SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Francis Nier

Quelques critères pour l'inégalité de Poincaré dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° V, 16 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A5_0>

Quelques critères pour l'inégalité de Poincaré dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Francis Nier [*] [†]

1 Introduction

Nous rapportons ici un travail réalisé avec B. Helffer [HelNi] sur la compacité de la résolvante du Laplacien de Witten sur 0-formes et plus généralement sur la validité de l'inégalité de Poincaré pour les formes de Dirichlet en dimension finie. Ce travail a connu des développements après l'exposé, faisant un lien plus explicite avec les travaux sur l'hypoellipticité microlocale des systèmes surdéterminés, que nous mentionnerons à la Section 3.

Nous nous intéressons en particulier au cas où des conditions classiques d'ellipticité deviennent dégénérées. Dans [HelNi] nous nous sommes limités à des classes de potentiels polyhomogènes qui permettent de donner des conditions nécessaires et suffisantes simples pour la compacité de la résolvante et pour l'inégalité de Poincaré.

Nous considérons le Laplacien de Witten sur les 0-formes de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$:

$$\Delta_\Phi^{(0)} = -\Delta + \frac{1}{4}|\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{2}\Delta\Phi \ = (e^{\Phi/2} d_x^* e^{-\Phi/2})(e^{-\Phi/2} d_x e^{\Phi/2}), \qquad (1.1)$$

où Φ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Sous des hypothèses de croissance sur le potentiel Φ la fonction $e^{-\Phi/2}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et c'est le seul élément du noyau de $\Delta_\Phi^{(0)}$. Si l'opérateur positif $\Delta_\Phi^{(0)}$ a une résolvante compacte alors

$$\sigma(\Delta_\Phi^{(0)}) \setminus \{0\} \subset [\lambda_1, +\infty), \quad \text{avec } \lambda_1 > 0. \qquad (1.2)$$

∗ IRMAR, UMR-CNRS 6625, Université de Rennes 1, Campus de beaulieu, F-35042 Rennes cedex. email : Francis.Nier@univ-rennes1.fr.

† Responsable de l'ACI jeunes chercheurs : "Systèmes hors-équilibre quantiques et classiques."

Après conjugaison par $e^{-\Phi/2}$, (1.2) est équivalent à l'inégalité de Poincaré pour la forme de Dirichlet

$$\mathcal{E}(f,f) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \; d\mu$$

où μ est la mesure de probabilité $\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\Phi} \; dx\right)^{-1} e^{-\Phi}$. Celle-ci s'écrit en effet

$$\mu((f - \mu(f))^2) = \mathrm{var}(f) \leq \frac{1}{\lambda_1} \mathcal{E}(f,f). \tag{1.3}$$

Cette inégalité ne pose pas de problème sous les conditions d'ellipticité

$$t|\nabla\Phi(x)|^2 - \Delta\Phi(x) \to +\infty \text{ , quand } |x| \to +\infty, \quad t \in]0,1],$$

ou

$$\begin{aligned} &\lim_{|x|\to\infty} |\nabla_x \Phi(x)| = +\infty, \\ \text{avec} \qquad &\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \; |\partial_x^\alpha \nabla\Phi(x)| \leq C_\alpha \left(1 + |\nabla\Phi(x)|\right). \end{aligned}$$

Nous renvoyons à [BoDaHel], [Hel4] ou [Jo] pour plus de détails. Une autre situation classique est celle où l'on peut utiliser le truc de Bakry-Emery en supposant $\mathrm{Hess}\,\Phi(x) \geq \alpha > 0$ (voir par exemple [Hel4], [Aetal]). Enfin le cas de la dimension 1 a été abordé de façon quasi exhaustive dans les travaux de I. Gentil, F. Malrieu et C. Roberto.

Le fait de travailler sur le Laplacien de Witten présente l'intérêt de ne pas se limiter au cas $\Phi \geq 0$ à l'infini et on verra, outre le fait que le cas de potentiels négatifs est intéressant pour l'étude de systèmes métastables, que cela est d'autant plus significatif quand on fait le lien avec la théorie des systèmes surdéterminés.

Pour terminer situons la difficulté. Pour un potentiel $V(x) = x_1^2 x_2^2$ il est classique (et facile a retrouver en séparant les variables) que l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + x_1^2 x_2^2$ est à résolvante compacte bien que le symbole $\xi^2 + x_1^2 x_2^2$ s'annule à l'infini. C'est le principe d'incertitude qui rend l'opérateur plus positif que sont symbole et cela peut marcher même si le potentiel prend des valeurs négatives à l'infini. Pour le Laplacien de Witten avec $\Phi(x) = x_1^2 x_2^2$ on a $V(x) = \frac{1}{4} \left\|\nabla\Phi\right\|^2 - \frac{1}{2}\Delta\Phi = x_1^2 x_2^4 + x_{1^4} x_2^2 - x_2^2 - x_1^2$. On sait a priori que l'opérateur est positif tandis que le symbole tend vers $-\infty$ dans certaines régions de l'espace phases (très confinées) donc le principe d'incertitude joue un rôle. La question est alors de savoir si ce principe d'incertitude est suffisant pour rendre l'opérateur à résolvante compacte ? Dans cet exemple précis : non. L'analyse présentée ici consiste à comparer les degrés d'annulation des fonctions angulaires φ_i avec les degrés d'homogénéité α_i en écrivant

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} r^{\alpha_i}\varphi_i(\theta) + R(x), \quad \text{pour} x = r\theta, r \geq 1 \quad \text{et} R \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

On regarde s'il y a assez de place dans la région de l'espace des phases où le symbole est négatif pour y caser ou non une suite de Weyl. Au passage on a également un critère (disjoint) pour $e^{-\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dans le cas $\Phi \geq 0$.

On peut se demander pourquoi se limiter à des classes de fonctions polyhomogènes (avec des conditions de signe) quand des résultats généraux avec des techniques de capacités symplectiques (cf. [Fef] et plus particulièrement les Théorème 2 et 3 du chapitre I pour le cas de potentiels polynomiaux positifs ou nuls) ou des techniques d'hypoellipticité maximale (voir Section 3) donnent des réponses complètes au moins dans le cas polynomial. Le critère de [Fef] n'est pas très explicite et ne donne pas d'algorithme fini de vérification. Le résultat donnée dans la Section 3 donne un procédé systèmatique de vérification mais le lecteur se convaincra que, même sur l'exemple simple $\Phi = x_1^2x_2^2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)$, cette vérification n'est pas immédiate contrairement au critère pour les fonctions polyhomogènes.

2 Résultats pour des fonctions polyhomogènes

2.1 Cas des potentiels positifs ou nuls à l'infini.

Nous considérons des potentiels $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\Phi \geq 0$ au voisinage de l'infini, et qui s'écrivent

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x) + R(x), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec} \quad & R \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad N \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \Phi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \\
\text{et} \quad & \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \forall x \in \mathbb{R}^d, |x| \geq 1, \\
& \Phi_i(x) = |x|^{\alpha_i}\,\varphi_i\left(\frac{x}{|x|}\right) \\
\text{avec} \quad & \alpha_1 > \ldots > \alpha_N > 0.
\end{aligned}$$

Ce sont les ordres d'annulation des fonctions φ_i pour $\alpha_i \geq 1$ qui jouent un rôle.

Définition 2.1.
Nous associons à Φ, les ensembles et fonctions suivantes :

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i^{-1}(\{0\}), \tag{2.2}$$
$$\{\alpha_i > 1\} := \{i \in \{1,\ldots,N\}\,,\ \alpha_i > 1\}\,, \tag{2.3}$$
$$\{\alpha_i \geq 1\} := \{i \in \{1,\ldots,N\}\,,\ \alpha_i \geq 1\}\ , \tag{2.4}$$

et pour tout $I \subset \{1,\ldots,N\}$,

$$\mathcal{Z}_I := \bigcap_{i\in I} \varphi_i^{-1}(\{0\})\ , \tag{2.5}$$
$$\Phi_I(x) := \sum_{i\in I} \Phi_i(x)\ . \tag{2.6}$$

2.1.1 Inégalité de Poincaré.

Les conditions suffisantes pour l'inégalité de Poincaré sont données par

Théorème 2.2.
On suppose $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ de la forme (2.1) et on note I soit l'ensemble $\{\alpha_i > 1\}$ soit l'ensemble $\{\alpha_i \geq 1\}$ suivant la Définition 2.1. On suppose que pour $\theta \in S^{d-1}$ il existe un voisinage $\mathcal{N}_\theta$ de θ et un indice $i_\theta \in I$ tels que

$$\varphi_{i_\theta}\Big|_{\mathcal{N}_\theta} > 0 \quad \textit{and} \quad \forall i \in \{1,\ldots,i_\theta - 1\}\,,\ \varphi_i\Big|_{\mathcal{N}_\theta} \geq 0. \tag{2.7}$$

Cas $I = \{\alpha_i > 1\}$:
Le Laplacien de Witten $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte.

Cas $I = \{\alpha_i \geq 1\}$:
On a une inégalité de Poincaré (1.2)(1.3) pour un certain $\lambda_1 > 0$.

Corollaire 2.3.
Quand toutes les φ_i sont positives ou nulles, on a

$$\left(\lim_{|x|\to\infty} \Phi_{\{\alpha_i>1\}}(x) = +\infty\right) \Rightarrow \left((1+\Delta_\Phi^{(0)})^{-1}\ \textit{compacte}\right),$$

et

$$\left(\liminf_{|x|\to\infty} \Phi_{\{\alpha_i\geq 1\}}(x) > 0\right) \Rightarrow \left((1.3)\ \textit{pour un certain}\ \lambda_1 > 0\right).$$

Comme l'indique le résultat ci-dessous, la condition $\liminf_{|x|\to\infty} \Phi_{\{\alpha_i \geq 1\}} > 0$ du Corollaire 2.3 est nécessaire.

Théorème 2.4.
Si Φ est donnée par (2.1) avec toutes les φ_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, positive ou nulle et avec $\|\partial_r R(r.)\|_{L^\infty(S^{d-1})} = o(r^0)$ quand $r \to \infty$, alors on a :

$$\left(I_{\{\alpha_i \geq 1\}} = \emptyset\right) \text{ ou } \left(\mathcal{Z}_{\{\alpha_i \geq 1\}} \neq \emptyset\right) \Rightarrow \left(0 \in \sigma_{ess}(\Delta_\Phi^{(0)})\right).$$

Remarque 2.5.
Quand $e^{-\Phi}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, la condition $\|\partial_r R(r.)\|_{L^\infty(S^{d-1})} = o(r^0)$ peut être enlevée en utilisant un argument de variance.

2.1.2 Conditions pour $e^{-\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

On travaille toujours avec un potentiel Φ donné par (2.1). Sous des hypothèses d'analyticité sur les φ_i, il devrait être possible de dire quand $e^{-\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, en étendant la méthode décrite dans [ArGuVar] s'appuyant sur la résolution des singularités pour les intégrales de Laplace. Nous avons fait l'hypothèse simplificatrice suivante qui entraîne entre autre que les zéros des fonctions φ_i sont des points isolés et que les fonctions φ_i sont positives ou nulles :

Hypothèse 1.
Pour $z \in \mathcal{Z}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $m_i(z) \geq 0$, un voisinage $\mathcal{N}_i(z) \subset S^{d-1}$ et $c_i > 1$ tels que

$$\forall \theta \in \mathcal{N}_i((z)),\ c_i^{-1} |\theta - z|^{m_i(z)} \leq \varphi_i(\theta) \leq c_i |\theta - z|^{m_i(z)}. \tag{2.8}$$

Notons que génériquement l'hypothèse est vérifiée pour des fonctions positives ou nulles puisque on peut alors se restreindre à des fonctions de Morse. Sous cette hypothèse nous associons à Φ l'indice

$$\mathcal{I}_\Phi := \min_{z \in \mathcal{Z}} \max_{i \in \{1, \ldots, N\}} \frac{\alpha_i}{m_i(z)} \in \overline{\mathbb{R}_+}. \tag{2.9}$$

Le résultat suivant est un petit exercice d'intégration :

Proposition 2.6.
Sous l'Hypothèse 1, on a l'équivalence :

$$\left(e^{-\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^d)\right) \Leftrightarrow \left(\mathcal{I}_\Phi > \frac{d}{d-1}\right).$$

2.2 Potentiel négatif ou nul à l'infini.

Ici la situation est encore plus simple. Puisque pour une fonction poly-homogène avec des $\varphi_i \leq 0$, le terme $-\frac{1}{2}\Delta\Phi$ est positif ou nul et il suffit de minorer $-\Delta + |\nabla\Phi|^2$, ce que l'on fait en utilisant l'adaptation de la méthode de Kohn faite par Helffer et Mohamed dans [HelMo] pour les opérateurs avec champ magnétique.

On note que dans ce cas, 0 ne peut être valeur propre de $\Delta_\Phi^{(0)}$ et la compacité de la résolvante entraîne $\min \sigma(\Delta_\Phi^{(0)}) > 0$.

On note A la partie entière du degré d'homogénéité maximal α_1 et on associe à Φ la fonction

$$q(x) := \sum_{1\leq|\beta|\leq A} \left|\partial_x^\beta \Phi(x)\right|. \tag{2.10}$$

Les hypothèses exactes sont un peu plus générales que $\varphi_i \leq 0$ pour tout i tel que $\alpha_i > 1$.

Hypothèse 2.

La fonction Φ a la forme (2.1) avec $\lim_{|x|\to\infty} q(x) = +\infty$. De plus on suppose que pour tout $\theta \in S^{d-1}$,

soit : Il existe i_θ tel que $\alpha_{i_\theta} > 1$ et un voisinage $\mathcal{N}_\theta$ de θ tels que

$$\varphi_{i_\theta}\Big|_{\mathcal{N}_\theta} < 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, i_\theta\}, \ \varphi_i\Big|_{\mathcal{N}_\theta} \leq 0;$$

soit : Il existe un voisinage $\mathcal{N}_\theta$ de θ tel que

$$\forall i \text{ tel que } \alpha_i > 2, \ \varphi_i\Big|_{\mathcal{N}_\theta} \leq 0 \text{ et } \Delta_\theta\varphi_i\Big|_{\mathcal{N}_\theta} \leq 0.$$

Le résultat est tout simplement :

Théorème 2.7.

Si Φ vérifie l'Hypothèse 2 alors $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte.

2.3 Application au cas polynomial. Exemples.

L'application des Théorèmes 2.2, 2.7 et du Corollaire 2.3 donne tout de suite

Corollaire 2.8.
Soit $\Phi \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$ une fonction polynomiale.
i) *Si Φ est la somme de monômes positifs ou nuls, on a l'équivalence*

$$(1.2) \Leftrightarrow \left(\lim_{|x| \to \infty} \Phi(x) = +\infty \right) \Leftrightarrow \left((1 + \Delta_\Phi^{(0)})^{-1} \textit{ compacte} \right).$$

ii) *Si Φ est la somme de monômes négatifs ou nuls, alors $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte si et seulement si Φ ne présente pas d'invariance par translation.*

Exemples:
a) $\Phi = x_1^2 x_2^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
On a $\mathcal{Z}_{\{\alpha_i \geq 1\}} \neq \emptyset$ et 0 est dans le spectre essentiel de $\Delta_\Phi^{(0)}$. L'inégalité de Poincaré (1.3) n'est pas satisfaite. L'Hypothèse 1 est vérifiée et l'indice $\mathcal{I}_\varphi$ vaut $2 = \frac{2}{2-1}$. Donc $e^{-\Phi}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et 0 n'est pas une valeur propre de $\Delta_\Phi^{(0)}$.

b) $\Phi = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$ dans $\mathbb{R}^2$.
On a $\mathcal{Z}_{\{\alpha_i \geq 1\}} \neq \emptyset$ et $\mathcal{I}_\Phi$ vaut $3 > 2$. Donc, 0 est une valeur propre plongée dans le spectre essentiel de $\Delta_\Phi^{(0)}$.

c) $\Phi = (x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
On a $\mathcal{Z}_{\{\alpha_i \geq 1\}} \neq \emptyset$ et $\mathcal{I}_\Phi = 4/2 = 2 > \frac{3}{3-1}$. Comme dans b), 0 est une valeur propre contenue dans le spectre essentiel.

d) $\Phi = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
On a $\mathcal{Z}_{\{\alpha_i \geq 1\}} \neq \emptyset$ et l'inégalité de Poincaré n'est pas vérifiée. Bien que l'Hypothèse 1 ne soit pas vérifiée un calcul direct donne $e^{-\Phi} \notin L^1(\mathbb{R}^3)$.

e) $\Phi = (x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_3^2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
L'ensemble $\mathcal{Z}_{\{\alpha_i > 1\}} = \emptyset$ et $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte.

f) $\Phi = (1 + |x^2|)^{1/2}$ dans $\mathbb{R}^d$.
La fonction $e^{-\Phi}$ appartient $L^1(\mathbb{R}^d)$. L'inégalité de Poincaré est vérifiée $\mathcal{Z}_{\{\alpha_i \geq 1\}} = \emptyset$. Mais puisque le potentiel $V = \frac{1}{4} |\nabla \Phi|^2 - \frac{1}{2} \Delta \Phi$ est borné, la résolvante de $\Delta_\Phi^{(0)}$ n'est pas compacte. Pour $\Phi = (1 + |x|^2)^{\alpha/2}$, l 'inégalité de Poincaré n'est

pas vérifiée pour $\alpha < 1$, tandis que l'exposant critique pour l'inégalité de Sobolev Logarithmique est $\alpha = 2$.
g) $\Phi_\varepsilon = x_1^2 x_2^2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)$ dans $\mathbb{R}^2$.
Le Laplacien de Witten $\Delta^{(0)}_{\Phi_\varepsilon}$ est à résolvante compacte $\varepsilon > 0$. On peut en déduire entre autre que $\Delta^{(0)}_{\Phi_\varepsilon}$ ne peut pas converger vers $\Delta^{(0)}_{\Phi_0}$ au sens de la résolvante quand $\varepsilon \to 0$. Notons aussi que pour $\varepsilon > 0$ ce potentiel est loin d'être convexe puisque sa hessienne vaut

$$\begin{pmatrix} 2x_2^2 + \varepsilon & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

avec pour déterminant $(2t^2 + \varepsilon)^2 - 16t^4$ sur la diagonale $x_1 = \pm x_2 = t$.

h) Les méthodes utilisées pour les Théorèmes 2.2 et 2.7 peuvent s'appliquer à des situations avec changement de signe. Ainsi pour $\Phi = (x_1^2 - x_2)^2 + \varepsilon x_2^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $\varepsilon > 0$. On peut montrer que $\Delta^{(0)}_{\Phi}$ est à résolvante compacte pour $\varepsilon > 1/8$. Clairement en faisant le changement de variable $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1^2$, qui préserve le volume, on voit que $\Delta^{(0)}_{\Phi}$ ne peut être à résolvante compacte pour $\varepsilon = 0$. La question se pose donc pour $\varepsilon < 1/8$, $\varepsilon \neq 0$. Celle-ci a une réponse complète dans le cadre décrit ci-dessous.

3 Approche algèbres de Lie nilpotentes, prolongements, questions diverses

3.1 Hypoellipticité maximale microlocale

A l'occasion d'un cours fait à Rennes dans le cadre du colloque "Equations cinétiques, Hypoellipticité et Laplaciens de Witten", B. Helffer a fait le lien entre la compacité de la résolvante du Laplacien de Witten et l'hypoellipticité maximale microlocale pour des systèmes surdéterminés. Il s'agit d'associer au Laplacien de Witten $\Delta^{(0)}_{\Phi} = \sum_{j=1}^{d}(-\partial_{x_j} + \frac{1}{2}\partial_{x_j}\Phi)(\partial_{x_j} + \frac{1}{2}\partial_{x_j}\Phi)$ le système des $L_j = \partial_{x_j} + \frac{1}{2}\partial_{x_j}\Phi(x)D_t = X_j + iY_j$. On s'intéresse alors à la microhypoellipticité maximale séparément pour $\tau > 0$ ou $\tau < 0$, où τ désigne la variable de Fourier pour t. La différence des résultats de la section précédente dans les cas $\Phi \geq 0$ et $\Phi \leq 0$ convaincra le lecteur de l'importance de séparer les deux cas, et donc de la nécessité du point de vue microlocal. Si on note π_τ la représentation qui à D_t associe le nombre τ la microhypoellipticité maximale se lit

$$\sum_{j=1}^{d} \|\pi_\tau(X_j)u\|^2 + \|\pi_\tau(Y_j)u\|^2 \leq C\left(\sum_{j=1}^{d} \|\pi_\tau(L_j)u\|^2 + \|u\|^2\right) \tag{3.1}$$

avec une constante $C > 0$ uniforme quand $\tau \to +\infty$ ou $\tau \to -\infty$. Nous nous limitons ici au cas $\tau \to +\infty$ l'autre se retrouvant après changement de signe sur Φ. En posant $\tau = \frac{1}{h}$, l'inégalité (3.1) conduit à à l'estimation semiclassique pour le Laplacien de Witten $\Delta^{(0)}_{h,\Phi} = -h^2\Delta + \frac{1}{4}|\nabla\Phi|^2 - \frac{h}{2}\Delta\Phi$

$$h^{2-2/r}\|v\|^2 \leq C\left(\left\langle v, \Delta^{(0)}_{h,\Phi}v\right\rangle + \|v\|^2\right), \tag{3.2}$$

au voisinage d'un point x_0 pour lequel on a une condition de Hörmander au rang r.

Rappelons que l'approche de Helffer-Nourrigat (cf. [Hel5][HelNo][No]) établit l'hypoellipticité maximale d'un polynôme de champs de vecteurs Q, ces champs formant ou étant une représentation d'une algèbre de Lie nilpotente, sous la condition que pour toutes les représentations irréductibles non triviales π, l'opérateur $\pi(Q)$ est injectif sur l'espace de Schwartz S_π associé. Cette analyse repose sur la théorie de Kirilov des représentations irréductibles d'algèbres de Lie nilpotentes et leur identification via les orbites de l'action coadjointe. On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie que l'on associe au système de champs de vecteurs étudié, $\mathcal{G}_k$ sa composante de degré k dans sa graduation naturelle et r le rang de la condition de Hörmander. Un point clé de l'approche de Helffer et Nourrigat (voir [HelNo][No]) est un argument de récurrence qui consiste à vérifier que si $\pi(Q)$ est injectif sur $\mathcal{S}_\pi$ pour toute représentation dégénérée sur $\mathcal{G}_r$ alors Q est à résolvante compacte. Ainsi les techniques développées par Helffer et Nourrigat contiennent des conditions suffisantes de compacité de résolvante. Pour le Laplacien de Witten et dans le cas où Φ est une fonction polynomiale, on peut donner une traduction explicite d'une telle condition suffisante (cf. [Hel5]).

Définition 3.1. *On note E_r l'ensemble des polynômes de degré r qui s'annulent en* 0.

Définition 3.2.
A un polynôme $\Phi \in E_r$, on associe l'ensemble $\mathcal{L}_\Phi$ qui est le plus petit sous-

ensemble de E_r contenant Φ et vérifiant les propriétés de stabilité suivantes :

1. *Si $P \in \mathcal{L}_\Phi$ et $y \in \mathbb{R}^n$, alors le polynôme*

$$Q(x) = P(x+y) - P(y), \forall x \in \mathbb{R}^n ,$$

   appartient aussi à $\mathcal{L}_\Phi$.

2. *Si $P \in \mathcal{L}_\Phi$ and $\lambda > 0$, alors $Q(x) = P(\lambda x)$ appartient aussi à $\mathcal{L}_\Phi$.*
3. *$\mathcal{L}_\Phi$ est un ensemble fermé de E_r.*

Théorème 3.3.
On suppose que $\Phi \in E_r$ est irréductible au sens où $\sum_{|\alpha|>0} |D_x^\alpha \Phi(x)| \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$ ou, de manière équivalente, que Φ ne présente pas d'invariance par translation. Si $\mathcal{L}_\Phi \cap E_{r-1}$ ne contient aucun polynôme non nul admettant un minimum local, alors le Laplacien de Witten Laplacian $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte.

3.2 Application à l'exemple h)

On peut appliquer le Théorème 3.3 au cas $\Phi_\varepsilon = (x_1^2 - x_2)^2 + \varepsilon x_2^2 = x_1^4 - 2x_1^2 x_2 + (1+\varepsilon)x_2^2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, pour montrer que $\Delta_{\Phi_\varepsilon}$ est à résolvante compacte si et seulement si $\varepsilon \neq 0$. Pour déterminer les éléments de $\mathcal{L}_{\Phi_\varepsilon} \cap E_3$ il s'agit de regarder les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 obtenus comme limites de polynômes $Q_{\lambda,x}(y) = \Phi_\varepsilon(\lambda(x+y)) - \Phi_\varepsilon(\lambda y)$. Pour cela il suffit de regarder les limites possibles des dérivées en 0, i.e. des limites possibles des $\partial_x^\alpha[\Phi_\varepsilon(\lambda x)]$. Le calcul donne :

$\alpha = (4,0)$: $24\lambda^4 \to 0$. On cherche les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ce qui impose ici la valeur 0 à la limite.

$\alpha = (1,0)$: $4\lambda^4 x_1^4 - 4\lambda^3 x_2 x_1 \to l_1$.

$\alpha = (0,1)$: $-2\lambda^3 x_1^2 + 2(1+\varepsilon)\lambda^2 x_2 \to l_2$.

$\alpha = (2,0)$: $12\lambda^4 x_1^2 - 4\lambda^3 x_2 \to l_{11}$.

$\alpha = (0,2)$: $2(1+\varepsilon)\lambda^2 \to 0$. Cette limite est une conséquence de la première condition qui donne $\lambda \to 0$.

$\alpha = (1,1)$: $-4\lambda^3 x_1 \to l_{12}$.

$\alpha = (3,0)$: $24\lambda^4 x_1 \to l_{111}$.

$\alpha = (2,1)$: $-4\lambda^3 \to 0$. Cette limite est une conséquence de la première condition qui donne $\lambda \to 0$.

On vérifie alors aisément que les seules limites possibles doivent vérifier $l_{11} = l_{12} = l_{111} = 0$ pour $\varepsilon \neq 0$. Autrement dit les éléments de $\mathcal{L}_{\Phi_\varepsilon} \cap E_3$ sont affines et n'admettent pas de minimum local. Ainsi $\Delta^{(0)}_{\Phi_\varepsilon}$ est à résolvante compacte si et seulement si $\varepsilon \neq 0$.

3.3 Hypoellipticité et potentiels homogènes sans condition de signe.

Nous résumons ici quelques résultats d'un travail en cours qui essaient de faire le lien entre le traitement du cas polynomial ci-dessus et les résultats de [HelNi] résumés dans la Section 2. Nous nous limitons pour cela au cas d'une fonction homogène $\Phi(r\theta) = r^m\varphi(\theta)$ pour $r \geq 1$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(S^{d-1})$, mais sans condition de signe. Au degré d'homogénéité m on associe l'entier

$$\widehat{m} = \max\{\mu \in \mathbb{N}, \mu < m\}, \tag{3.3}$$

qui vaut la partie entière de m si m n'est pas entier et $m-1$ sinon.

Proposition 3.4. *Pour que le Laplacien de Witten $\Delta^{(0)}_\Phi$ soit à résolvante compacte avec $\Phi(r\theta) = r^m\varphi(\theta)$, pour $r \geq 1$, il faut :*

i) $m > 1$*;*

ii) *φ ne s'annule pas à l'ordre $\widehat{m}+1$, $\sum_{|\alpha|\leq \widehat{m}} |\partial_x^\alpha \varphi| > 0$;*

iii) *Il n'y a aucun couple $K \subset U$, $K \subset \varphi^{-1}(\{0\})$ compact et U ouvert de S^{d-1}, tels que*

$$\forall x \in U \setminus K, \quad \varphi(x) > 0.$$

La condition suffisante s'obtient à partir de l'inégalité hypoelliptique semiclassique (3.2) à l'aide d'une partition dyadique de l'unité.

Proposition 3.5. *Supposons $\Phi(r\theta) = r^m\varphi(\theta)$ pour $r \geq 1$ avec $m > 1$. Si φ ne s'annule pas à l'ordre $\widehat{m}+1$ et vérifie :*
Pour tout $\theta_0 \in \varphi^{-1}(\{0\})$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\theta_0}$ de θ_0 et deux constantes $d_{\theta_0} > 0$ et $c_{\theta_0} > 0$, telles que :

$$\forall d \in]0, d_{\theta_0}], \forall \theta_1 \in \mathcal{V}_{\theta_0}, \quad \inf_{|\theta-\theta_1|\leq d} (\varphi(\theta) - \varphi(\theta_1)) \leq -c_{\theta_0} \sup_{|\theta-\theta_1|\leq d} |\varphi(\theta) - \varphi(\theta_1))|; \tag{3.4}$$

alors le Laplacien de Witten $\Delta^{(0)}_\Phi$ est à résolvante compacte.

On reconnaîtra dans (3.4) une condition suffisante d'hypoellipticité maximale (cf. [Hel5][No]). Avec cette hypothèse on a en fait un peu mieux que la compacité de la résolvante avec la minoration :

$$\Delta_{\Phi}^{(0)} \geq C^{-1} \langle x \rangle^{r} - C, \quad \text{avec } r \geq 2(\frac{m}{\widehat{m}} - 1).$$

D'après les résultats de Maire dans [Mai1][Mai4], on sait construire des opérateurs $\Delta_{\Phi}^{(0)}$ hypoelliptiques mais non maximalement hypoelliptiques (dans un sens microlocal $\tau > 0$). La traduction de la condition suffisante de Maire est dans le présent contexte : φ n'a pas de minimum local sur $\varphi^{-1}(\{0\})$. En fait on peut construire sous cette dernière hypothèse : 1) des potentiels Φ pour lesquels $\Delta_{\Phi}^{(0)}$ n'est pas à résolvante compacte tout en vérifiant les autres conditions; 2) des potentiels Φ pour lesquels la minoration de $\Delta_{\Phi}^{(0)}$ fait intervenir des petites puissances de $\langle x \rangle$.

On termine ce paragraphe par un résultat sur les classes d'homotopie des résolvantes compactes $(1 + \Delta_{\Phi}^{(0)})^{-1}$ pour $\Phi(r\theta) = r^{m}\varphi(\theta)$ (pour $r \geq 1$) avec $m > 1$ fixé et où φ appartient à l'ouvert dense des fonctions de Morse sur S^{d-1}. Les fonctions φ_0 et φ_1 étant des fonctions de Morse sur S^{d-1}, on dit que les résolvantes $(1 + \Delta_{\Phi_0})^{-1}$ et $(1 + \Delta_{\Phi_1})^{-1}$, $\Phi_k(r\theta) = r^{m}\varphi_k(\theta)$ sont dans la même classe d'homotopie s'il existe une famille continue $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ de fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$ de Morse, telle que la résolvante $(1 + \Delta_{\Phi_t})^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$ dépende continûment de $t \in [0,1]$.

Proposition 3.6. *Pour $m > 2$, l'ensemble des résolvantes $(1+\Delta_{\Phi}^{(0)})^{-1}$, avec φ fonction de Morse, a deux classes d'homotopie. Pour $m \in]1,2]$ cet ensemble à un nombre infini de classes d'homotopie, le nombre de composantes connexes de $\varphi^{-1}(]-\infty,0])$ étant un invariant d'homotopie.*

3.4 Questions diverses

Nous terminons par quelques questions connexes ou subséquentes à cette analyse.

a) Quelle est la régularité minimale sur la fonction $\varphi\ : M \to \mathbb{R}_+$ (M variété compacte) pour que la famille de mesures de probabilités $\mu_\beta = \frac{e^{-\beta\varphi}}{\int_M e^{-\beta\varphi}}$ admette une unique limite faible quand $\beta \to \infty$? A-t-on des contre-exemples à l'unicité ? Dans le cas où φ est analytique réelle sur M analytique réelle, la technique de résolution des singularités présentée dans [ArGuVar] donne un développement asymptotique complet. Le

Lemme 4.7 de [HelNi] est une version affaiblie d'une réponse positive qui marche sous la simple hypothèse $\varphi \in \mathcal{C}^{1+\nu}$ avec $\nu > 0$.

b) Dans le cas de fonctions analytiques réelles positives φ_i, $i = 1,\ldots,N$, peut-on donner un développement asymptotique d'intégrales de Laplace de la forme

$$\int_M e^{-\sum_{j=1}^N r^{\alpha_j}\varphi_j(\theta)}\chi(\theta)\ d\theta$$

quand $r \to \infty$ et plus généralement de

$$\int_M e^{-\sum_{j=1}^N t_j\varphi_j(\theta)}\chi(\theta)\ d\theta$$

quand $|t| \to \infty$?

c) Pour les problèmes non-linéaires et l'étude des équations cinétiques, les inégalités de Sobolev logarithmiques sont plus robustes et plus souples que les inégalités de Poincaré (cf. [Aetal][DesVil] [CCG] [Dedo1][Dedo2] [Dedo3]). Dans un contexte polyhomogène, voire homogène pour commencer, avec condition de signe, a-t-on des conditions nécessaires et suffisantes pour l'inégalité de Sobolev logarithmique? Les estimations de concentration gaussienne impose au moins dans un sens faible $\Phi \geq C^{-1}x^2$ à l'infini et le degré d'homogénéité critique est a priori 2 pour cette inégalité.

d) Dans [HerNi], nous avons mis en évidence avec F. Hérau des relations algébriques très étroites entre l'opérateur de Fokker-Planck $K = v\partial_x - \partial_x V(x)\partial_v + (-\partial_v + v)(\partial_v + v)$ et le Laplacien de Witten sur $\mathbb{R}^{2d}_{x,v}$ associé au potentiel $\Phi(x,v) = v^2/2 + V(x)$. Ces relations se traduisent au niveau des propriétés spectrales. Ainsi le taux de retour à l'équilibre pour l'équation de Fokker-Planck (opérateur hypoelliptique) peut être encadré à l'aide de la première valeur propre non nulle du Laplacien de Witten (modèle elliptique) de faç on très précise si le potentiel V vérifie des conditions d'ellipticité à l'infini. On vérifie aisément en toute généralité que la compacité de la résolvante de K impose la compacité de la résolvante de $\Delta^{(0)}_\Phi$. Il serait intéressant de pouvoir faire une analyse reposant sur la théorie de Helffer-Nourrigat comme celle résumée dans le paragraphe 3 pour un potentiel V polynomial. Des premières tentatives avec B. Helffer ont jusqu'à présent échoué, sans pour autant exclure un tel résultat. Si cette approche marche, le truc consiste à trouver la bonne algèbre de Lie nilpotente pour laquelle K ou une approximation de K est une représentation d'un polynôme de champs de vecteurs et pour laquelle s'appliquent les résultats de [HelNo].

Références

[Aetal] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques (avec une préface de D. Bakry et M. Ledoux).* Panoramas & Synthèses, SMF, No 10 (2000).

[ArGuVar] V.I. Arnold, S.M. Gusen-Zade et A.N. Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps. Vol II*, Monographs in Mathematics, Birkhaüser (1988).

[BoDaHel] P. Bolley, M. Dauge et B. Helffer. Conditions suffisantes pour l'injection compacte d'espaces de Sobolev à poids (ou autour d'une question de F. Mignot). Séminaire de l'université de Nantes 1989-90.

[BouHi] N. Bouleau, F. Hirsch. *Dirichlet forms and analysis on Wiener space.* de Gruyter Studies in Mathematics 14.

[CCG] M.J. Caceres, J.A. Carrillo et T. Goudon. Equilibration rate for the linear inhomogeneous relaxation-time Boltzmann equation for charged particles. Preprint (2002).

[CFKS] H.L Cycon, R.G Froese, W. Kirsch, et B. Simon. *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry.* Text and Monographs in Physics. Springer-Verlag, (1987).

[DeSt] J.D. Deuschel et D. Stroock. *Large Deviations*, Pure Appl. Math., **137**, Boston, Academic Press (1989).

[DesVil] L. Desvillettes et C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, **54**(1) (2001), 1-42.

[Dedo1] M. Del Pino et J. Dolbeault. The Optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality, à paraître dans J. Funct. Anal.

[Dedo2] M. Del Pino et J. Dolbeault. Asymptotic behaviour of nonlinear diffusions. Prépublication du CEREMADE numéro 0217 08/10/2001.

[Dedo3] M. Del Pino et J. Dolbeault. Nonlinear diffusions, hypercontractivity and the optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality. Prépublication du CEREMADE numéro 0239 04/12/2002.

[Fef] C. Fefferman. The uncertainty principle. Bulletin of the American Mathematical Society **9** (2) (1983), 129-206.

[Hel1] B. Helffer. Sur l'hypoellipticité des opérateurs de la forme $\sum Y_j^2 + \frac{1}{2}\sum c_{j,k}[Y_j,Y_k]$. Séminaire de l'université de Nantes exposé n°1, 1981-82 (d'après Helffer-Métivier-Nourrigat).

[Hel2] B. Helffer. *Introduction to the semi-classical Analysis for the Schrödinger operator and applications.* (monographie), Lecture Notes in Math. n°1336.

[Hel3] B. Helffer. On spectral theory for Schrödinger operators with magnetic potentials. *Advanced Studies in Pure Mathematics* **23**, (1993), 113-141,

[Hel4] B. Helffer. *Semi-classical analysis, Witten Laplacians and statistical mechanics.* Series on Partial Differential Equations and Applications, 1. World Scientific Publishing Co (2002).

[Hel5] B. Helffer. *Hypoellipticity, spectral theory and Witten Laplacian* Cours à Rennes dans le cadre du workshop "Equations cinétiques, hypoellipticité et Laplacien de Witten".

[HelMo] B. Helffer et A. Mohamed. Sur le spectre essentiel des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique. *Ann. Inst. Fourier*, **38** (2), (1988), 95-113.

[HelNi] B. Helffer et F. Nier : Criteria to the Poincaré inequality associated with Dirichlet forms in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. IMRN **22** (2003).

[HelNo] B. Helffer et J. Nourrigat. *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs.* Progress in Mathematics, Birkhäuser, vol.58.

[HelSj] B. Helffer et J. Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique IV -Etude du complexe de Witten -, *Comm.in PDE* **10**(3), (1985), 245-340.

[HerNi] F. Hérau et F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. à paraître dans Archives for Rational Mechanics and Analysis.

[HormIII] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III.* Springer-Verlag, (1985).

[HoSt] R. Holley et D. Stroock. Simulated annealing via Sobolev inequalities, *Comm. in Math. Physics* **115** (1988), 553-561

[HoKuSt] R. Holley, S. Kusuoka et D. Stroock. Asymptotics of the spectral gap with applications to the theory of simulated annealing. *Journal of Functional Analysis* **83** (1989), 333-350.

[Jo] J. Johnsen. On the spectral properties of Witten Laplacians, their range projections and Brascamp-Lieb's inequality, *Integral Equations Operator Theory* **36** (3) (2000), 288-324.

[Mai1] H.M. Maire : Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations. Comm. in PDE **5** (4) (1980), 331-380.

[Mai4] H.M. Maire : Régularité optimale des solutions de systèmes différentiels et du Laplacien associé: application au $\Box_b$. Math. Ann. 258 (1981), 55-63.

[No] J. Nourrigat : Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators. Cours à Recife (1982).

[Lig] T.M. Liggett. L^2 rates of convergence for attractive reversible nearest particle systems, *Ann. Probab.*, **19** (1991), 935-959.

[Ris] H. Risken. *The Fokker-Planck equation.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, (1989). Methods of solution and applications.

[RocWa] M. Röckner et F.Y. Wang. Weak Poincaré Inequalities and L^2-Convergence Rates of Markov Semigroups. *Journal of Functional Analysis*, **185** (2001), 564-603.

[RoSt] L. Rothschild et E.M. Stein. Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups. *Acta Mathematica*, **137** (1977), 248–315.

[Roy] G. Royer : *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques.* Cours Spécialisés, SMF, No 5 (1999).

[Sim] B. Simon. Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum, *Ann. Physics*, **146** (1983), 209-220.

[Sj] J. Sjöstrand. Correlation asymptotics and Witten Laplacians, *St Petersburg Math. J.*, **8** (1997), 160-191.