



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2003-2004

Habib Ammari et Hyeonbae Kang

Sur le Problème de Conductivité Inverse

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° XIII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A13_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Sur le Problème de Conductivité Inverse

Habib Ammari
Centre de Mathématiques Appliquées
Ecole Polytechnique & CNRS UMR 7641
91128 Palaiseau Cedex, France
ammari@cmapx.polytechnique.fr

Hyeonbae Kang
School of Mathematical Sciences
Seoul National University
Seoul 151-747, Corée du Sud
hkang@math.snu.ac.kr

1 Introduction

Beaucoup de travaux récents dans le domaine des problèmes inverses ont été consacrés à la détermination (partielle) du coefficient γ de l'équation de conductivité $\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0$ dans Ω , $u = f$ sur $\partial\Omega$, à partir de la connaissance (partielle) de l'opérateur Dirichlet-Neumann $\Lambda_\gamma : f \mapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\partial\Omega}$. Les résultats obtenus comprennent des résultats d'unicité, des résultats de stabilité et des algorithmes de reconstruction [1, 18, 24, 38, 44, 46, 50]. Les résultats de ces algorithmes sont insatisfaisants à cause de trois difficultés majeures.

- (i) L'application $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ est fortement non-linéaire.
- (ii) Le caractère mal posé du problème qui se traduit par une faible sensibilité de Λ_γ à certaines variations de la conductivité γ .
- (iii) De plus, en pratique, on ne dispose que d'un nombre fini de mesures et non pas de l'opérateur de Dirichlet-Neumann Λ_γ tout entier.

Ces difficultés ne sont surmontables que dans un cadre asymptotique utilisable en imagerie médicale [49, 10] ou en contrôle non-destructif de structures métalliques. A.P. Calderón [20] fut le pionnier de ce type d'approches asymptotiques.

L'objet de cet article est de présenter d'une manière synthétique les résultats obtenus sur ce thème. Nous renvoyons à [3] pour une présentation plus détaillée.

2 Le problème de conductivité inverse

Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, et ν la normale sortante au bord $\partial\Omega$. Le vecteur ν existe pour presque tout $x \in \partial\Omega$. On suppose que Ω contient m inhomogénéités sous forme de $\bigcup_{l=1}^m D_l$, où $D_l = z_l + \rho_l B_l$, les domaines B_l , pour $l = 1, \dots, m$, étant Lipschitziens et bornés. Les points z_l déterminent les centres de ces inhomogénéités et les petits paramètres ρ_l caractérisent leurs ordres de grandeur. On note par $\rho = \max_{l=1, \dots, m} \rho_l$. La conductivité du milieu ambiant $\Omega \setminus \overline{\bigcup_{l=1}^m D_l}$ est égale à 1 et celle de l'inhomogénéité D_l vaut k_l , où $0 < k_l \neq 1 < +\infty$, pour $1 \leq l \leq m$. Enfin, on suppose qu'il existe une constante $c_0 > 0$ tel que $|z_l - z_{l'}| \geq 2c_0 > 0, \forall l \neq l'$ et $\text{dist}(z_l, \partial\Omega) \geq 2c_0 > 0, \forall l$.

On note par E_ρ la solution du problème de conductivité

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\chi(\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^m \overline{D_l}) + \sum_{l=1}^m k_l \chi(D_l) \right) \nabla E_\rho = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = g, \quad \int_{\partial \Omega} E_\rho = 0, \end{cases}$$

où $\chi(D)$ désigne la fonction caractéristique de D , et par E_0 celle en l'absence d'inhomogénéités. La condition $g \in L_0^2(\partial \Omega)$, où $L_0^2(\partial \Omega)$ est le sous-espace des fonctions de $L^2(\partial \Omega)$ d'intégrale nulle, est bien nécessaire pour que le problème de conductivité admette une solution.

2.1 Formules asymptotiques

Pour énoncer les principaux résultats de cette section, il nous faut maintenant introduire les potentiels de simple et double couche. Ils sont construits de la façon suivante. On part de la solution fondamentale

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & d = 2, \\ \frac{1}{(2-d)\omega_d} |x|^{2-d}, & d \geq 3, \end{cases}$$

du Laplacien Δ dans \mathbb{R}^d ; ω_d est la surface de la sphère unité $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Les potentiels de simple et double couche d'une densité ϕ , portée par ∂D où $D \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné Lipschitzien, sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_D \phi(x) &:= \int_{\partial D} \Gamma(x-y) \phi(y) d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ \mathcal{D}_D \phi(x) &:= \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Gamma(x-y) \phi(y) d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial D. \end{aligned}$$

Pour une fonction u définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \partial D$, on pose

$$\frac{\partial}{\partial \nu^\pm} u(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \nabla u(x \pm t\nu_x), \nu_x \rangle, \quad x \in \partial D,$$

où ν_x , pour $x \in \partial D$, désigne le vecteur normal en x à ∂D . Les formules de trace suivantes sont démontrées par Verchota [51] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu^\pm} \mathcal{S}_D \phi(x) &= \left(\pm \frac{1}{2} I + \mathcal{K}_D^* \right) \phi(x), \quad x \in \partial D, \\ (\mathcal{D}_D \phi)|_\pm &= \left(\mp \frac{1}{2} I + \mathcal{K}_D \right) \phi(x), \quad x \in \partial D, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{K}_D \phi(x) = \frac{1}{\omega_d} \text{v.p.} \int_{\partial D} \frac{\langle y-x, \nu_y \rangle}{|x-y|^d} \phi(y) d\sigma_y$$

et \mathcal{K}_D^* est l'adjoint de l'opérateur \mathcal{K}_D dans $L^2(\partial D)$. Lorsque la surface ∂D est Lipschitzienne, \mathcal{K}_D est un opérateur borné sur $L^2(\partial D)$ et sa définition s'obtient par une intégrale singulière dont le calcul se situe entièrement sur ∂D [25]. On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.1 ([28], [51]) *Soit D un domaine borné Lipschitzien et $|\lambda| \geq \frac{1}{2}$. Alors, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{K}_D^* : L_0^2(\partial D) \rightarrow L_0^2(\partial D)$ est un isomorphisme.*

Soit maintenant

$$H_\rho[g](x) = -\mathcal{S}_\Omega(g)(x) + \mathcal{D}_\Omega(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega, \quad f := E_\rho|_{\partial\Omega}.$$

Remarquons d'abord que par construction, $H_\rho[g]$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ et Ω . Elle se calcule dans $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ à partir de la donnée de Neumann g et de la mesure f par une intégrale sur $\partial\Omega$. L'idée d'utiliser cette fonction harmonique $H_\rho[g]$ est introduite dans [34] où les auteurs montrent en particulier qu'en dimension $d = 2$, $H_\rho[g](x), x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, détermine d'une manière unique, pour un seul choix de $g \neq 0$, toute inhomogénéité de conductivité de forme circulaire.

Nous nous proposons de reconstruire les inhomogénéités $\bigcup_{l=1}^m D_l$ à partir de $H_\rho[g](x), x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. La formule de Green nous apprend que [34]

$$H_\rho[g](x) = \begin{cases} E_\rho(x) - \sum_{l=1}^m (k_l - 1) \int_{D_l} \nabla_y \Gamma(x-y) \cdot \nabla E_\rho(y) dy, & x \in \Omega, \\ - \sum_{l=1}^m (k_l - 1) \int_{D_l} \nabla_y \Gamma(x-y) \cdot \nabla E_\rho(y) dy, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

L'asymptotique de la fonction harmonique $H_\rho[g](x), x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, lorsque $\rho \rightarrow 0$, est fournie par l'énoncé suivant.

Théorème 2.2 ([12], [4]) *Supposons que $B_l = -B_l$, pour $l = 1, \dots, m$. Alors, on a*

$$H_\rho[g](x) = - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^d}{\omega_d |x - z_l|^d} (x - z_l) \cdot M_l \cdot \nabla E_0(z_l) + O\left(\sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^{2d}}{|x - z_l|^{d-1}}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega},$$

où le tenseur de polarisation de Pólya-Szegö M_l est défini par

$$M_l(B_l, k_l) := \int_{\partial B_l} y(\lambda_l I - \mathcal{K}_{B_l}^*)^{-1}(\nu) d\sigma_y; \quad \lambda_l = \frac{k_l + 1}{2(k_l - 1)}.$$

La généralisation suivante du tenseur de polarisation de Pólya-Szegö est introduite dans [4].

Définition 2.3 ([4]) *Le tenseur de polarisation généralisé d'ordre $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$, associé à (B, k) , est défini par*

$$M^{\alpha\beta} := \int_{\partial B} y^\alpha (\lambda I - \mathcal{K}_B^*)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} y^\beta \right) d\sigma_y; \quad \lambda = \frac{k + 1}{2(k - 1)}.$$

Une définition équivalente est la suivante [5] :

$$M^{\alpha\beta} := (k - 1) \left[\int_{\partial B} y^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial \nu} d\sigma_y + (k - 1) \int_{\partial B} y^\alpha \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \nu} \Big|_{-}(y) d\sigma_y \right],$$

où ψ^β est la solution du problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} \Delta \psi^\beta(x) = 0, & \text{dans } B \cup (\mathbb{R}^d \setminus \overline{B}), \\ \psi^\beta|_+ - \psi^\beta|_- = 0 & \text{sur } \partial B, \\ \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \nu} \Big|_+ - k \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \nu} \Big|_- = \nu \cdot \nabla x^\beta & \text{sur } \partial B, \\ \psi^\beta(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |x| \rightarrow \infty & \text{si } d = 3, \\ \psi^\beta(x) - \frac{1}{2\pi} \log |x| \int_{\partial B} \nu \cdot \nabla y^\beta \rightarrow 0 \text{ lorsque } |x| \rightarrow \infty & \text{si } d = 2. \end{cases}$$

Quelques remarques sont maintenant nécessaires.

- (i) Dans le cas général ($B_{l_0} \neq -B_{l_0}$ pour un certain l_0), l'asymptotique de la fonction harmonique $H_\rho[g](x)$ fait intervenir d'une manière naturelle les tenseurs de polarisation généralisés définis dans [4]. Elle s'écrit pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$:

$$H_\rho[g](x) = - \sum_{l=1}^m \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq d+1} \frac{\rho^{|\alpha|+|\beta|+d-2}}{\alpha! \beta!} \partial^\alpha \Gamma(x - z_l) \cdot M_l^{\alpha\beta} \cdot \partial^\beta E_0(z_l) + O\left(\sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^{2d}}{|x - z_l|^{d-1}}\right).$$

- (ii) Le reste $O\left(\sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^{2d}}{|x - z_l|^{d-1}}\right)$ est borné par $C \sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^{2d}}{|x - z_l|^{d-1}}$, où la constante C dépend uniquement de la constante c_0 et des caractères Lipschitziens de Ω et $B_l, l = 1, \dots, m$. La constante C explose lorsque l'un de ces domaines a un mauvais caractère Lipschitzien, ou en d'autres termes, il est aplati [12]. On dit qu'un domaine étoilé B a un mauvais caractère Lipschitzien si $\inf_{x \in \partial B} x \cdot \nu_x$ est proche de 0. La constante C explose également lorsque l'une des inhomogénéités touche le bord $\partial\Omega$.
- (iii) On note que la formule asymptotique de $H_\rho[g](x)$ reste valable quand une ou plusieurs inhomogénéités deviennent parfaitement conductrices ou isolantes, *i.e.* leurs conductivités k_l convergent vers $+\infty$ ou 0 ($\lambda_l \rightarrow \pm \frac{1}{2}$).
- (iv) L'asymptotique de la fonction harmonique $H_\rho[g](x)$ dans Ω est plus compliquée. Des couches limites, dues au caractère singulier de la perturbation de la conductivité, sont construites dans [9] pour obtenir un développement asymptotique uniforme de $H_\rho[g](x)$ dans Ω .
- (v) En utilisant les résultats de [21], on peut écrire des formules asymptotiques de $H_\rho[g](x)$ pour x à l'intérieur ou à l'extérieur de Ω qui correspondent à des perturbations générales de conductivité.

On considère une inhomogénéité $D = z + \rho B$ dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On trace dans les figures suivantes

$$\max_{x \in S} \log \left\| H_\rho[g](x) + \frac{\rho^2}{2\pi|x - z|^2} (x - z) \cdot M \cdot \nabla E_0(z) \right\|,$$

où S est une surface fermée de classe \mathcal{C}^2 enveloppant le domaine Ω [15].

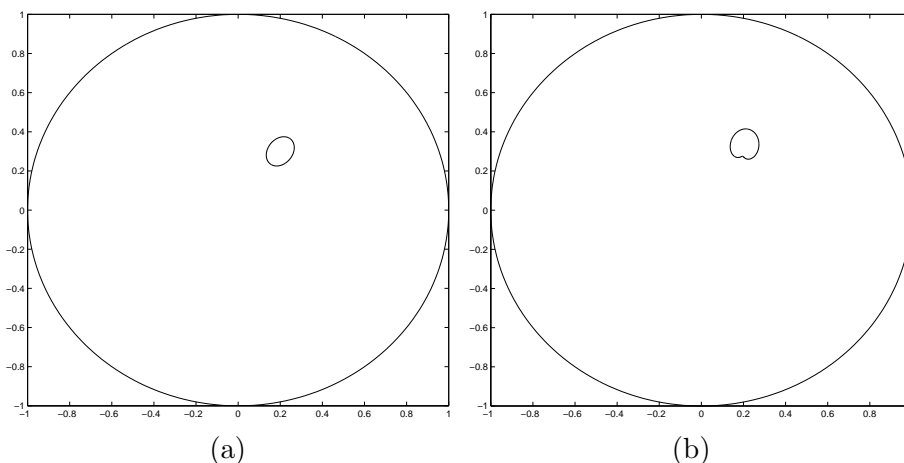


Figure 1: inhomogénéité symétrique (a); non symétrique (b)

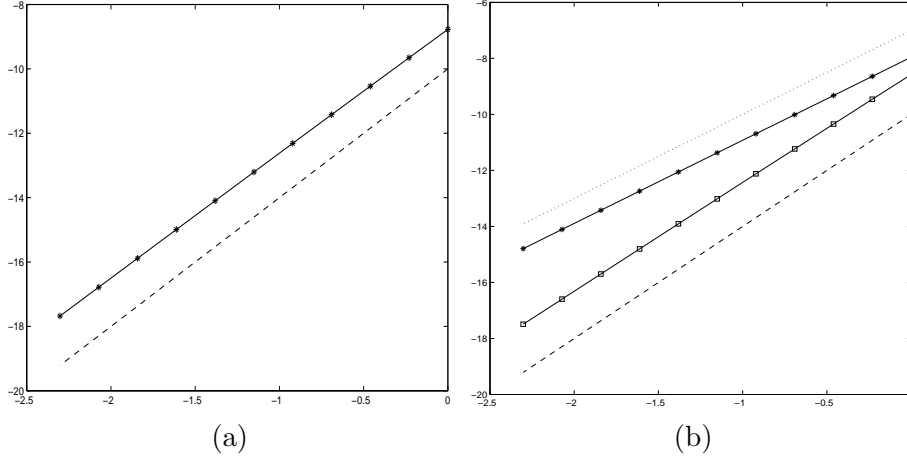


Figure 2: reste en $O(\rho^4)$ pour (a); en $O(\rho^3)$ pour (b)

Le tenseur de polarisation de Pólya-Szegö $M(B, k) = \int_{\partial B} y(\lambda I - \mathcal{K}_B^*)^{-1}(\nu) d\sigma_y$ est un tenseur symétrique, défini positif pour $\lambda \geq \frac{1}{2}$ et négatif pour $\lambda \leq -\frac{1}{2}$ [23]. Ses termes diagonaux $M_{ii}, i = 1, \dots, d$, vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante [45, 48, 37] :

$$|B| \min(1, k) \leq M_{ii}(B, k) \leq |B| \max(1, k).$$

Les bornes optimales suivantes peuvent être obtenues en adaptant les travaux de Polyá, Schiffer et Szegö [47, 45, 48]

$$\frac{d^2}{d-1+k} |B| \leq \frac{\text{Trace}(M(B, k))}{k-1} \leq (d-1 + \frac{1}{k}) |B|.$$

De plus, pour k fixé, la fonction $B \rightarrow M(B, k)$ est monotone : si $B_1 \subsetneq B_2$ alors $M(B_2, k) > M(B_1, k)$ si $k > 1$ et $M(B_2, k) < M(B_1, k)$ si $k < 1$. L'analyse des propriétés du tenseur M est liée à la théorie des matériaux composites, voir [39, 43, 22, 8].

Les tenseurs de polarisation généralisés possèdent des propriétés analogues, décrites dans les énoncés suivants.

Théorème 2.4 ([5]) (i) Soient B_1 et B_2 deux domaines bornés Lipschitziens de \mathbb{R}^d et $k_1 \neq 1$ et $k_2 \neq 1$ deux constantes strictement positives. Supposons que les tenseurs de polarisation généralisés associés à (B_1, k_1) et (B_2, k_2) sont identiques. Alors, $B_1 = B_2$ et $k_1 = k_2$.

(ii) Supposons que a_α et b_β sont des constantes tel que $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha y^\alpha$ et $\sum_{\beta \in I} b_\beta y^\beta$ sont des polynômes harmoniques, où I est un ensemble fini de multi-indices. Alors,

$$\sum_{\alpha, \beta \in I} a_\alpha b_\beta M^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta \in I} a_\alpha b_\beta M^{\beta\alpha}.$$

(iii) De plus, il existe une constante strictement positive C qui dépend uniquement du caractère Lipschitzien de B et de la conductivité k telle que

$$\int_B |\nabla(\sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha)|^2 dx \leq \frac{k+1}{|k-1|} \left| \sum_{\alpha, \beta \in I} a_\alpha b_\beta M^{\alpha\beta} \right| \leq C \int_B |\nabla(\sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha)|^2 dx.$$

2.2 Algorithmes de reconstruction

- (i) **Méthode de projection des courants.** On se restreint au cas $m = 1$. Pour tout vecteur a , on note par $H_\rho^a(x) = H_\rho[g](x)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, où $g(y) = \frac{\partial}{\partial \nu}(a \cdot y)$ sur $\partial\Omega$. La méthode de projection des courants, décrite dans [12], permet de reconstruire, modulo une erreur en $O(\rho^d)$, l'inhomogénéité $D = z + \rho B$, de conductivité k , à partir de d mesures de E_ρ sur $\partial\Omega$ qui correspondent à $g(y) = \frac{\partial}{\partial \nu}(a_l \cdot y)$ sur $\partial\Omega$ pour d vecteurs constants $a_l, l = 1, \dots, d$. Elle est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 2.5 (Estimation de l'ordre de grandeur de l'inhomogénéité[12]) Soit S une surface fermée de classe C^2 enveloppant le domaine Ω . Alors, pour tout vecteur a et a^* , on a

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \nu} H_\rho^a(x) a^* \cdot x \, ds_x - \int_S H_\rho^a(x) a^* \cdot \nu_x \, ds_x = -\rho^d a^* \cdot M \cdot a + O(\rho^{2d}),$$

où M est le tenseur de polarisation associé à (B, k) .

Cette formule permet de calculer une approximation symétrique \widetilde{M} du tenseur M et une estimation $\widetilde{\rho}$ de ρ . L'approximation du centre z de l'inhomogénéité est donnée par :

Lemme 2.6 (Localisation de l'inhomogénéité [12]) On suppose que $B = -B$. Soient $(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_d)$ une base orthonormée de vecteurs propres de l'approximation \widetilde{M} du tenseur de polarisation de Pólya-Szegö M . Soit $\Sigma_l \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ une droite parallèle à \widetilde{a}_l , pour $l = 1, \dots, d$. Alors, il existe un unique point $\widetilde{z}_l \in \Sigma_l$ où $H_\rho^{\widetilde{a}_l}$ change de signe ($H_\rho^{\widetilde{a}_l}(\widetilde{z}_l) = 0$). De plus, $\widetilde{z} = \sum_{l=1}^d (\widetilde{z}_l \cdot \widetilde{a}_l) \widetilde{a}_l$ vérifie $|\widetilde{z} - z| = O(\rho^d)$.

Lorsque on sait a priori que l'inhomogénéité D est une petite boule ou une petite sphère, un algorithme plus simple [41] peut être utilisé pour trouver son centre z et son volume $\rho^d |B|$.

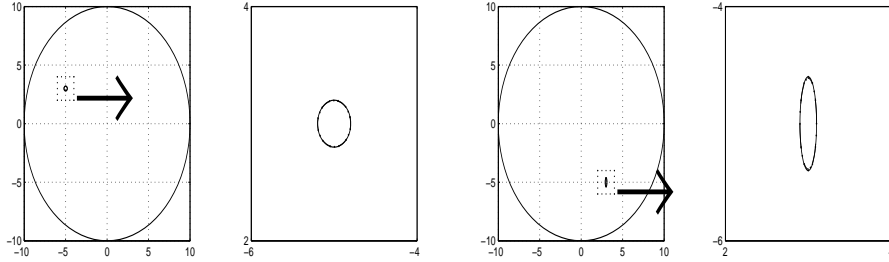


Figure 3: reconstruction d'une petite inhomogénéité par la méthode de projection des courants

Lorsque plusieurs petites inhomogénéités sont proches les unes des autres, nous pouvons les remplacer par une ellipse qui induit les mêmes perturbations [6]. La méthode de projection des courants nous permet ensuite de détecter cette ellipse. Les exemples numériques présentés dans la Figure 4 démontrent l'efficacité de notre approche [6].

- (ii) **Approche variationnelle.** Pour $\eta \in \mathbb{R}^d$, on pose $g_\eta(y) = \frac{\partial}{\partial \nu}(e^{i(\eta - i\eta^\perp) \cdot y})$ sur $\partial\Omega$, où η^\perp est un vecteur orthogonal à η . On a le lemme suivant.

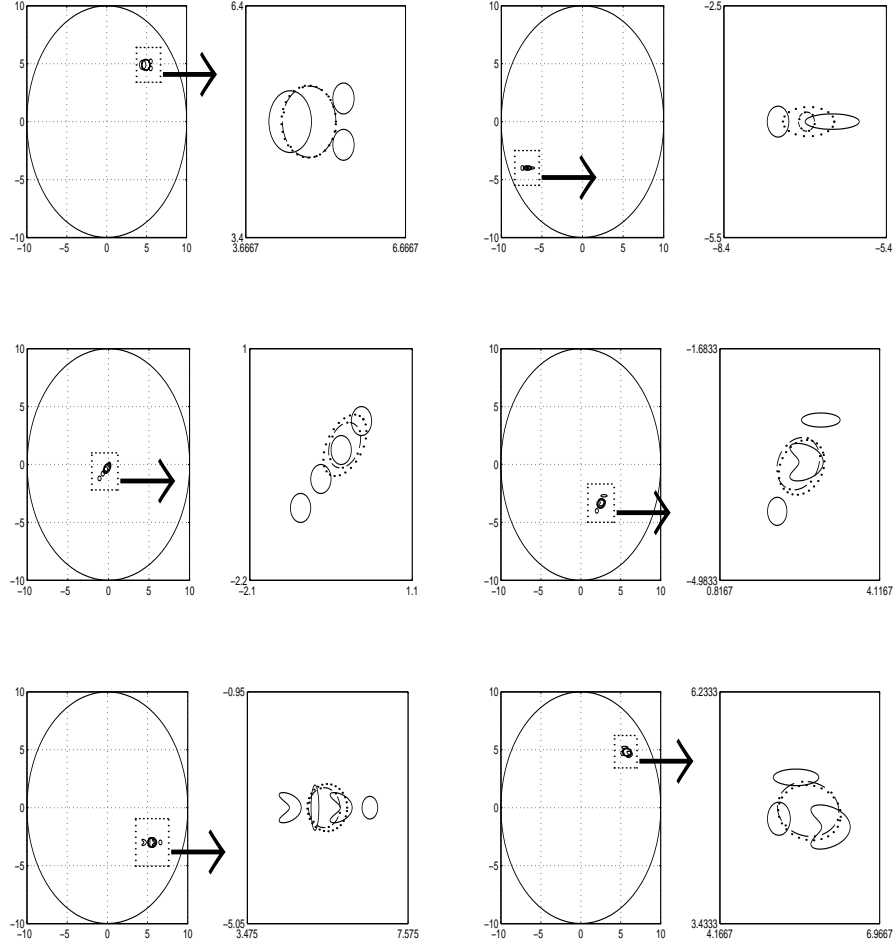


Figure 4: détection de l'ellipse équivalente

Lemme 2.7 (Localisation des inhomogénéités [11]) Soit S une surface fermée de classe \mathcal{C}^2 enveloppant le domaine Ω . Alors, pour tout vecteur $\eta \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\eta) &:= \int_S \frac{\partial}{\partial \nu} H_\rho[g_\eta](x) e^{i(\eta + i\eta^\perp) \cdot x} ds_x - i \int_S H_\rho[g_\eta](x) \nu_x \cdot (\eta + i\eta^\perp) e^{i(\eta + i\eta^\perp) \cdot x} ds_x \\ &= \sum_{l=1}^m \rho_l^d (\eta - i\eta^\perp) \cdot M_l \cdot (\eta + i\eta^\perp) e^{2i\eta \cdot z_l} + O(\rho^{2d}). \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{E}(\eta)$ est alors approximativement la transformée de Fourier d'une combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac aux points z_l . On a

$$\check{\mathcal{E}} \simeq \sum_{l=1}^m \rho_l^d L_l \delta_{-2z_l},$$

où L_l est un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux et $\check{\mathcal{E}}$ désigne la transformée de Fourier inverse. La méthode variationnelle consiste à échantillonner $\mathcal{E}(\eta)$ pour un nombre fini de valeurs de η et à calculer, par le théorème de Shannon [26], sa transformée de Fourier discrète

inverse [11]. Le support de cette distribution donne une bonne approximation des centres z_l des inhomogénéités. La méthode est illustrée dans les exemples numériques présentés dans la Figure 5. Sa stabilité est également mise en évidence [11].

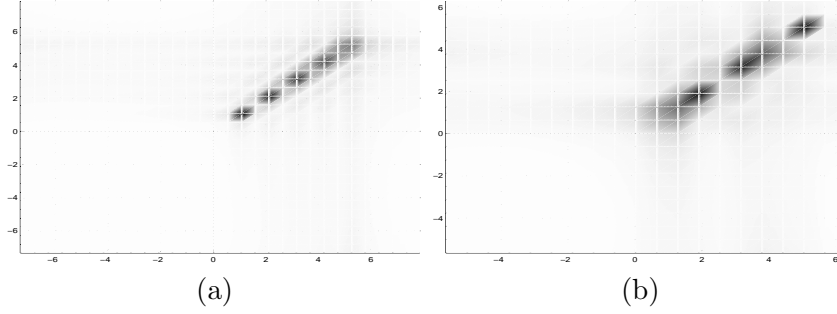


Figure 5: identification de 5 inhomogénéités par la méthode variationnelle en présence de 10% de bruit avec (a) : 30 x 30 points d'échantillonnage et (b) : 20 x 20 points

(iii) **Approche par extension méromorphe.** On suppose que $d = 2$. Pour simplifier, on identifie $x \in \mathbb{R}^2$ à $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ et $M_l \cdot \nabla E_0(z_l)$ à m_l . On peut montrer que

$$H_\rho[g](x) = -\Re e \sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^2 m_l}{2\pi(x - z_l)} + O(\rho^4), \quad x \in S = \{x \in \mathbb{C}, |x| = R\},$$

où le rayon R est tel que $\Omega \subset B_R = \{|x| = R\}$.

La fonction

$$\sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^2 m_l}{2\pi(x - z_l)}$$

est une fonction analytique harmonique dans $\mathbb{C} \setminus \{z_l\}_{l=1}^m$. Soit $v(x) = \Re e \sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^2 m_l}{2\pi(x - z_l)}$ et $w(x)$ sa conjuguée harmonique définie, à une constante additive près, par

$$w(x) = \int_a^x \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) ds_y \quad \text{pour tout } x \in S,$$

où $a \in S$ est une constante de normalisation. On a le lemme suivant.

Lemme 2.8 *Il existe $a \in S$ tel que*

$$-\sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^2 m_l}{2\pi(x - z_l)} = H_\rho[g](x) + i \int_a^x \frac{\partial}{\partial \nu} H_\rho[g](y) ds_y + O(\rho^3) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

La fonction $\frac{\partial H_\rho[g]}{\partial \nu}(x)$ est calculée, pour $x \in S$, à partir de f et g par

$$\frac{\partial H_\rho[g]}{\partial \nu}(x) = -\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}_\Omega(g)|_S(x) + \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{D}_\Omega(f)|_S(x).$$

L'approche par extension méromorphe consiste à utiliser la fonction

$$h(x) := v(x) + iw(x) = \sum_{l=1}^m \frac{\rho_l^2 m_l}{2\pi(x - z_l)}$$

en la variable complexe $x \in S$ pour reconstruire les inhomogénéités $\bigcup_{l=1}^m D_l$. On peut déterminer les centres z_l en calculant d'une manière récursive la limite suivante :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\int_S h(x) x e^{\alpha x} ds_x}{\int_S h(x) e^{\alpha x} ds_x}.$$

On remarque qu'on n'a pas besoin de calculer la constante a introduite dans le lemme précédent.

3 Le système de Lamé

Pour simplifier, on suppose que le domaine élastique $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ contient une seule inclusion $D = \rho B + z$ dont les paramètres de Lamé sont $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$. On considère le système de Lamé :

$$\begin{cases} \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = 0 & \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu} |_{\partial \Omega} = \vec{g}, \end{cases}$$

où

$$C_{ijkl} := \left(\lambda \chi(\Omega \setminus D) + \tilde{\lambda} \chi(D) \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \left(\mu \chi(\Omega \setminus D) + \tilde{\mu} \chi(D) \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Les paramètres de Lamé $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont constants. La dérivée $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne celle par rapport à la conormale :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu} := \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) N + \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) N \quad \text{sur } \partial D,$$

où N est la normale à ∂D . La donnée de Neumann \vec{g} satisfait la condition de compatibilité : $\int_{\partial D} \vec{g} \cdot \vec{\psi} d\sigma = 0$ pour tout $\vec{\psi} \in \Psi$, où Ψ est l'ensemble de $\vec{\psi}$ satisfaisant $\partial_i \psi_j + \partial_j \psi_i = 0$, $1 \leq i, j \leq 3$. On note par $L_{\Psi}^2(\partial D) := \{ \vec{f} \in L^2(\partial D) : \int_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{\psi} d\sigma = 0 \text{ pour tout } \vec{\psi} \in \Psi \}$.

La solution fondamentale $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ du système de Lamé est définie par :

$$\Gamma_{ij}(x) := \frac{A}{4\pi} \frac{\delta_{ij}}{|x|} + \frac{B}{4\pi} \frac{x_i x_j}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq 0,$$

où

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\mu + \lambda} \right) \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu + \lambda} \right).$$

Les potentiels de simple et double couche d'une densité $\vec{\phi}$ portée par ∂D , où $D \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine Lipschitzien, sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_D \vec{\phi}(x) &:= \int_{\partial D} \Gamma(x-y) \vec{\phi}(y) d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{D}_D \vec{\phi}(x) &:= \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Gamma(x-y) \vec{\phi}(y) d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D. \end{aligned}$$

Théorème 3.1 ([27]) *On a les résultats suivants.*

(i) $\mathcal{D}_D \vec{\phi}|_{\pm} = (\pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D) \vec{\phi}$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}_D \vec{\phi}|_{\pm} = (\mp \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D^*) \vec{\phi}$, sur ∂D , où \mathcal{K}_D est défini par :

$$\mathcal{K}_D \vec{\phi}(x) := v.p. \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Gamma(x-y) \vec{\phi}(y) d\sigma_y, \quad x \in \partial D, \text{ et } \mathcal{K}_D^* \text{ est l'adjoint de l'opérateur } \mathcal{K}_D \text{ dans } L^2(\partial D).$$

(ii) Les opérateurs $\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D^*$ et $-\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D^*$ sont inversibles sur $L^2_{\Psi}(\partial D)$ et $L^2(\partial D)$, respectivement.

(iii) Le noyau de l'opérateur $\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_D$ sur $L^2(\partial D)$ est Ψ .

Théorème 3.2 ([29]) On suppose que $(\lambda - \tilde{\lambda})(\mu - \tilde{\mu}) \geq 0$. Pour tout $(\vec{F}, \vec{G}) \in H^1(\partial D) \times L^2(\partial D)$, il existe une unique paire $(\vec{f}, \vec{g}) \in L^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ telle que

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{S}}_D \vec{f}|_- - \mathcal{S}_D \vec{g}|_+ = \vec{F} & \text{sur } \partial D, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathcal{S}}_D \vec{f}|_- - \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}_D \vec{g}|_+ = \vec{G} & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

et une constante C dépendant de $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ et du caractère Lipschitzien de D telle que

$$\|\vec{f}\|_{L^2(\partial D)} + \|\vec{g}\|_{L^2(\partial D)} \leq C(\|\vec{F}\|_{H^1(\partial D)} + \|\vec{G}\|_{L^2(\partial D)}).$$

De plus, si $\vec{G} \in L^2_{\Psi}(\partial D)$, alors $\vec{g} \in L^2_{\Psi}(\partial D)$.

D'une manière analogue aux tenseurs de polarisation généralisés, on introduit la notion de tenseurs des moments élastiques.

Définition 3.3 ([7]) Pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$ et $j = 1, 2, 3$, on note \vec{f}_{α}^j et \vec{g}_{α}^j les solutions dans $L^2(\partial B)$ du système :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{S}}_B \vec{f}_{\alpha}^j|_- - \mathcal{S}_B \vec{g}_{\alpha}^j|_+ = x^{\alpha} e_j|_{\partial B}, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathcal{S}}_B \vec{f}_{\alpha}^j|_- - \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}_B \vec{g}_{\alpha}^j|_+ = \frac{\partial(x^{\alpha} e_j)}{\partial \nu}|_{\partial B}. \end{cases}$$

Pour $\beta \in \mathbb{N}^3$, le tenseur du moment élastique $M_{\alpha\beta}^j$ associé au domaine B et aux paramètres de Lamé (λ, μ) et $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ est défini par :

$$M_{\alpha\beta}^j = (m_{\alpha\beta 1}^j, m_{\alpha\beta 2}^j, m_{\alpha\beta 3}^j) = \int_{\partial B} y^{\beta} \vec{g}_{\alpha}^j(y) d\sigma_y.$$

Pour $\alpha = e_i$ et $\beta = e_p$ ($i, p = 1, 2, 3$), on note $m_{pq}^{ij} := m_{\alpha\beta q}^j$, $p, j = 1, 2, 3$.

Proposition 3.4 ([7]) (i) Le tenseur du moment élastique est symétrique : $m_{pq}^{ij} = m_{qp}^{ij}$, $m_{pq}^{ij} = m_{pq}^{ji}$, et $m_{pq}^{ij} = m_{ij}^{pq}$, $p, q, i, j = 1, 2, 3$.

(ii) Le tenseur du moment élastique est défini positif (si $\tilde{\mu} > \mu$, négatif dans le cas contraire) sur l'espace des matrices symétriques.

(iii) Pour $i \neq j$, il existe une constante C qui dépend uniquement de $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ et du caractère Lipschitzien de B telle que

$$\mu \left| \frac{\mu - \tilde{\mu}}{\mu + \tilde{\mu}} \right| |B| \leq |m_{ij}^{ij}| \leq C|B|.$$

3.1 Reconstruction d'une inclusion élastique

Soit la fonction $\vec{H}[\vec{g}]$ définie par :

$$\vec{H}[\vec{g}](x) := \mathcal{S}_\Omega(\vec{g})(x) - \mathcal{D}_\Omega(\vec{u}|_{\partial\Omega})(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}.$$

Cette fonction se calcule à partir de $(\vec{u}|_{\partial\Omega}, \vec{g})$. On a la formule asymptotique suivante.

Théorème 3.5 ([7]) *Pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, on a*

$$\vec{H}[\vec{g}](x) = \sum_{j=1}^3 \sum_{|\alpha|=1}^3 \sum_{|\beta|=1}^{4-|\alpha|} \frac{\rho^{|\alpha|+|\beta|+1}}{\alpha! \beta!} (\partial^\alpha U_j)(z) \partial^\beta \Gamma(x-z) M_j^{\alpha\beta} + O\left(\frac{\rho^6}{|x|^2}\right).$$

L'algorithme suivant, de type projection des courants, qui exploite la formule asymptotique précédente afin d'identifier l'inclusion élastique D est décrit dans [7]. Soit

$$E_{uv} = (\delta_{iu} \delta_{jv})_{i,j=1}^3 \quad \text{et} \quad \vec{g}_{uv} := \frac{\partial(E_{uv} \vec{x})}{\partial \nu} |_{\partial\Omega}.$$

On calcule la quantité

$$h_{kl}^{uv} := \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 H_k[\vec{g}_{uv}](te_l), \quad k, l, u, v = 1, 2, 3.$$

Les valeurs m_{kl}^{uv} , $u, v, k, l = 1, 2, 3$ du tenseur du moment élastique peuvent être approchées, modulo une erreur en $O(\rho^3)$, comme suit :

$$\rho^3 m_{ii}^{vu} = -\frac{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}{3\lambda+5\mu} \left[\frac{\lambda+\mu}{2\mu} \sum_{k=1}^3 h_{kk}^{uv} + h_{ii}^{uv} \right] + O(\rho^6),$$

$$u, v, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho^3 m_{kl}^{vu} = -4\pi(\lambda+2\mu) h_{kl}^{uv} + O(\rho^6), \quad u, v, k, l = 1, 2, 3, \quad k \neq l.$$

Ayant obtenu $\rho^3 m_{kp}^{uv}$, l'approximation $|\rho^3 m_{ij}^{ij}| \simeq \rho^3 |B|$, pour $i \neq j$ donne une estimation de la taille de D . Pour localiser l'inhomogénéité D , l'idée est la suivante : à partir de $\vec{H}[\vec{g}_{uv}]$, on détermine $\nabla \Gamma(x-z)$. Ce qui donne $\frac{x-z}{|x-z|^3}$ pour x proche de Γ et donc, le centre z .

Les tests numériques suivants publiés dans [32] confirment l'efficacité et la stabilité de cet algorithme.

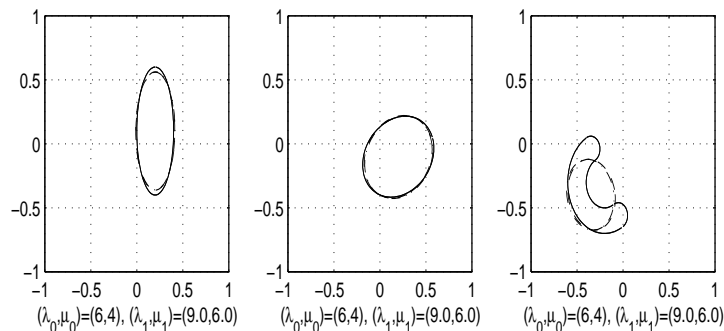


Figure 6: reconstruction d'une inhomogénéité élastique avec connaissance a priori de ses coefficients de Lamé

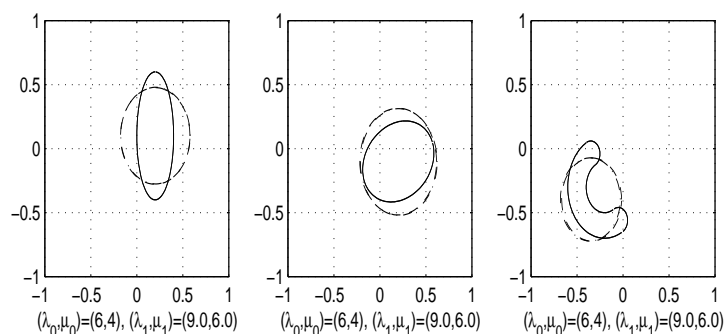


Figure 7: estimation de la position et de la taille d'une inhomogénéité élastique sans connaissance a priori de ses coefficients de Lamé

Références

- [1] Alessandrini G., *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, *Applicable Analysis* **27** (1988) pp. 153–172.
- [2] Ammari H., Iakovleva E. et Moskow S., *Recovery of small inhomogeneities from the scattering amplitude at a fixed frequency*, *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2003), 882–900.
- [3] Ammari H. et Kang H., *Reconstruction of Small Inclusions from Boundary Measurements*, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, à paraître (2004).
- [4] Ammari H. et Kang H., *High-order terms in the asymptotic expansions of the steady-state voltage potentials in the presence of conductivity inhomogeneities of small diameter*, *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2003), 1152–1166.
- [5] ———, *Properties of the generalized polarization tensors*, *Multiscale Modeling and Simulation: A SIAM Interdisciplinary Journal* **1** (2003), 335–348.
- [6] Ammari H., Kang H., Kim E. et Lim M., *Reconstruction of closely spaced small inclusions*, à paraître dans *SIAM Journal on Numerical Analysis* (2004).
- [7] Ammari H., Kang H., Nakamura G. et Tanuma K., *Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of inhomogeneities of small diameter*, *J. Elasticity* **67** (2002), 97–129.

- [8] Ammari H., Kang H. et Touibi K., *Boundary layer techniques for deriving the effective properties of composite materials*, à paraître dans *Asympt. Anal.* (2004).
- [9] Ammari H. et Khelifi A., *Electromagnetic scattering from small dielectric inhomogeneities*, *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), 749–842.
- [10] Ammari H., Kwon O., Seo J.K. et Woo E.J., *T-scan electrical impedance imaging system for anomaly detection*, à paraître dans *SIAM J. Appl. Math.* (2004).
- [11] Ammari H., Moskow S. et Vogelius M., *Boundary integral formulas for the reconstruction of electromagnetic imperfections of small diameter*, *ESAIM: Cont. Opt. Calc. Var.* **9** (2003) pp. 49–66.
- [12] Ammari H. et Seo J.K., *A new algorithm for the reconstruction of conductivity inhomogeneities*, *Adv. Appl. Math.* **30** (2003), 679–705.
- [13] Ammari H. et Uhlmann G., *Reconstruction of the potential from partial Cauchy data for the Schrödinger equation*, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004), 169–183.
- [14] Ammari H., Vogelius M. et Volkov D., *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of imperfections of small diameter II. The full Maxwell equations*, *J. Math. Pures Appl.* **80** (2001) pp. 769–814.
- [15] Ammari H. et Volkov D., *Correction of order three for the expansion of two dimensional electromagnetic fields perturbed by the presence of inhomogeneities of small diameter*, *J. Comput. Physics* **189** (2003), 371–389.
- [16] Beretta E., Francini E. et Vogelius M., *Asymptotic formulas for steady state voltage potentials in the presence of thin inhomogeneities. A rigorous error analysis*, *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), 1277–1301.
- [17] Beretta E., Mukherjee A. et Vogelius M., *Asymptotic formulae for steady state voltage potentials in the presence of conductivity imperfections of small area*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik.* **52** (2001) pp. 543–572.
- [18] Borcea L., Berrymann J.G. et Papanicolaou G.C., *High contrast impedance tomography*, *Inverse Problems* **12** (1996) pp. 1–24.
- [19] Brühl M., Hanke M., et Vogelius M., *A direct impedance tomography algorithm for locating small inhomogeneities*, *Numer. Math.* **93** (2003), 635–654.
- [20] Calderón A.P., *On an inverse boundary value problem*, *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (1980), 65–73.
- [21] Capdeboscq Y. et Vogelius M., *A general representation formula for the boundary voltage perturbations caused by internal conductivity inhomogeneities of low volume fraction*, *Math. Modelling Num. Anal.* **37** (2003), 159–173.
- [22] ———, *Optimal asymptotic estimates for the volume of internal inhomogeneities in terms of multiple boundary measurements*, *Math. Modelling Num. Anal.* **37** (2003), 227–240.

- [23] Cedio-Fengya D.-J., Moskow S. et Vogelius M., *Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction*. Inverse Problems, **14** (1998) pp. 553–595.
- [24] Cheney M., Isaacson D., Newell J., Simske S. et Goble J., *Noser: an algorithm for solving the inverse conductivity problem*, Int. J. Imaging Syst. and Technol. **22** (1990) pp. 66–75.
- [25] Coifman R.R., McIntosh A. et Meyer Y., *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour courbes Lipschitziennes*, Ann. of Math. **116** (1982) pp. 361–387.
- [26] Daubechies I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [27] Dahlberg B.E., Kenig C.E. et Verchota G., *Boundary value problem for the systems of elastostatics in Lipschitz domains*, Duke Math. J. **57** (1988) pp. 795–818.
- [28] Escauriaza L., Fabes E. et Verchota G., *On a regularity theorem for weak solutions to transmission problems with internal Lipschitz boundaries*, Proceedings of AMS **115** (1992) pp. 1069–1076.
- [29] Escauriaza L. et Seo J.K., *Regularity properties of solutions to transmission problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993) pp. 405–430.
- [30] Fabes E.B., Kang H. et Seo J.K., *Inverse conductivity problem: error estimates and approximate identification for perturbed disks*, SIAM J. of Math. Anal. **30** (1999) pp. 699–720.
- [31] Friedman A. et Vogelius M., *Identification of small inhomogeneities of extreme conductivity by boundary measurements: a theorem on continuous dependence*, Arch. Rat. Mech. Anal. **105** (1989) pp. 299–326.
- [32] Kang H., Kim E. et Lee J., *Identification of elastic inclusions and elastic moment tensors by boundary measurements*, Inverse Problems **19** (2003), 703–724.
- [33] Kang H., Kim E. et Kim K., *Anisotropic polarization tensors and determination of an anisotropic inclusion*, SIAM J. Appl. Math. **65** (2003), 1276–1291.
- [34] Kang H. et Seo J.K., *Layer potential technique for the inverse conductivity problem*, Inverse Problems **12** (1996) pp. 267–278.
- [35] ———, *Inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for balls in \mathbb{R}^3* , SIAM J. Appl. Math. **59** (1999) pp. 1533–1539.
- [36] Kang H., Seo J. K. et Sheen D., *The inverse conductivity problem with one measurement: Stability and estimation of size*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997) pp. 1389–1405.
- [37] Kleinman R.E. et Senior T.B.A., *Rayleigh scattering in Low and High Frequency Asymptotics*, edited by V.K. Varadan and V.V. Varadan, North-Holland (1986) pp. 1–70.
- [38] Kohn R. et Vogelius M., *Determining conductivity by boundary measurements*. Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984) pp. 289–298. *II. Interior results*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) pp. 643–667.
- [39] Kozlov S.M., *On the domain of variation of added masses, polarization and effective characteristics of composites*, J. Appl. Maths Mechs **56** (1992), 102–107.

- [40] Kwon O. et Seo J.K., *Total size estimation and identification of multiple anomalies in the inverse electrical impedance tomography*, Inverse Problems **17** (2001) pp. 59–75.
- [41] Kwon O., Seo J.K., et Yoon J.R., *A real-time algorithm for the location search of discontinuous conductivities with one measurement*, Commun. Pure Appl. Math. **55** (2002) pp. 1–29.
- [42] Maz'ya V.G. et Nazarov S.A., *The asymptotic behavior of energy integrals under small perturbations of the boundary near corner points and conical points*, Trans. Moscow Math. Soc. (1988) pp. 77–127.
- [43] Movchan A.B. et Serkov S.K., *The Pólya-Szegő matrices in asymptotic models of dilute composite*, Euro. J. Appl. Math. **8** (1997) pp. 595–621.
- [44] Nachman A., *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Annals of Math. **143** (1996) pp. 71–96.
- [45] Pólya G. et Szegő G., *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematical Studies Number 27, Princeton University Press, Princeton 1951.
- [46] Santosa F. et Vogelius M., *A backprojection algorithm for electrical impedance imaging*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990) pp. 216–243.
- [47] Schiffer M., *Sur la polarisation et la masse virtuelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 3118–3121.
- [48] Schiffer M. et Szegő G., *Virtual mass and polarization*, Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949) pp. 130–205.
- [49] Seo J.K., Kwon O., Ammari H. et Woo E.J., *Mathematical framework and anomaly estimation algorithm for breast cancer detection using TS2000 configuration*, à paraître dans IEEE Trans. Biomedical Engineering (2004).
- [50] Sylvester J. et Uhlmann G., *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Annals of Math. **125** (1987) pp. 153–169.
- [51] Verchota G., *Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Func. Anal. **59** (1984) pp. 572–611.
- [52] Vogelius M. et Volkov D., *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter*, Math. Modelling Num. Anal. **34** (2000) pp. 723–748.