Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Roman G. Novikov

Détermination d'un champ de jauge sur $\mathbb{R}^d$ par sa transformée de Radon non-Abélienne

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° XVI, 7 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A16_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Détermination d'un champ de jauge sur $\mathbb{R}^d$ par sa transformée de Radon non-Abélienne

R. G. Novikov

CNRS, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629)
Université de Nantes
BP 92208, F-44322, Nantes cedex 03 France
e-mail: novikov@math.univ-nantes.fr

Résumé. Dans cet exposé nous présentons plusieurs résultats récents sur le problème de la détermination d'un champ de jauge sur $\mathbb{R}^d$ par sa transformée de Radon non-Abélienne le long de droites orientées. Cet exposé est basé en premier lieu sur le travail [R.Novikov, On determination of a gauge field on $\mathbb{R}^d$ from its non-abelian Radon transform along oriented straight lines, Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2002) **1**(4), 559-629].

On considère l'équation de transport

$$\theta\nabla\psi(x,\theta) + a_0(x)\psi(x,\theta) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{1}$$

où

$$\theta\nabla\psi = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \big(\frac{\partial}{\partial x_j} + a_j(x)\big)\psi$$

et a_j sont des fonctions suffisamment régulières sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $M(n,\mathbb{C})$ et $a_j(x) \to 0$ suffisamment vite quand $|x| \to \infty$, $j = 0, 1, \ldots, d$, par exemple,

$$a_j \in C^{\alpha,1+\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M(n,\mathbb{C})), \quad j = 0, 1, \ldots, d, \quad \text{pour un} \ \ \alpha > 0 \ \ \text{et un} \ \ \varepsilon > 0 \tag{2}$$

(voir la formule (10)). Dans (1) on considère θ comme un paramètre spectral.

On considère la matrice de diffusion S pour l'équation (1) :

$$S(x,\theta) = \lim_{s\to+\infty} \psi^+(x + s\theta, \theta), \quad (x,\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}, \tag{3}$$

où

$$T\mathbb{S}^{d-1} = \{(x,\theta) \mid \ x \in \mathbb{R}^d, \ \ \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \ \ x\theta = 0\} \tag{4}$$

et ψ^+ est la solution de (1) telle que

$$\lim_{s\to-\infty} \psi^+(x + s\theta, \theta) = I, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{5}$$

où I est la matrice identité $n \times n$. On interprète $T\mathbb{S}^{d-1}$ comme l'ensemble de toutes les droites orientées dans $\mathbb{R}^d$. Si $\gamma = (x, \theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}$ alors $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y = x + t\theta,\ t \in \mathbb{R}\}$ (modulo l'orientation) et θ donne l'orientation de γ. La matrice de diffusion S est invariante pour les transformations de jauge de la forme

$$\begin{aligned} &a = (a_0, a_1, \ldots, a_d) \to a' = (a'_0, a'_1, \ldots, a'_d), \\ &a'_j = g^{-1} a_j g + g^{-1} \partial_j g, \quad j = 1, \ldots, d, \quad a'_0 = g^{-1} a_0 g, \end{aligned} \tag{6}$$

où $\partial_j g(x) = \partial g(x)/\partial x_j$ et g est une fonction suffisamment régulière sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $GL(n, \mathbb{C})$ et $g(x) \to I$ suffisamment vite quand $|x| \to \infty$. Par exemple, sous l'hypothèse (2) la matrice de diffusion S et la propriété (2) elle-même sont invariantes par rapport aux transformations (6), où

$$\begin{aligned} &g \ \text{ est à valeurs dans } \ GL(n, \mathbb{C}), \\ &g - I \in C^{0,\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M(n, \mathbb{C})), \quad \partial_i g \in C^{\alpha, 1+\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M(n, \mathbb{C})), \quad i = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{7}$$

Notons que $S \equiv I$ si $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d) \equiv 0$.

On considère le problème de diffusion inverse suivant:

Problème 1. Étant donné S, trouver $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ modulo les transformations (6) (par exemple, sous les conditions (2),(7)).

La matrice S s'appelle aussi la transformée de Radon non-abélienne le long des droites orientées du champ de jauge a.

L'équation (1), la matrice de diffusion S et le problème 1 apparaissent, par exemple, dans les domaines suivants :

I. Géométrie différentielle, où

A. Pour $a_0 \equiv 0$ l'équation (1) décrit le transport parallèle de la fibre dans le fibré vectoriel trivial $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^n$, où $\mathbb{R}^d$ est la base et $\mathbb{C}^n$ est la fibre, avec la connexion $a = (a_1, \ldots, a_d)$ le long des géodésiques euclidiennes de $\mathbb{R}^d$ (voir [Sh], [No2]).

B. Pour $a_0 \not\equiv 0$ l'équation (1) décrit le transport parallèle de la fibre dans le fibré vectoriel trivial $\mathbb{R}^{d+1}_{1,d} \times \mathbb{C}^n$, où $\mathbb{R}^{d+1}_{1,d}$ est la base et $\mathbb{C}^n$ est la fibre, avec la connexion $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ (indépendant du temps) le long des géodésiques de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{d+1}_{1,d}$ (voir [No2]).

II. Théorie de champs de Yang-Mills:

A. Études de l'équation de Schrödinger $\sum_{j=1}^{d} -\big(\frac{\partial}{\partial x_j} + a_j(x)\big)^2 \psi + v(x)\psi = E\psi$ dans le champ de Yang-Mills $a = (a_1, \ldots, a_d)$ quand $E \to +\infty$ (voir [No2]).

B. Intégration des équations de Yang-Mills autoduales par la méthode de diffusion inverse (voir [MZ], [Wa], [V], [FI]).

III. Tomographie:

A. Tomographie de transmission de rayons X:

$$n = 1, \quad a_j \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{8.a}$$
$$S = \exp(-Pa_0), \tag{8.b}$$

où Pa_0 (définie par la formule (14) ci-après) est la transformée classique de rayons d'une fonction a_0 (transformée classique de Radon d'une fonction a_0 le long des droites) (voir [No2]).

B. Tomographie d'émission de simples photons:

$$n = 2, \quad a_j \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, d, \quad a_0 = \begin{pmatrix} \mu & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.a}$$
$$S = \begin{pmatrix} \exp(-P\mu) & -P_\mu f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.b}$$

où $P_\mu f$ (définie par la formule (16) ci-après) est la transformée de rayons atténués (transformée de Radon atténuée de f avec le coefficient d'atténuation μ (voir [No2]).

Pour le cas non-abélien (c'est-à-dire pour $n \geq 2$) la transformée de Radon non-abélienne S et le problème 1 ont été considérés pour la première fois dans [MZ] pour $d = 2$ (et pour une certaine forme spéciale de a) dans le cadre de l'intégration d'une réduction 2+1 - dimensionnelle (proposée dans [MZ]) des équations de Yang-Mills autoduales. Notons que [MZ] ne contient pas encore de théorème sur le problème 1; ce travail est écrit au niveau "physique". Pour le cas non-abélien et pour a à support compact certains théorèmes d'unicité locale (c'est-à-dire des théorèmes d'unicité sous l'hypothèse que a est petit en un certain sens) pour le problème 1 ont été obtenus pour la première fois dans [We] (pour $d = 2$, $a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv 0$) et [Sh] (pour $d \geq 2$, $a_0 \equiv 0$) (voir [We], [Sh], [No2]).

Notre but maintenant est de présenter quelques résultats généraux sur le problème 1 obtenus dans [No2]. Considérons

$$C^{\alpha,\sigma}(\mathbb{R}^d, M(n,\mathbb{C})) = \{f \in C^{[\alpha]}(\mathbb{R}^d, M(n,\mathbb{C})) \ \mid \ \|f\|_{\alpha,\sigma} < +\infty\}, \tag{10}$$

où $\alpha \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $[\alpha]$ est la partie entière de α, $C^k(\mathbb{R}^d, M(n,\mathbb{C}))$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, est l'espace de fontions k fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $M(n,\mathbb{C})$ (matrices complexes $n \times n$),

$$\|f\|_{0,\sigma} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^\sigma |f(x)|, \tag{11a}$$
$$\|f\|_{\alpha,\sigma} = \max(\|f\|_{0,\sigma}, \|f\|'_{\alpha,\sigma}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{11b}$$
$$\|f\|'_{\alpha,\sigma} = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, \ |y| \leq 1} (1 + |x|)^\sigma |y|^{-\alpha} |f(x+y) - f(x)|, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{11c}$$
$$\|f\|_{\alpha,\sigma} = \max(\|f\|_{\beta,\sigma}, \max_{|J|=\beta} \|\partial^J f\|_{\alpha-\beta,\sigma}) \ \text{ pour } \ \beta < \alpha \leq \beta + 1, \ \beta \in \mathbb{N}, \tag{11d}$$

(où $\partial^J = \partial^{|J|}/\partial x_1^{J_1}\dots\partial x_d^{J_d}$, $J\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^d$, $|J|=\sum_{i=1}^d J_i$),

$$|c| = \max_{\substack{1\le i\le n,\\ 1\le j\le n}} |c_{ij}| \ \text{ pour } \ c\in M(n,\mathbb{C}). \tag{11.e}$$

Théorème 1 ([No2]). *Supposons que $d\ge 3$, $\alpha\ge 2$, $\varepsilon>0$ et que $a=(a_0,a_1,\dots,a_d)$ satisfasse* (2). *Alors, S détermine a modulo les transformations* (6), (7).

Théorème 2 ([No2]). *Supposons que $d=2$, $\alpha>0$, $\varepsilon>0$. Alors, sous la condition* (2), *S ne détermine pas a modulo les transformations* (6), (7), *en général. Par exemple, soient*

$$n=2,\ a_0\equiv 0,\ a_1\equiv 0,\ a_2=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\mu-\bar\mu}{1+f\bar f}\begin{pmatrix}1 & f\\ \bar f & f\bar f\end{pmatrix}\right), \tag{12a}$$

où

$$\mu\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\quad f=f(x)=p(z)/q(z), \tag{12b}$$

où

$$p,q \ \textit{ sont des polynômes de } \ z=x_1+\mu x_2,\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\quad l=deg\,p-deg\,q>0. \tag{12c}$$

Alors,

$$\begin{aligned}&S\equiv I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \ \textit{ pour } \ a=(a_0,a_1,a_2)=(0,0,a_2),\\ &a_2\in C^{\alpha,1+l}(\mathbb{R}^2,su(2))\ \ \forall\alpha>0,\end{aligned} \tag{13a}$$

mais

$$\begin{aligned}&a=(0,0,a_2)\not\equiv 0 \ \textit{ modulo les transformations } \ (6)\\ &\textit{avec } \ g\in C^1(\mathbb{R}^2,GL(2,\mathbb{C})),\quad g(x)\to I \ \textit{ pour } \ |x|\to\infty.\end{aligned} \tag{13b}$$

Théorème 3 ([No2]). *Supposons que $d=2$, a satisfait* (2) *et $\|a\|_{\alpha,1+\varepsilon}=\sum_{j=0}^{2}\|a_j\|_{\alpha,1+\varepsilon}$ est suffisamment petite (pour α et ε fixés de* (2)*). Alors, S détermine a modulo les transformations* (6), (7).

Le théorème 1 est un théorème d'unicité globale pour le problème 1 en dimension $d\ge 3$. Le théorème 2 donne des contre-exemples pour l'unicité globale pour le problème 1 en dimension $d=2$. Le théorème 3 est un théorème d'unicité locale pour le problème 1 en dimension $d=2$.

Les théorèmes 1 et 3 sont démontrés dans [No2] de manière constructive, c'est-à-dire ces démonstrations contiennent des méthodes de reconstitution. La démonstration du théorème 1 (donnée dans [No2]) s'appuie essentiellement sur des résultats locaux pour le problème 1 en dimension $d=2$ (obtenus dans [No2]) dont le théorème 3 est un exemple. La démonstration du théorème 3 (donnée dans [No2]) développe la méthode de [MZ], où le problème 1 dans certains cas en dimension $d=2$ a été réduit à des problèmes de Riemann-Hilbert au niveau formel. Le théorème 2 est obtenu (dans [No2]) en utilisant des résultats de [Wa] et [V] sur les solitons pour une réduction 2+1- dimensionnelle (proposée dans [Wa]) des équations de Yang-Mills autoduales.

Notons que les contre-exemples (pour l'unicité globale pour le problème 1 en dimension $d = 2$) du théorème 2 ne sont pas des champs à support compact. Récemment dans [E] G.Eskin a publié le résultat suivant:

Théorème 4 [E]. *Supposons que $d = 2$, $a_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, M(n, \mathbb{C}))$ (où C_0^∞ désigne les fonctions infiniment lisses à support compact) $j = 0, 1, 2$. Alors, S détermine $a = (a_0, a_1, a_2)$ modulo les transformations* (6) *avec $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, GL(n, \mathbb{C}))$,*
$g - I \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, M(n, \mathbb{C}))$.

La méthode de démonstration du théorème 4 (proposée dans [E]) développe la méthode (de [MZ] et [No2]) utilisée pour la démonstration du théorème 3.

Dans certains cas importants (par exemple, sous les hypothèses (2), (8a) ou sous les hypothèses (2),(9a)) la matrice de diffusion S détermine uniquement a par des formules explicites. Notre but maintenant est de présenter quelques résultats de [No2] et [No3] sur le problème de diffusion inverse pour l'équation (1) sous les hypothèses (9a).

Théorème 5 [No2]. *Supposons que a satisfait* (2), (9a). *Alors, la formule* (9b) *pour S est valable, où*

$$P\mu(x, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \mu(x + s\theta) ds, \quad (x, \theta) \in T\mathbb{S}^{d-1} \tag{14}$$

et

$$P_\mu f(x, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-D\mu(x + s\theta, \theta)\right] f(x + s\theta) ds, \quad (x, \theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}, \tag{15}$$

$$D\mu(x, \theta) = \int_0^{+\infty} \mu(x + s\theta) ds, \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}. \tag{16}$$

En vertu du théorème 5, sous les hypothèses (9a) le problème de déterminer a à partir de S se réduit aux problèmes de déterminer μ à partir de $P\mu$ et (ensuite) de déterminer f à partir de $P_\mu f$. Ces deux derniers problèmes sont des problèmes de base (au niveau mathématique) de la tomographie d'émission de simples photons (SPECT=single-photon emission computed tomography) (utilisée en médecine nucléaire). L'objectif de cette tomographie est de déterminer la distribution des isotopes radioactifs dans un corps à partir de la radioactivité au voisinage de ce corps.

Dans ce cadre: f est la densité des émetteurs de photons γ (la densité des isotopes radioactifs), μ est le coefficient d'atténuation (de photons γ) linéaire du milieu, $P_\mu f(l)$, $l = (x, \theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}$, décrit l'intensité (espérée) de l'émission mesurée dans la direction θ par un détecteur à $+\infty$ sur l (par un détecteur sur la composante connexe de $l \backslash (supp\, f \cup supp \mu)$ contenant $+\infty$ sur l pour f et μ et à support compact).

En médecine, on détermine d'abord le coefficient μ d'atténuation de photons γ dans un corps humain à partir des radiographies (grosso modo à partir de $P\mu$), en utilisant des méthodes d'inversion de la transformation classique de Radon P. Ensuite, on introduit dans le corps (par exemple, dans le sang) un médicament où certains atomes sont remplacés par leurs isotopes radioactifs. On cherche alors la distribution de ce médicament ou autrement dit la distribution f des isotopes radioactifs dans le corps à partir de la radioactivité au voisinage du corps, c'est-à-dire grosso modo à partir de $P_\mu f$.

Des formules explicites d'inversion pour la transformation P sont connues depuis [R] (voir aussi, par exemple, [Na]). La première formule explicite d'inversion pour la transformation P_μ (dans le cas général) a été obtenue dans [No3].

Théorème 6 ([No3]). *Supposons que $\mu, f \in C^{\alpha,1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ pour un $\alpha \in]0,1[$ et un $\varepsilon > 0$. Alors, supposant μ connu, $P_\mu f$ sur $T\mathbb{S}^1$ détermine uniquement f sur $\mathbb{R}^2$ par les formules suivantes:*

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\int_{\mathbb{S}^1} \varphi(x,\theta)(\theta_1 + i\theta_2)d\theta, \tag{17a}$$

$$\varphi(x,\theta) = \exp\left[-D_{-\theta}\mu(x)\right]m(x\theta^\perp, \theta), \tag{17b}$$

$$m(s,\theta) = -iRe\left(\exp\left[-(2i)^{-1}(H_+P_\theta^\perp\mu)(s)\right](H_+\exp\left[(2i)^{-1}H_-P_\theta^\perp\mu\right]g_\theta)(s)\right), \tag{17c}$$

où

$$g_\theta(s) = P_\mu f(s\theta^\perp, \theta) \tag{18}$$

et D_θ, $P_\theta^\perp$, $H_\pm$, $\exp\left[\pm(2i)^{-1}H_\mp P_\theta^\perp\mu\right]$ sont les opérateurs tels que

$$\begin{aligned}
D_\theta u(x) &= \int_0^{+\infty} u(x+t\theta)dt,\\
P_\theta^\perp u(s) &= \int_{\mathbb{R}} u(s\theta^\perp + t\theta)dt,\\
H_\pm v(s) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(t)}{s \pm i0 - t}dt,\\
\exp\left[\pm(2i)^{-1}H_\mp P_\theta^\perp\mu\right]v(s) &= \exp\left[\pm(2i)^{-1}H_\mp P_\theta^\perp\mu(s)\right]v(s),
\end{aligned}$$

où u, v sont des fonctions de test, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$, $s \in \mathbb{R}$, $d\theta$ est l'élément d'arc standard sur $\mathbb{S}^1$.

Si $\mu \equiv 0$ alors (17) se réduit à la formule (4.6) de [No1] similaire à la formule (1.12) de [FN] et quelque peu différente de la formule d'inversion de Radon classique.

La démonstration du théorème 6 (proposée dans [No3]) utilise des méthodes de [MZ], [FN] et [No2]. Dans cette démonstration on réduit le problème initial (de déterminer f à partir de $P_\mu f$, supposant μ connu) à des problèmes de Riemann-Hilbert additifs (résolubles explicitement).

Notons que pour $d > 2$ la formule (17) permet de reconstruire $f\big|_Y$ pour chaque plan bi-dimensionnel $Y \subset \mathbb{R}^d$ à partir de $P_\mu f\big|_{T\mathbb{S}^1(Y)}$, où $T\mathbb{S}^1(Y)$ est l'ensemble de toutes les droites orientées dans Y, sous la condition que $\mu\big|_Y$ soit connue.

Pour savoir plus sur les questions considérées dans cet exposé voir [No2], [No3], [No4], [E] et [GJKNT].

Références

[E] G.Eskin, On the non-abelian Radon transform, Preprint 2004 (arXiv:math.AP/0403447)

[FI] A.S.Fokas and T.A.Ioannidou, The inverse spectral theory for the Ward equation and the 2+1 chiral model, *Commun. Appl. Analysis* **5** (2001), 235-246

[FN] A.S.Fokas and R.G.Novikov, Discrete analogues of $\bar{\partial}$-equation and of Radon transform, *C.R.Acad.Sci.,Paris* **313** (1991), 75-80

[GJKNT] J.-P.Guillement, F.Jauberteau, L.Kunyansky, R.Novikov and R.Trebossen, On single-photon emission computed tomography imaging based on an exact formula for the nonuniform attenuation correction, *Inverse Problems* **18** (2002), L11-L19

[MZ] S.V.Manakov and V.E.Zakharov, Three-dimensional model of relativistic-invariant field theory, integrable by inverse scattering transform, *Lett. Math. Phys.* **5** (1981), 247-253

[Na] F.Natterer, *The mathematics of computerized tomograpy*, (Teubner, Stuttgart and Wiley, Chichester, 1986)

[No1] R.G.Novikov, Small angle scattering and X-ray transform in classical mechanics, *Ark. Mat.* **37** (1999), 141-169

[No2] R.G.Novikov, On determination of a gauge field on $\mathbb{R}^d$ from non-abelian Radon transform along oriented straight lines, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **1** (2002), 559-629

[No3] R.G.Novikov, An inversion formula for the attenuated X-ray transformation, *Ark. Mat.* **40** (2002), 145-167

[No4] R.G.Novikov, On the range characterization for the two-dimensional attenuated X-ray transformation, *Inverse Problems* **18** (2002) 677-700

[R] J.Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat.* K1 **69** (1917), 262-267

[Sh] V.A.Sharafutdinov, On an inverse problem of determining a connection on a vector bundle, *J. Inv. Ill-Posed Problems* **8** (2000), 51-88

[V] J.Villarroel, The inverse problem for Ward's system, *Stud. Appl. Math.* **83** (1990), 211-222

[Wa] R.S.Ward, Soliton solutions in an integrable chiral model in 2+1 dimensions, *J.Math.Phys* **29** (1988), 386-389

[We] L.B.Wertgeim, Integral geometry with matrix weight and a nonlinear problem of recovering matrices, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **319** (1991), 531-534 (in Russian)