étudiées

¹CNRS, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris.

expérimentalement et théoriquement. On pourra se reporter aux livres de Pethick et Smith [32] ou Pitaevskii et Stringari [33] pour plus de détails.

Un des sujets d'étude actuels est l'existence de courants permanents dans le condensat, qui sont une conséquence de la superfluidité. Ces expériences rappellent celles réalisées pour l'hélium [22]. Néanmoins, les condensats atomiques obtenus à partir de métaux alcalins diffèrent fondamentalement de l'hélium superfluide : tout d'abord l'hélium a une densité uniforme, alors que le potentiel de piégeage qui confine les atomes donne une densité non uniforme. D'autre part, on arrive à préparer des condensats atomiques où tous les atomes sont dans le condensat, ce qui n'est pas le cas pour l'hélium. Enfin les condensats atomiques sont purs et dilués si bien que les interactions sont faibles, tout en ayant un rôle non négligeable dans les phénomènes.

Une des premières expériences au MIT [34] a consisté à déplacer un laser dans le condensat, ce qui revient à réaliser un écoulement superfluide autour d'un obstacle. A petite vitesse, l'écoulement est stationnaire et il y a une vitesse critique au-delà de laquelle l'écoulement devient dissipatif et nucléé des vortex. Cette propriété d'écoulement non dissipatif à petite vitesse est caractéristique d'un superfluide. Nous nous sommes intéressés à ces aspects dans [5, 9], qui ne seront pas décrits ici.

La démarche expérimentale réalisée au laboratoire Kastler-Brossel est différente et consiste à mettre en rotation le piège harmonique contenant les atomes pour communiquer du moment cinétique au gaz et faire apparaître des tourbillons [31]. Cette démarche a été reproduite au MIT [1] pour d'autres atomes. L'étude de ces phénomènes de vorticité est au centre de cet exposé.

Les atomes étant confinés dans un piège harmonique en rotation à la vitesse $\tilde{\Omega}$, on se place dans le référentiel tournant. Dans les conditions de l'expérience, c'est une très bonne approximation de considérer que tous les atomes sont décrits par une même fonction d'onde qui minimise une énergie dite de Gross-Pitaevskii avec un terme supplémentaire qui décrit le piégeage. La dérivation rigoureuse de cette énergie à partir du hamiltonien à N corps a été prouvée par Lieb, Seiringer et Yngvason [29] dans le cas sans rotation. Le problème avec rotation est lui ouvert.

On considère que les atomes interagissent par le potentiel effectif $\mathbf{V}(r_1 - r_2) = g\delta(r_1 - r_2)$ et on appelle N le nombre de particules dans le condensat. Tous les atomes sont décrits par la même fonction d'onde ϕ qui minimise l'énergie suivante.

$$\mathcal{E}(\phi) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 r_{\alpha}^2 |\phi|^2 + Ng|\phi|^4 + i\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2} \cdot (\mathbf{r} \times (\phi^* \nabla\phi - \phi \nabla\phi^*)) \quad (1)$$

sous la contrainte $\int_{\mathbf{R}^3} |\phi|^2 = 1$. On suppose que $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}\mathbf{e}_z$. Le premier terme est un terme d'énergie cinétique, le suivant le terme de piégeage, puis vient le terme d'interaction et enfin le terme d  au changement de référentiel.

Les condensats étudiés au laboratoire Kastler-Brossel ont une forme de cigare, c'est à dire que ω_z est beaucoup plus petit que ω_x et ω_y . On observe que lorsque $\tilde{\Omega}$ est petit, il n'y a pas de vortex dans le système : la fonction d'onde ne s'annule pas. Lorsqu'on augmente $\tilde{\Omega}$, le gaz présente des propriétés quantiques et un tourbillon est nucl e : la fonction d'onde

présente une ligne de zéro autour de laquelle la phase de la fonction d'onde a une circulation. Une des observations importantes est que la ligne de zéro n'est pas selon l'axe de rotation mais est courbée [36] (figure 1). Lorsqu'on augmente la vitesse de rotation, le nombre de lignes de singularités augmente jusqu'à former, dans le plan $x - y$ un réseau, appelé réseau d'Abrikosov pour sa similarité avec les supraconducteurs [15, 16, 17] (voir aussi simulation numérique figure 2.a). L'étude des réseaux de vortex est au centre de travaux très récents [23, 39, 42].

Notre but a été d'une part de justifier la forme courbée du premier vortex en effectuant un développement asymptotique de l'énergie en fonction d'un petit paramètre. Ceci repose sur des outils introduits par Bethuel-Brezis-Helein [14], Riviere [35] ou Sandier, Serfaty [37] pour l'analyse des vortex de Ginzburg-Landau. D'autre part, dans le cas de la rotation rapide, nous avons étudié le réseau de vortex par des techniques de convergence double échelle et expliqué la distortion du réseau près du bord du condensat.

1.2 Formulation mathématique du problème

Pour une étude mathématique du problème, nous avons adimensionné les quantités physiques et trouvé un paramètre, petit dans le régime des expériences, qui va nous servir de paramètre asymptotique. On définit $d = (\hbar/m\omega_x)^{1/2}$ la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique et on pose

$$\varepsilon^{5/2} = \frac{\hbar^2 d}{2Ngm}.$$

Etant données les valeurs expérimentales obtenues à l'ENS [31], on trouve pour $\varepsilon \simeq 0.017$. C'est donc raisonnable de le considérer comme un petit paramètre. On fait le changement d'échelle $R = d/\sqrt{\varepsilon}$: on définit $u(\mathbf{r}) = R^{3/2}\phi(\mathbf{x})$ où $x = Rr$. On pose de plus $\omega_y = \alpha\omega_x$, $\omega_z = \beta\omega_x$, $\Omega = \tilde{\Omega}/\varepsilon\omega_x$. L'énergie s'écrit alors

$$E_{3D}(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \Omega \times \mathbf{r} \cdot (iu, \nabla u) + \frac{1}{2\varepsilon^2} (x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2) |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} |u|^4, \quad (2)$$

où $(a, b) = (a^*b + b^*a)/2$. Dans la mesure où il y a la contrainte $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 = 1$, on peut retirer à E_{3D} un multiple de $\int |u|^2$. On est donc ramener à minimiser

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \Omega \times \mathbf{r} \cdot (iu, \nabla u) + \frac{1}{4\varepsilon^2} |u|^4 - \frac{1}{2\varepsilon^2} \rho_{\text{TF}}(\mathbf{r}) |u|^2 \quad (3)$$

où

$$\rho_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \rho_0 - (x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2) \text{ et } \rho_0 \text{ est choisi tel que } \int_{\{\rho_{\text{TF}} > 0\}} \rho_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = 1. \quad (4)$$

Si on définit $\mathcal{D} = \{\rho_{\text{TF}} > 0\}$, on peut montrer que si u est un minimiseur, alors u est exponentiellement petit quand on s'éloigne du bord de \mathcal{D} . Dans la suite, on va se ramener à étudier le problème sur le domaine \mathcal{D} :

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \Omega \times \mathbf{r} \cdot (iu, \nabla u) + \frac{1}{4\varepsilon^2} (|u|^2 - \rho_{\text{TF}}(\mathbf{r}))^2, \quad u \in H_0^1(\mathcal{D}). \quad (5)$$

On va voir que $|u|^2 \sim \rho_{\text{TF}}$ sauf au voisinage des vortex, qui sont des tubes de taille ε : ρ_{TF} est appelée limite de Thomas Fermi du profil de $|u|^2$.

Nous voulons déterminer les minima de E_ε en fonction de la valeur de Ω si le minimum présente ou non des vortex, la localisation des vortex et leur forme. Nous allons voir que la première vitesse critique Ω_1 à partir de laquelle l'énergie d'une solution avec un vortex devient plus basse que l'énergie d'une solution sans vortex est d'ordre $|\log \varepsilon|$. C'est ce que nous allons étudier dans la section suivante.

La renormalisation utilisant ε est adaptée à l'étude des vitesses de rotation proche de la première vitesse critique Ω_1 , où il y a un nombre fini de vortex qui sont localisés près de l'origine (à distance $1/\sqrt{|\log \varepsilon|}$). En revanche, quand Ω devient plus grand, les vortex ne sont plus de taille ε mais de taille 1, et leur distance est également d'ordre 1. L'énergie E_ε admet un minimum seulement si $\Omega < 1/\varepsilon$. Le régime $\Omega = c/\varepsilon$ avec $c < 1$ est très différent du régime $|\log \varepsilon|$: la taille du condensat augmente avec Ω . Les méthodes utilisées reposent sur l'homogénéisation. La bonne renormalisation d'énergie consiste à faire le changement d'échelle par d plutôt que $d/\sqrt{\varepsilon}$. L'énergie que nous considérerons est alors de la forme :

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \cdot (iu, \nabla u) + \frac{1}{2} (x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2) |u|^2 + \frac{1}{2} Na |u|^4. \quad (6)$$

sous la contrainte de norme 1, où N est le nombre de particules et a la longueur de scattering reliée à g . L'étude du réseau de vortex dans ce régime sera menée dans la dernière section.

2 Condensats en rotation près de la première vitesse critique

Notre but est d'étudier les propriétés des minimiseurs de E_ε en fonction de la valeur de Ω . Nous allons effectuer un développement de l'énergie en fonction de ε , déterminer la contribution des vortex, la vitesse critique et la forme des vortex. Des simulations numériques nous ont permis de vérifier que nos approximations étaient cohérentes avec les expériences.

2.1 Développement de l'énergie, vortex courbé

En collaboration avec T.Riviere [12], nous avons effectué un développement de l'énergie en fonction du paramètre ε . Dans le cas d'une seule ligne de singularité γ , nous trouvons

$$E_\varepsilon(u) = \mathcal{E}_0(\varepsilon) + \pi |\log \varepsilon| \mathcal{E}_\gamma + o(|\log \varepsilon|) \text{ où}$$

$$\mathcal{E}_\gamma = \int_\gamma \rho_{\text{TF}} dl - \frac{\Omega}{(1 + \alpha^2) |\log \varepsilon|} \int_\gamma \rho_{\text{TF}}^2 dz. \quad (7)$$

Le terme $\mathcal{E}_0(\varepsilon)$ correspond à l'énergie de la solution sans vortex. L'énergie de la ligne de vortex γ fait apparaître un terme qui vient de la longueur des vortex (intégrale curviligne) et un terme dû à la rotation (intégrale orientée). Le terme de rotation devient significatif quand Ω est d'ordre $|\log \varepsilon|$. Cette énergie approchée nous indique que si nous trouvons

pour certaines valeurs de Ω , une courbe γ telle que $\mathcal{E}_\gamma < 0$, alors il est favorable de nucléer un vortex. Si cette courbe n'est pas selon l'axe z , c'est que le vortex est courbé. Il s'agit donc de déterminer les minima et points critiques de \mathcal{E}_γ , ce que nous allons faire plus bas. Ce développement formel a depuis été justifié par des techniques de Gamma convergence par R.L.Jerrard [25]. Ces résultats peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soit $\bar{\Omega}_\varepsilon = \Omega/(1 + \alpha^2)|\log \varepsilon|$. Il existe C_0 , tel que pour $\bar{\Omega}_\varepsilon < C_0$, le minimiseur u_ε de E_ε n'a pas de vortex pour ε petit, i.e. $|u_\varepsilon| > 0$ dans \mathcal{D} . En revanche, pour $\bar{\Omega}_\varepsilon > C_0$, le minimiseur a des vortex et le vortex droit n'est pas minimum*

Dans le cas de plusieurs vortex, il faut de plus tenir compte de l'interaction entre les lignes et nous obtenons également un développement de l'énergie.

Donnons quelques idées de la preuve, qui repose sur l'analyse des vortex développées par [14, 35]. La différence avec l'énergie de Ginzburg-Landau est que nous avons un poids ρ_{TF} qui devient dégénéré près du bord. Pour traiter cela, nous faisons appel à un découplage de l'énergie introduit par Lassued-Mironescu [28] : on écrit $v_\varepsilon = u_\varepsilon/\eta_\varepsilon$, où η_ε est le minimiseur de E_ε sur les fonctions à valeur réelle. En fait, v_ε est à peu près de module 1, et porte la contribution des vortex. L'énergie s'écrit alors

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_\varepsilon(\eta_\varepsilon) + G_{\eta_\varepsilon}(v_\varepsilon) + I_{\eta_\varepsilon}(v_\varepsilon) \quad (8)$$

où

$$G_{\eta_\varepsilon}(v_\varepsilon) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} |\eta_\varepsilon|^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{|\eta_\varepsilon|^4}{4\varepsilon^2} (1 - |v_\varepsilon|^2)^2,$$

est l'énergie des vortex et

$$I_{\eta_\varepsilon}(v_\varepsilon) = - \int_{\mathcal{D}} |\eta_\varepsilon|^2 \Omega \times \mathbf{r} \cdot (iv_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon),$$

est le moment angulaire. Le premier terme $E_\varepsilon(\eta_\varepsilon)$ donne une contribution indépendante de la solution, le 2ème terme, G_ε rappelle une énergie de Ginzburg-Landau à poids et permet de définir les vortex, le dernier terme I_ε est intégré par parties pour donner l'intégrale orientée. Le terme G_ε donne à la limite le terme de longueur de la ligne de vortex multiplié par $|\log \varepsilon|$.

2.2 Etude de \mathcal{E}_γ et forme des vortex

Nous avons étudié dans [10, 11] (en collaboration avec R.Jerrard) les propriétés géométriques de \mathcal{E}_γ . Nous prouvons que pour le minimiseur, la ligne γ est plane, dans le plan le plus proche de l'axe de rotation, soit le plan $y-z$, si α dans l'expression de ρ_{TF} est supérieur à 1. Nous étudions suivant l'élongation du condensat si le premier vortex est courbé ou non : si $\beta \geq 1$, i.e. dans le cas d'un condensat aplati, nous prouvons que le premier vortex est droit suivant l'axe de rotation alors que si $\beta < 1/\sqrt{3}$, qu'il est courbé (en fait dans ce cas, le vortex droit n'est pas un minimum local de l'énergie). Nous étudions également l'unicité du minimiseur de \mathcal{E}_γ et analysons sa dépendance en fonction de Ω . Nous prouvons

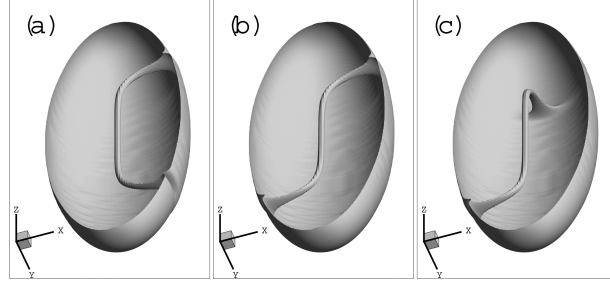


FIG. 1 – (a) vortex en U , (b) vortex en S plan, (c) vortex en S 3d. (d’après [8])

également que le minimum de l’énergie est toujours un vortex en U et qu’il n’existe que pour $\Omega\rho_0/|\log \varepsilon| > 1/2$.

Les expériences [36] mettent en lumière différentes configurations avec une seule ligne de vorticité. On peut observer numériquement [8] que les vortex sont soit du type U plan, soit de type S plan (dans les plans $x - z$ ou $y - z$), soit de type S et 3D, mais alors les 2 branches du S sont orthogonales (figure 1).

On peut vérifier à l’aide de l’énergie approchée \mathcal{E}_γ que les branches des U ou des S dans $z > 0$ sont nécessairement dans le plan $x - z$ ou $y - z$. Le minimum global de l’énergie est toujours un vortex en U . En revanche, pour tout Ω , il existe des points critiques de l’énergie en forme de S , c’est à dire symétriques par rapport à l’origine. Celà repose sur une minimisation de l’énergie à moment fixé. En effet, on peut considérer la minimisation de \mathcal{E}_γ comme un problème isopérimétrique, où la vitesse de rotation Ω devient un multiplicateur de Lagrange. Ceci permet d’avoir des estimations sur la longueur des courbes. Une des difficultés des preuves vient du fait que ρ_{TF} s’annule sur le bord. Une question ouverte consiste à minimiser la longueur du vortex (le premier terme de l’énergie) en fixant le moment. Cela devrait permettre de trouver d’autres points critiques de \mathcal{E}_γ .

2.3 Cas 2d

Dans le cas où le condensat est confiné suivant l’axe z , le problème devient 2D, c’est à dire qu’il n’y a pas de dépendance en z et on peut formellement faire $\beta = 0$ dans la définition de ρ_{TF} et dans (2). Dans ce cas, les vortex sont des points où la fonction d’onde s’annule et autour desquels il y a une circulation de phase. Ignat et Millot [24] ont déterminé en particulier Ω_d , la vitesse critique à partir de laquelle apparaissent d vortex et obtiennent un développement de l’énergie plus complet que dans le cas 3d, ce qui leur permet de localiser les vortex.

Théorème 2.2 [24] *Soit u_ε un minimiseur de*

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} [(|u|^2 - \rho_{TF}(x))^2 - (\rho_{TF}^-(x))^2] - \Omega x^\perp \cdot (iu, \nabla u) \right\} dx \quad (9)$$

sous la contrainte $\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 = 1$, soit $0 < \delta \ll 1$ une constante petite et

$$\Omega_d = \frac{2}{\rho_0} |\log \varepsilon| + \frac{2(d-1)}{\rho_0} \log |\log \varepsilon|.$$

(i) Si $\Omega \leq \Omega_1 - \delta \log |\log \varepsilon|$, alors quel que soit $R_0 < \sqrt{\rho_0}$, il existe $\varepsilon_{R_0} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_{R_0}$, u_ε ne s'annule pas dans B_{R_0} . De plus,

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_\varepsilon(\eta_\varepsilon) + o(1).$$

(ii) Si $\Omega_d + \delta \log |\log \varepsilon| \leq \Omega \leq \Omega_{d+1} - \delta \log |\log \varepsilon|$ pour un entier $d \geq 1$, alors quel que soit $R_0 < \sqrt{\rho_0}$, il existe $\varepsilon_{R_0} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_{R_0}$, u_ε a exactement d vortex $x_1^\varepsilon, \dots, x_d^\varepsilon$ de degré 1 dans B_{R_0} . De plus, $|x_j^\varepsilon| \leq C\Omega^{-1/2}$ pour tout $j = 1, \dots, d$ et $|x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| \geq C\Omega^{-1/2}$ si $i \neq j$ avec $C > 0$ indépendant de ε . Si $\tilde{x}_j^\varepsilon = \sqrt{\Omega} x_j^\varepsilon$, la configuration $(\tilde{x}_1^\varepsilon, \dots, \tilde{x}_d^\varepsilon)$ tend à minimiser dans \mathbb{R}^{2d} l'énergie renormalisée

$$w(b_1, \dots, b_d) = -\pi\rho_0 \sum_{i \neq j} \log |b_i - b_j| + \frac{\pi\rho_0}{2} \sum_{j=1}^d |b_j|^2. \quad (10)$$

De plus,

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_\varepsilon(\eta_\varepsilon) - \frac{\pi\rho_0^2}{2} d(\Omega - \Omega_1) + \frac{\pi\rho_0}{2} (d^2 - d) \log |\log \varepsilon| + \text{Min}_{b \in \mathbb{R}^{2d}} w(b) + Q_d + o(1) \quad (11)$$

où Q_d est une constante explicite qui dépend seulement de d .

2.4 Changement de piège

Dans un travail en collaboration avec S.Alama et L.Bronsard [4], nous étudions le cas d'un autre type de piégeage que le piégeage harmonique. En effet, dans de récentes expériences [41], un laser supplémentaire est ajouté pour créer un potentiel du type $V(r) = -r^2 + r^4$, c'est à dire que la fonction ρ_{TF} n'est plus $\rho_0 - r^2$ mais $\rho_0 - V(r)$, dans le cas où on néglige la dépendance en z . La particularité est l'existence d'un vortex géant pour certaines valeurs de la rotation. C'est ce que nous prouvons rigoureusement.

3 Rotation rapide, réseau de vortex

Nous nous intéressons à la minimisation de l'énergie (6) sous la contrainte de norme 1 dans le cas où Ω est proche de 1 : le condensat s'étend et le nombre de vortex augmente. La fréquence effective de piégeage transverse n'est pas 1 mais $\sqrt{1 - \Omega}$ comme nous allons le voir, et donc est beaucoup plus petite que celle suivant l'axe z : le condensat est fortement confiné selon l'axe z , la fonction d'onde se découple alors entre la partie en z et la partie

transverse et on peut se limiter à l'étude du modèle 2D, bien que la preuve rigoureuse ne soit pas faite.

Le terme d'énergie cinétique et de rotation sont le début du développement d'un carré : en ajoutant et retranchant le terme manquant, on se ramène à l'étude de l'énergie suivante, qui comporte ce que l'on appelle un potentiel effectif de piégeage :

$$E(\psi) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{2} |\nabla\psi - i\Omega \times r\psi|^2 + \frac{1}{2}(1 - \Omega^2)r^2|\psi|^2 + \frac{1}{2}Na|\psi|^4. \quad (12)$$

On voit bien sous cette forme que pour que l'énergie soit bornée inférieurement, il faut que $\Omega < 1$, ce qui veut dire que le potentiel de piégeage est plus fort que la rotation. Le premier terme de l'énergie est identique à l'énergie d'une particule dans un champ magnetique uniforme 2Ω . Les minimiseurs de

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{2} |\nabla\psi - i\Omega \times r\psi|^2 \text{ sous } \int_{\mathbf{R}^2} |\psi|^2 = 1. \quad (13)$$

sont connus [30] par l'étude des valeurs propres de $-(\nabla - i\Omega \times r)^2$. Le minimum est Ω et est atteint dans un espace de dimension infinie appelé niveau de Landau fondamental ou lowest Landau level (LLL) :

$$\psi(x, y) = P(z)e^{-\Omega|z|^2/2} \text{ avec } z = x + iy \quad (14)$$

où P est un polynôme. Les autres valeurs propres sont $(2k + 1)\Omega$, $k \in \mathbf{N}$. Les vortex étant donnés par les zéros de P , ceci en fait une représentation très aisée.

Nous allons voir que quand Ω tend vers 1, les deuxième et troisième termes de l'énergie (12) produisent une contribution d'ordre $\sqrt{1 - \Omega}$, ce qui est beaucoup plus petit que la différence entre deux valeurs propres de $-(\nabla - i\Omega \times r)^2$, soit 2Ω . Il est donc naturel dans un premier temps de se restreindre au premier espace propre et minimiser l'énergie (12) dans cet espace de dimension infinie. Nous travaillons en fait dans un espace qui ne dépend pas de Ω :

$$\psi(z) = P(z)e^{-|z|^2/2} \text{ avec } P(z) = A \prod_{i=1}^n (z - z_i). \quad (15)$$

Nous donnerons plus bas de plus amples détails sur ce choix d'ansatz. Il est motivé par de récents papiers de physique : Ho [23] a calculé l'énergie (12) d'une configuration du type (15), où les z_i sont sur un réseau triangulaire et a trouvé que la fonction d'onde moyennée sur les cellules de vortex a une décroissance gaussienne. Les propriétés du réseau de vortex et le type de décroissance de la fonction d'onde sont des sujets ayant fait l'objet de papiers très récents : ce n'est que récemment que Cooper Kominas and Read [19] ont observé numériquement la distortion du réseau sur le bord du condensat et la décroissance de la fonction d'onde qui est plus proche d'une parabole inversée que d'une gaussienne. Il y a deux façons d'expliquer le profil en parabole inversée : soit en prenant en compte les contributions à la fonction d'onde venant de niveaux de Landau excités, soit en distordant le réseau dans le niveau de Landau le plus bas, ie déplaçant les z_i de (15) à partir de leur

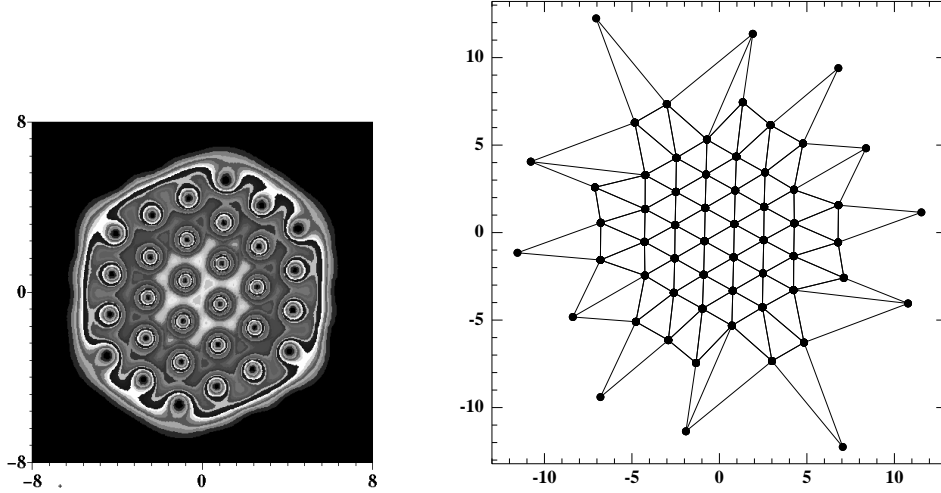


FIG. 2 – Un exemple avec $\Omega = 0.999$ et $n = 58$ gauche : densité $|\psi|$ et droite : configuration des zéros.

position sur un réseau régulier. Watanabe Baym et Pethick [42] ont affirmé que la deuxième solution était la bonne. Avec X.Blanc et J.Dalibard [7], nous avons étudié la structure du réseau de vortex et trouvons que le minimum est atteint pour un réseau présentant une distortion sur les bords (figure 2). Nous relierons la distortion du réseau à la décroissance de la fonction d'onde. Cela repose sur des techniques de convergence double échelle. La preuve rigoureuse est faite dans [6]. Cela fournit une borne supérieure de l'énergie, que nous espérons optimale.

Nous voulons minimiser l'énergie sur le polynôme P , c'est à dire sur n , son degré, et z_i la localisation des vortex. Notre but est de comprendre la localisation optimale. Dans [7], nous avons effectué des simulations numériques, avec une technique de gradient conjugué sur les z_i , qui conduit à la configuration illustrée sur la Figure 2. A droite, nous avons tracé les z_i et à gauche $|\psi|$ où ψ est reliée aux z_i par (15) : dans une région centrale, les vortex sont sur un réseau triangulaire régulier, tandis que le réseau se distord sur les bords. Le profil de densité $|\psi|$ indique que les vortex visibles sont ceux de la partie centrale en réseau régulier, la partie distordue correspondant à une zone de densité très faible.

Quand ψ est de la forme (15), il y a une relation entre le gradient de sa phase et son module : $\frac{i}{2} (\psi \nabla \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla \psi) - r^\perp \psi |\psi| = \psi \nabla^\perp |\psi|$, où $(x, y)^\perp = (-y, x)$. Cela implique

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla \psi|^2 = \int_{\mathbf{R}^2} r^2 |\psi|^2 = 1 + \int_{\mathbf{R}^2} (L_z \psi) \bar{\psi}, \quad (16)$$

si bien que si ψ est de la forme (15), l'énergie (12) s'écrit

$$E(\psi) = E_{LLL}(\psi) = \Omega + \int_{\mathbf{R}^2} (1 - \Omega) r^2 |\psi|^2 + \frac{Na}{2} |\psi|^4. \quad (17)$$

Si nous minimisons (17) sans restriction, nous trouvons que le minimum est

$$|\psi_{\min}(r)|^2 = \frac{2}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)_+, \quad R_0 = \left(\frac{2Na}{\pi(1-\Omega)}\right)^{1/4}. \quad (18)$$

C'est une première indication de l'échelle du problème : l'extension du condensat est d'ordre R_0 , qui est grand quand Ω tend vers 1. Ceci conduit à une borne inférieure pour E_{LLL} :

$$\epsilon_{\min} := E_{LLL}(\psi_{\min}) - \Omega = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{Na(1-\Omega)}{\pi}}. \quad (19)$$

Notons que (18) ne peut être approchée par des fonctions ψ_n de la forme (15) : en effet, si ψ_n converges vers ψ_{\min} , alors, puisque $\Delta(\psi_n e^{|z|^2/2}) = 0$, nous aurions $\Delta(\psi_{\min} e^{|z|^2/2}) = 0$, ce qui n'est pas vrai. Le calcul de l'énergie de ψ_{\min} nécessite de revenir à (12). Cela conduit à une contribution de l'énergie potentielle d'ordre R_0^2 , et donc beaucoup plus grande que (19). Néanmoins, avec une répartition appropriée des vortex z_i , le but est de construire une fonction test dont l'énergie est du même ordre que (19) et dont la décroissance approche celle de (18). Nos résultats principaux [6, 7] sont les suivants : si les vortex sont sur un réseau régulier, la fonction d'onde décroît comme une gaussienne et nous donnons une preuve rigoureuse de l'estimée d'énergie de Ho [23]. De plus, nous construisons des distortions du réseau qui améliorent l'énergie et modifient la décroissance de la fonction d'onde, pour le rendre proche de celui d'une parabole inversée, ainsi que l'ont observé [19, 38, 42].

Dans ce qui suit, ℓ dénote un réseau régulier hexagonal, dont la cellule unité Q , centrée à l'origine a un volume V . De plus, nous identifions les nombres complexes et les vecteurs de \mathbb{R}^2 si bien que dz dénote la mesure de Lebesgue $2d \, dx \, dy$. Le symbole \oint dénote la moyenne d'une fonction ℓ -periodique : $\oint f = \frac{1}{V} \int_Q f$.

Théorème 3.1 *Soit ℓ un réseau régulier hexagonal, Q sa cellule unité et $V = |Q| > \pi$. Soit*

$$\psi_R(z) = A_R \prod_{j \in \ell \cap B_R} (z - j) e^{-|z|^2/2} \quad (20)$$

avec A_R choisi tel que $\|\psi_R\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$. Alors, quand R tend vers ∞ ,

$$|\psi_R(z)| \longrightarrow \psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \eta(z) e^{-|z|^2/(2\sigma^2)} \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^2, (1+|z|^2)dz) \text{ pour tout } p \geq 1, \quad (21)$$

où

$$\frac{1}{\sigma^2} = 1 - \frac{\pi}{V} \quad (22)$$

et η est une fonction ℓ -periodique qui s'annule en chaque point de ℓ et qui est solution de

$$-\Delta(\log \eta) = 2\pi\delta_0 - \frac{2\pi}{V} \text{ dans } Q,$$

avec des conditions de bord périodiques. De plus, $\lim_{R \rightarrow +\infty} E_{LLL}(\psi_R) = E_{LLL}(\psi)$. Quand σ tend vers l'infini,

$$E_{LLL}(\psi) - \Omega \sim (1 - \Omega)\sigma^2 + \frac{1}{4} \frac{Nab}{\pi\sigma^2} \text{ où } b = \frac{f|\eta|^4}{(f|\eta|^2)^2}. \quad (23)$$

L'effet du réseau de vortex est de modifier la décroissance de la gaussienne de $e^{-|z|^2/2}$ à $e^{-|z|^2/2\sigma^2}$, où σ dépend du volume à travers (22). Il faut choisir le σ optimal dans (23), ce qui donne

$$\sigma^4(1 - \Omega) = \frac{1}{4} \frac{Nab}{\pi} \quad (24)$$

Ce choix de σ vérifie $\sigma \rightarrow +\infty$ quand Ω tend vers 1. La condition de volume (22) et la valeur de σ (24) impliquent

$$V = \pi \left(1 + \sqrt{(1 - \Omega) \frac{4\pi}{Nab}} \right). \quad (25)$$

L'estimée d'énergie est alors

$$E_{LLL}(\psi) - \Omega \underset{\Omega \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{\frac{Nab}{\pi}} (1 - \Omega). \quad (26)$$

C'est à comparer à (19), qui est meilleure par un facteur $\sqrt{8/9b}$, mais est du même ordre, quand $1 - \Omega$ est petit. Le coefficient b prend en compte la contribution moyenne des vortex dans chaque cellule. Comme dans le cas des supraconducteurs près de H_{c2} , pour le réseau d'Abrikosov, le choix du réseau qui minimise b est le réseau hexagonal [27]. Une valeur approchée de b est 1.16. Notre but est d'améliorer le coefficient devant la racine carrée dans (26). L'observation principale est que le fait de modifier la localisation des vortex à partir d'un réseau régulier permet de changer la décroissance de la fonction d'onde et donc améliorer l'énergie.

Théorème 3.2 *Il existe une suite de fonctions ψ_Ω de la forme (15), tel que quand Ω tend vers 1,*

$$E_{LLL}(\psi_\Omega) - \Omega \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{Nab}{\pi}} (1 - \Omega). \quad (27)$$

Ceci est plus proche de la borne inférieure (19) que le réseau régulier : le coefficient numérique est le même que dans (19), à part le coefficient b , qui vient des vortex.

Exposons maintenant les principales idées de la preuve. Pour le réseau régulier, nous décomposons $\log|\psi_R(z)|$ en $v_R(z) + w_R(z)$ avec

$$v_R(z) = \sum_{j \in \ell \cap B_R} \log|z - j| - \frac{1}{V} \int_Q \log|z - y - j| dy \quad (28)$$

$$w_R(z) = \log A_R - \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{V} \sum_{j \in \ell \cap B_R} \int_Q \log |z - y - j| dy. \quad (29)$$

A ce stade, nous avons uniquement ajouté et soustrait la somme des integrales. Quand R tend vers l' ∞ , nous prouvons que v_R converge vers une série periodique v et e^{w_R} vers une gaussienne avec une décroissance modifiée $1/\sigma^2$. Le calcul de l'énergie utilise la convergence double échelle [13] qui permet de separer les intégrales pour v de la gaussienne et obtenir la contribution de b .

Pour la preuve du Théorème 3.2, nous définissons le rayon R par

$$R = \left(\frac{2Nab}{\pi(1-\Omega)} \right)^{1/4}, \quad (30)$$

et nous effectuons une transformation du réseau de la façon suivante : pour j dans ℓ , un réseau triangulaire de cellule unité de volume $V = \pi$, nous définissons le réseau image ℓ'_R par

$$k \in \ell'_R \text{ si } k = \nu_R(|j|)j \text{ pour } j \in \ell \cap B_R. \quad (31)$$

Nous supposons que ν_R est proche de 1 quand Ω tend vers 1, au sens,

$$\nu_R^2(r) = 1 + \frac{f(r^2/R^2)}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad (32)$$

où $f(x)$ est une fonction continue, telle qu'il existe γ avec $f(\gamma) = \infty$ et $\int_0^\gamma f(s) ds = \infty$. En fait, nous allons voir que la fonction f qui produit l'énergie minimale est $f(s) = 1/(1-s)$.

Nous souhaitons appliquer la même idée que pour le réseau régulier, en utilisant v_R et w_R pour ce réseau distordu. Contrairement à la preuve pour le réseau régulier, nous ne pouvons pas étudier les deux limites $R \rightarrow \infty$ dans (21) et $\sigma \rightarrow \infty$ dans (23) séparément, puisque R est relié à Ω par (30). Le réseau a une extension finie pour tout R et nous devons passer à la limite dans la convergence double échelle en même temps que sur l'extension du réseau. Pour des raisons techniques, nous ne pouvons relier w_R à l'intérieur et l'extérieur de B_R et faire de la convergence dominée.

Afin d'éviter cette difficulté, nous introduisons un réseau régulier extérieur dont la taille caractéristique tend vers l'infini dans une dernière étape. Soit $\alpha \in (0, \gamma)$, R relié à Ω par (30), et

$$\lambda_R(r) = \begin{cases} \nu_R(r) & \text{si } r \leq \alpha R, \\ \nu_{\alpha, R} = \nu_R(\alpha R) & \text{si } r > \alpha R, \end{cases} \quad (33)$$

et $\ell'_R = \{\lambda_R(|j|)j, j \in \ell\}$. Pour α fixé, nous faisons tendre R vers l' ∞ , et étudions la limite des fonctions d'onde qui s'annulent en chaque point de ℓ'_R :

$$\psi_R(x) = A_R \prod_{j \in \ell} (x - \lambda_R(|j|)j) e^{-\frac{|x|^2}{2}}. \quad (34)$$

Puisque α est fixé, $\nu_R(\alpha R)$ tend vers 1. Nous utilisons des idées semblables au réseau régulier et identifions une convergence double échelle vers une partie périodique d'un côté

et un profil dépendant de f donné par

$$|\psi(x)|^2 = e^{-F(|x|^2)} \mathbf{1}_{B_\alpha}(x) + e^{\alpha^2 f(\alpha^2) - F(\alpha^2) - f(\alpha^2)|x|^2} \mathbf{1}_{B_\alpha^c}(x), \quad (35)$$

où F est une primitive de f . La preuve utilise de façon essentielle que λ_R est proche de 1. Dans une dernière étape seulement, on passe à la limite $\Omega \rightarrow 1$, puis α tend vers γ , si bien que le réseau régulier extérieur a une cellule unité de volume qui tend vers l'infini et la contribution extérieure disparaît. Notre estimée d'énergie est alors :

$$E_{LLL}(\psi_\Omega) - \Omega \underset{\Omega \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{\frac{2Nab(1-\Omega)}{\pi}} \int_0^\gamma \left(s e^{-F(s)} + \frac{1}{4} e^{-2F(s)} \right) ds, \quad (36)$$

où F est une primitive de f telle que $\int_0^\gamma e^{-F(s)} ds = 1$.

Nous voulons déterminer quel type de distortion f fournit la meilleure énergie. Le minimiseur de (36) sous $\int_0^\gamma e^{-F(s)} ds = 1$ est atteint quand

$$\gamma = 1 \text{ et } e^{-F(r^2)} = 2(1 - r^2), \quad (37)$$

soit $f(s) = 1/(1-s)$. La fonction d'onde se comporte donc asymptotiquement comme une parabole inversée. La valeur limite de l'énergie est (27).

Insistons sur le fait que la preuve utilise deux réseaux : un réseau de départ triangulaire et un réseau image obtenu par (31) et (32). La signification de $\gamma = 1$ dans (37) est que le réseau initial est tronqué dans une boule B_R : les points à l'extérieur de B_R sont envoyés à l'infini. Il y a deux régions dans le réseau initial : les points suffisamment loin du cercle de rayon R , pour lesquels ν_R est presque égal à 1, et les points proches du cercle, à distance plus petite que \sqrt{R} par exemple. Pour les premiers, le réseau image est presque régulier et les points sont à l'intérieur de B_R . Ce sont les points visibles sur le tracé de densité de la Figure 2. Au contraire, les points proche du cercle sont fortement modifiés par (32) et envoyés loin. Finalement, R est à la fois le rayon de "l'horizon" du réseau initial, mais aussi le rayon de la parabole inversée limite (37). Les points non visibles sur le profil de densité sont dans la partie distordue, mais leur contribution à créer la parabole inversée est importante puisque sans eux, la décroissance est gaussienne.

Pour chaque R , cette analyse donne une estimation du nombre de points dans le réseau distordu, relié au nombre de points dans un réseau triangulaire de cellule unité de volume π , inclus dans une boule de rayon R . Il reste à prouver que ce nombre est bien le nombre de vortex minimisant l'énergie.

Un de nos outils techniques dans la preuve consiste à utiliser un réseau régulier extérieur, donc l'espacement tend vers l'infini dans une dernière étape. Pour ce débarrasser de cela, il faudrait savoir compter le nombre de points extrémaux d'un réseau les plus proche d'un cercle de rayon R et estimer la convergence de v_R et w_R due au fait que les points extrémaux du réseau ne sont pas sur un cercle mais au sommet d'hexagones. Nous ne sommes pas capables de prouver que l'extension finie du réseau ne crée pas un terme de bord dans l'énergie.

Nos résultats amènent à une borne supérieure pour l'énergie. Une question naturelle serait de prouver la borne inférieure et la Γ convergence. Il y a une différence entre la borne inférieure (19) et la borne supérieure(27) au niveau du coefficient b . Nous pensons que la borne inférieure optimale devrait contenir b et que le rayon de la parabole inversée limite devrait être (30) au lieu de (18).

Une première question est de comprendre la borne inférieure en se restreignant au LLL et prouver qu'elle correspond à la borne supérieure (27). Pour le moment, nous ne pouvons pas le prouver, mais il apparaît que pour reproduire un profil de parabole inversée dans le cadre de l'espace (15), il faut beaucoup de vortex, ce qui crée une contribution dans l'énergie à travers b . Nos simulations numériques confirment cela. Prouver qu'une suite minimisante a beaucoup de zéros et qu'ils sont sur un réseau presque régulier semble très délicat et est relié à des problèmes similaires en cristallisation et sphere packing.

Une autre question consiste à prouver que la borne inférieure restreinte au LLL fournit la borne inférieure dans tout l'espace pour (12). Cela semble plus facile. En particulier, si ψ est un minimiseur de (12), on peut le projeter sur le LLL et son orthogonal : $\psi = \psi_{LLL} + \psi_{\perp}$. La borne supérieure et les propriétés de l'opérateur (13) impliquent que $\|\psi_{LLL}\|_{L^2}$ est proche de 1 et $\|\psi_{\perp}\|_{L^2}$ est petit comme $\sqrt{1 - \Omega}$. En utilisant l'inégalité de Poincaré établie par Lu et Pan [30], on peut améliorer la norme et obtenir une estimée L^{∞} pour ψ_{\perp} . Ceci devrait permettre de prouver que l'énergie de ψ se découple en $E_{LLL}(\psi_{LLL})$ plus un terme positif venant de ψ_{\perp} . La borne inférieure devrait alors donner le résultat. On peut ainsi obtenir la convergence du minimiseur de l'énergie de Gross Pitaevskii vers sa projection sur l'espace (15), mais ce n'est pas optimal tant qu'une borne inférieure correcte manque.

Notons que le modèle de champ moyen que nous considérons n'est valable que si le nombre de vortex est très inférieur au nombre d'atomes dans le système, ce qui est le cas des expériences actuelles. Sinon il faut considérer d'autres modèles [20, 40].

Références

- [1] Abo-Shaeer JR, Raman C, Vogels JM, Ketterle W, Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates (2001) Science **292**, 476-479.
- [2] Aftalion A, Properties of vortices in Bose Einstein condensates, C.R. Physique, **5**, (2004), 9-20.
- [3] Aftalion A, Vortices in Bose Einstein condensates, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, en préparation.
- [4] Aftalion A, Alama S, Bronsard L, Giant vortex and the breakdown of strong pinning in a rotating Bose-Einstein condensate, à paraître dans Archive for Rational Mechanics and Analysis.
- [5] Aftalion A, Blanc X, Existence of vortex free solutions in the Painlevé boundary layer of a Bose Einstein condensate, (2004) J. Math. Pures Appl. **83** 765-801.

- [6] Aftalion A, Blanc X, Vortex lattices in rotating Bose Einstein condensates, (2005), preprint.
- [7] Aftalion A, Blanc X, Dalibard J, Vortex patterns in a fast rotating Bose-Einstein condensate, (2005) Phys. Rev. A **71** 023611.
- [8] Aftalion A, Danaila I, Three Dimensional vortex configurations in a rotating Bose Einstein condensate. (2003) Phys. Rev. A. **68** 023603.
- [9] Aftalion A, Du Q, Pomeau Y, Dissipative flow and vortex shedding in the Painlevé boundary layer of a Bose Einstein condensate. (2003) Phys. Rev. Lett. **91** 090407
- [10] Aftalion A, Jerrard RL, Shape of vortices for a rotating Bose-Einstein condensate (2002) Phys. Rev. A **66** 023611.
- [11] Aftalion A, Jerrard RL, Properties of a single vortex solution in a rotating Bose Einstein condensate, (2003) C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I, 336.
- [12] Aftalion A, Riviere T, Vortex energy and vortex bending for a rotating Bose-Einstein condensate, (2001) Phys. Rev. A **64**, 043611.
- [13] Allaire G, Homogenization and two-scale convergence. SIAM J. Math. Anal. **23** 1482-1518 (1992).
- [14] Bethuel F, Brezis H, Helein F (1994) Ginzburg-Landau vortices, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 13. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
- [15] Butts D, Rokhsar R, Predicted signatures of rotating Bose -Einstein condensates, (1999) Nature **397**, 327.
- [16] Bretin V, Stock S, Seurin Y, Dalibard J, Fast Rotation of a Bose-Einstein Condensate Phys. Rev. Lett. **92**, 050403 (2004).
- [17] Coddington et al, Experimental studies of equilibrium vortex properties in a Bose-condensed gas, cond-mat/0405240.
- [18] Cohen-Tannoudji CN, in : Les Prix Nobel 1997 (The Nobel Foundation, Stockholm, 1998), pp. 87-108, Reprinted in : Rev. Mod. Phys. 70 :707-719.
- [19] Cooper NR, Komineas S, Read N, Vortex lattices in the lowest Landau level for confined Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A **70**, 033604 (2004).
- [20] Cooper NR, Wilkin NK, Gunn JMF, Quantum Phases of Vortices in Rotating Bose-Einstein Condensates, Phys. Rev. Lett. **87**, 120405 (2001).
- [21] Cornell EA, Wieman CE, *Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments*, in : Les Prix Nobel 2001 (The Nobel Foundation, Stockholm, 2002), pp. 87-108, Reprinted in : Rev. Mod. Phys. **74**, 875-893; Cem. Phys. Cem. **3**, 476-493 (2002)
- [22] Donnelly RJ, Quantized Vortices in Helium II, (Cambridge, 1991), Chaps. 4 and 5.
- [23] Ho TL, Bose-Einstein Condensates with Large Number of Vortices, Phys. Rev. Lett. **87** 060403 (2001).

- [24] Ignat R, Millot V, Energy expansion and vortex location for a two dimensional rotating Bose-Einstein condensate (2005) preprint.
- [25] Jerrard RL, More about Bose-Einstein condensates (2004) preprint.
- [26] Ketterle W, *When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser*, in : Les Prix Nobel 2001 (The Nobel Foundation, Stockholm, 2002), pp. 118-154, Reprinted in : Rev. Mod. Phys. **74**, 1131-1151 (2002) ; Chem. Phys. Chem. **3**, 736-753 (2002)
- [27] Kleiner WH, Roth LM, Autler SH, Bulk Solution of Ginzburg-Landau Equations for Type II Superconductors : Upper Critical Field Region, Phys. Rev. **133**, A1226, (1964).
- [28] Lassoued L, Mironescu P, Ginzburg-Landau type energy with discontinuous constraint (1999) J. d'Analyse, **77**, 1-26.
- [29] Lieb E, Seiringer R, Yngvason J, Bosons in a trap : A rigorous derivation of the Gross-Pitaevskii energy functional (2000) Phys. Rev. A **61**, 0436021.
- [30] Lu K, Pan XB, Gauge invariant eigenvalue problems in R^2 and in R_+^2 . Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 3, 1247–1276.
- [31] Madison K, Chevy F, Bretin V, Dalibard J, Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate, (2000) Phys. Rev. Lett., **84**, 806.
- [32] Pethick CJ, Smith H, (2002) Bose Einstein condensation in dilute gases, Cambridge University Press.
- [33] Pitaevskii L, Stringari S, (2003) Bose Einstein condensation, International series of monographs on physics, 116, Oxford Science Publications.
- [34] Raman C, Abo-Shaer JR, Vogels JM, Xu K, Ketterle W, Vortex Nucleation in a Stirred Bose-Einstein Condensate (2001) Phys. Rev. Lett. **87**, 210402.
- [35] Riviere T, Line vortices in the $U(1)$ -Higgs Model (1996) COCV **1** 77.
- [36] Rosenbuch P, Bretin V, Dalibard J, Dynamics of a single vortex line in a Bose-Einstein condensate (2002) Phys. Rev. Lett. **89**, 200403.
- [37] Sandier E, Serfaty S, Magnetic Ginzburg-Landau vortices, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, à paraître.
- [38] Schweikhard V, Coddington I, Engels P, Mogendorff VP, and Cornell EA, Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level, Phys. Rev. Lett. **92**, 040404 (2004).
- [39] Sheehy DE, Radzihovsky L, Vortices in Spatially Inhomogeneous Superfluids, (2004) cond-mat/0406205.
- [40] Sinova J, Hanna CB, MacDonald AH, Quantum Melting and Absence of Bose-Einstein Condensation in Two-Dimensional Vortex Matter, Phys. Rev. Lett. **89**, 030403 (2002).
- [41] Stock S, Bretin V, Chevy F, Dalibard J, Shape oscillation of a rotating Bose-Einstein condensate, Europhys.Lett. **65** 594 (2004).

- [42] Watanabe G, Baym G, Pethick CJ, Landau levels and the Thomas-Fermi structure of rapidly rotating Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **93**, 190401 (2004).