Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE
Equations aux Dérivées Partielles
2002-2003

Jean-Pierre Puel

Inégalités de Carleman globales pour les problèmes elliptiques non homogènes

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° II, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A2_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Inégalités de Carleman globales pour les problèmes elliptiques non homogènes

Jean-Pierre Puel *

Résumé

On établit ici, suivant [5], une inégalité de Carleman globale optimale pour les solutions faibles (au sens H^1) d'équations elliptiques générales avec second membre dans H^{-1} et trace non nulle.

La motivation, qui est expliquée dans l'introduction, réside dans l'obtention d'inégalités de Carleman globale pour l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé afin, notamment, d'étudier les questions de contrôlabilité exacte sur les trajectoires pour les équations de Navier-Stokes. Une étape majeure consiste à obtenir une estimation sur la pression en fonction de la vitesse (et de la trace de la pression), ce qui est donné par le résultat présenté ici.

1 Motivations

Le but recherché dans ce travail, qui reprend un résultat obtenu en collaboration avec O.Yu.Imanuvilov dans [5], est de donner une inégalité de Carleman globale "optimale" (au sens des puissances des paramètres qui interviennent) pour des opérateurs elliptiques généraux et des fonctions à traces non nulles sur la frontière du domaine.

Ceci constitue en soi une motivation consistant à donner dans le cadre plus général pour des opérateurs elliptiques un résultat de référence en ce qui concerne les inégalités de Carleman. Toutefois la véritable motivation de ce travail nous est apparue dans le cadre du (vaste) programme d'étude de la contrôlabilité des équations de Navier-Stokes. Il s'agit alors d'obtenir une inégalité de Carleman globale pour les opérateurs de Navier-Stokes linéarisés (cf les travaux pionniers dans ce sens de [3] et [4]). Une autre application de ceci permet d'aborder de manière non classique les problèmes d'assimilation de données (cf [8]).

Décrivons de manière très succinte et formelle le problème de contrôlabilité exacte sur les trajectoires.

*J.-P. Puel: (jppuel@cmapx.polytechnique.fr) Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Versailles Saint-Quentin, 45 avenue des Etats Unis, 78035 Versailles

Soit L un opérateur de type elliptique linéaire et N un opérateur non linéaire. On considère une trajectoire "idéale" $\overline{Y}$ du problème d'évolution

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} + L\overline{Y} + N(\overline{Y}) = F,\ t \in (0,T), \tag{1.1}$$

$$\overline{Y}(0) = \overline{Y}_0. \tag{1.2}$$

Par exemple, $\overline{Y}$ peut être une solution stationnaire, éventuellement instable, du problème elliptique non linéaire sous jacent.

Nous considérons maintenant une trajectoire effective du même opérateur mais sur laquelle on peut agir à l'aide d'un contrôle (ici supposé distribué pour simplifier) qui s'exerce sur une partie ω du domaine physique de travail.

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + LY + N(Y) = F + v\chi_\omega,\ t \in (0,T), \tag{1.3}$$

$$Y(0) = Y_0, \tag{1.4}$$

où v désigne le contrôle et Y_0 une donnée initiale différente de $\overline{Y}_0$.

Le problème de contrôlabilité exacte sur les trajectoires consiste à chercher un contrôle v tel que l'on ait exactement au temps T

$$Y(T) = \overline{Y}(T). \tag{1.5}$$

(Il est aussi possible dans (1.3) de remplacer le second membre F par $\overline{F}$ différent de F mais très voisin de F au voisinage de T.)

Pour obtenir un résultat local (c'est à dire lorsque $(Y_0 - \overline{Y}_0)$ est "petit") il est utile d'étudier le problème linéarisé autour de $\overline{Y}$.

Si $Y \to L(\overline{Y})Y$ désigne le linéarisé de $Y \to LY + N(Y)$ en $\overline{Y}$, on considère le problème d'évolution pour Z ($Z \simeq Y - \overline{Y}$)

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + L(\overline{Y})Z = v\chi_\omega,\ t \in (0,T), \tag{1.6}$$

$$Z(0) = Z_0\ (= Y_0 - \overline{Y}_0), \tag{1.7}$$

et on cherche v tel que

$$Z(T) = 0. \tag{1.8}$$

Cette question est souvent appelée problème de contrôlabilité à zéro (cf [7], [2], ...). Il est connu que la solution de ce problème équivaut à l'obtention d'une inégalité d'observabilité pour le problème (rétrograde) adjoint

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L^*(\overline{Y})\Phi = 0,\ t \in (0,T), \tag{1.9}$$

$$\Phi(T) = \Phi_T. \tag{1.10}$$

L'inégalité d'observabilité s'écrit alors

$$||\Phi(0)||^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\Phi|^2 dxdt \tag{1.11}$$

(les normes sont bien entendu à préciser.)

Les seules méthodes connues pour l'obtention d'inégalités de type (1.11) font appel aux inégalités de Carleman globales pour l'opérateur

$$-\frac{\partial}{\partial t} + L^*(\overline{Y})$$

Dans le cas des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'une trajectoire $\overline{y}$ dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ, le problème adjoint s'écrit

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \mu \Delta \varphi_i - \sum_{j=1}^{N} \overline{y}_j D_{ij}(\varphi) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \cdots, N, \; \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{1.12}$$

$$div \varphi = 0, \; \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{1.13}$$

$$\varphi = 0, \; \text{sur } \Gamma \times (0,T), \tag{1.14}$$

$$\varphi(T) = \varphi_T, \tag{1.15}$$

où

$$D_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}).$$

Le but est d'obtenir une inégalité du type

$$||\varphi(0)||^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt, \tag{1.16}$$

en utilisant le moins d'informations possible sur $\overline{y}$.

La seule stratégie actuellement abordable est la suivante :

1. considérer (1.12) comme un système d'équations de la chaleur avec second membre ∇p et obtenir des estimations de φ et $\nabla \varphi$ en fonction de ∇p. On connait pour cette étape des estimations optimales.

2. à partir de (1.12) en prenant la divergence de l'équation, on obtient pour p l'équation elliptique

$$\Delta p = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{y}_j D_{ij}(\varphi)), \; \text{dans } \Omega, \tag{1.17}$$

$$p = h \text{ sur } \Gamma, \tag{1.18}$$

où h n'est pas connue.

On veut alors estimer ∇p en fonction de φ, $\nabla\varphi$ et h. C'est cette estimation, que l'on veut optimale afin de pouvoir l'utiliser dans l'étape 1. , qui a motivé le travail qui sera exposé ci-après.

3. estimation de h en fonction de φ et $\nabla\varphi$. Cette étape utilise les résultats de régularité sur le problème de Stokes.

4. estimation locale de la pression p. Cette étape fait l'objet d'un travail en cours avec S. Guerrero et O.Yu. Imanuvilov.

2 Résultat

Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 de $\mathbb{R}^{N+1}$, de frontière Γ et soit ω un ouvert non vide tel que $\omega \subset \Omega$.

On se donne des coefficients $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega}),\ i,j = 0,\cdots,N$ tels que

$$\exists\beta > 0,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^{N+1},\ \forall x \in \overline{\Omega},\ \sum_{i,j=0}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \beta|\xi|^2 \tag{2.19}$$

et des coefficients b_j, c_i, d dans $L^\infty(\Omega)$, $i,j = 0,\cdots,N$. Pour $y \in H^1(\Omega)$ on pose

$$Py = \sum_{i,j=0}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=0}^{N} b_j \frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(c_i y) + dy \tag{2.20}$$

et on peut ecrire, puisque $Py \in H^{-1}(\Omega)$

$$Py = f + \sum_{j=0}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_j},\ \text{dans } \Omega, \tag{2.21}$$

$$y = g,\ \text{sur } \Gamma, \tag{2.22}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $f_j \in L^2(\Omega),\ j = 0,\cdots,N$, et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Afin d'écrire l'estimation de Carleman relative à (2.21), (2.22), nous devons introduire une fonction poids. D'après [2] (Lemma 1.1), on sait que pour tout ouvert non vide ω avec $\omega \subset \Omega$, il existe une fonction $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que

- $\psi(x) > 0,\ \forall x \in \Omega$, et $\psi = 0$ sur Γ,
- $|\nabla\psi(x)| > 0,\ \forall x \in \overline{\Omega - \omega}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, nous noterons

$$\varphi(x) = e^{\lambda\psi(x)}. \tag{2.23}$$

Theorème 2.1 *(cf [5]) Il existe $\hat{s} \geq 1$ et $\hat{\lambda} \geq 1$, il existe $C > 0$ tels que pour tout y vérifiant (2.21), (2.22), pour tout $s \geq \hat{s}$ et pour tout $\lambda \geq \hat{\lambda}$*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx \quad &+ \quad s^2\lambda^2 \int_\Omega \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \leq C(s^{\frac{1}{2}} e^{2s} ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &+ \quad \frac{1}{s\lambda^2} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^{N} s \int_\Omega |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx \\ &+ \quad \int_\omega (|\nabla y|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2|y|^2) e^{2s\varphi} dx).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Remarque 2.2

1. *Pour les applications en vue les puissances de s et λ sont fondamentales. Elles sont ici optimales.*

2. *Le théorème étend le résultat de [1] qui considérait des fonctions y à support compact dans Ω ainsi que celui de [6] qui se limitait au cas où $g = 0$.*

3. *On peut aisément, au prix d'agrandir un peu l'ouvert ω, éliminer dans le membre de droite le terme $\int_\omega |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx$.*

4. *La régularité demandée $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$ n'est certainement pas optimale. Il est très vraisemblable que l'hypothèse $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ soit suffisante.*

3 Idée de la démonstration

3.1 Localisation

Par partition de l'unité on se ramène à montrer l'inégalité (2.24) dans les deux cas suivants :

1. *Supp*$y \subset \Omega_0$ avec $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$,

2. *Supp*$y \subset B_\delta(\hat{x}),\ \hat{x} \in \Gamma$.

Le cas 1) correspond aux résultats de [1] et [6] qu'il suffit de reprendre avec soin pour obtenir les puissances exactes des paramètres. Nous nous limiterons ici à l'examen du cas 2) qui constitue la principale nouveauté.

On peut supposer δ assez petit pour que

$$B_\delta(\hat{x}) \cap \omega = \emptyset$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{i_0}}(x) \neq 0,\ \forall x \in B_\delta(\hat{x}).$$

Après renumérotation des coordonnées on peut supposer que $i_0 = 0$ et on effectue le changement de coordonnées

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_0 = \psi(x),\\
&\hat{x}_i = x_i,\ i = 1, \cdots, N.
\end{aligned}$$

Dans les nouvelles coordonnées (on omettra la notation ˆ pour les coordonnées pour simplifier et on prendra $\delta = 1$), nous avons

$$\Gamma \cap B_1(\hat{x}) = \{x_0 = 0\} \cap B_1(\hat{x})$$

et si on note $x' = \{x_1, \cdots, x_N\}$, $M = \{||x'|| < 1\}$, $G =]0,1[\times M$,

$$Suppy \subset [0,1[\times\{||x'|| \leq 1\} \tag{3.25}$$

$$Py = \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} + \sum_{j=1}^{N} a_{0j} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial x_j} + Ay + By = f + \sum_{j=0}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \text{ dans } G, \tag{3.26}$$

$$y(0, x') = g(x') \text{ dans } M, \tag{3.27}$$

où

$$Ay = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.28}$$

et où B est un opérateur du premier ordre que l'on peut négliger.

De plus la fonction poids s'écrit alors

$$\varphi(x) = e^{\lambda x_0} \tag{3.29}$$

et il est très important de noter qu'elle est indépendante de $x_i,\ i = 1, \cdots, N$.

Si on note

$$a(\xi^1, \xi^2) = a(x, \xi^1, \xi^2) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi^1 \xi^2,$$

la condition d'ellipticité (2.19) s'écrit

$$\exists \beta > 0,\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \tau^2 + \sum_{i=1}^{N} a_{0j} \tau \xi_j + a(\xi, \xi) \geq \beta(\tau^2 + |\xi|^2). \tag{3.30}$$

3.2 Factorisation

Le symbole principal de l'opérateur P peut s'écrire

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ p(x,\tau,\xi) = \tau^2 + i \sum_{j=1}^{N} a_{0j}(x)\tau\xi_j - a(x,\xi,\xi).$$

Les racines en τ de ce polynome, régularisées près de $\xi = 0$ par une fonction "cut-off" μ, s'écrivent

$$r_\pm(x,\xi) = \frac{i\sum_{j=1}^N a_{0j}(x)\xi_j \pm \mu(|\xi|)\sqrt{4a(x,\xi,\xi) - (\sum_{j=1}^N a_{0j}(x)\xi_j)^2}}{2}.$$

On notera $R_\pm$ l'opérateur pseudodifférentiel de symbole $r_\pm$. On peut alors écrire (suivant [9]) la factorisation

$$Py = (\frac{\partial}{\partial x_0} - R_+)(\frac{\partial}{\partial x_0} - R_-)y + Ky$$

où K est un opérateur du premier ordre en variable x' uniformément borné en x_0 et qui pourra être négligé puisque le poids φ est indépendant de x'.

Remarque 3.1 *Pour se faire une idée plus simple (mais non simpliste), le lecteur pourra remplacer r_+ par $|\xi|$ et r_- par $-|\xi|$.*

Posons

$$w = e^{s\varphi}y,\ s \in \mathbb{R}^+.$$

Alors nous obtenons

$$P_s w = e^{s\varphi}P(e^{-s\varphi}w) = e^{s\varphi}f + e^{s\varphi}\sum_{j=0}^{N}\frac{\partial f_j}{\partial x_j} = e^{s\varphi}\tilde{f} + \sum_{j=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{s\varphi}f_j), \tag{3.31}$$

$$w(0,x') = e^s g(x'),\ w = 0 \text{ pour } x_0 \text{ voisin de } 1, \tag{3.32}$$

où

$$P_s w = (\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+)(\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-)w,$$

et où

$$\tilde{f} = f - s\lambda\varphi f_0.$$

On omettra dorénavant le ˜ pour simplifier. On veut alors montrer que

$$\begin{aligned} \int_G (|\nabla w|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2|w|^2)dx \quad &\leq \quad C(s^{\frac{1}{2}}e^{2s}||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{s\lambda^2}\int_G |f|^2\frac{e^{2s\varphi}}{\varphi}dx \\ &+ \quad \sum_{j=0}^{N} s\int_G |f_j|^2\varphi e^{2s\varphi}dx). \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.3 Estimation de Carleman

La complète justification des calculs faits ci-après nécessite des régularisations préalables que nous omettrons afin de ne pas alourdir l'exposé. Cela n'entraîne aucune modification dans les idées des démonstrations.

Posons

$$(\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-)w = z. \tag{3.34}$$

Alors, puisque w est nulle au voisinage de $x_0 = 1$, z vérifie l'équation

$$(\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+)z = e^{s\varphi}f + \sum_{j=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(e^{s\varphi}f_j) \text{ dans } G, \tag{3.35}$$

$$z(1, x') = 0 \text{ dans } M. \tag{3.36}$$

Lemme 3.2 *Il existe $C > 0$ indépendante de s et λ, il existe $s_0 \geq 0$ tels que pour tout $s \geq s_0$, pour tout $\lambda \geq 1$*

$$\begin{aligned} \int_G \varphi|z|^2 dx \quad &\leq \quad C(\frac{1}{s^2\lambda^2}\int_G |f|^2 \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi} dx \\ &+ \quad \sum_{j=0}^{N} s\int_G |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Démonstration. Elle se fait par dualité. On considère le problème de Cauchy adjoint

$$(\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+^*)u = z \text{ dans } G, \tag{3.38}$$

$$u(0, x') = 0 \text{ dans } M. \tag{3.39}$$

Lemme 3.3 *Pour tout $z \in L^2(G)$, il existe une unique solution $u \in H^1(G)$ du problème (3.38), (3.39) et il existe $C > 0$ indépendant de s et λ, il existe $s_0 \geq 0$, tels que pour tout $s \geq s_0$ et pour tout $\lambda \geq 1$, u satisfait l'estimation*

$$\int_G (|\nabla u|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2|u|^2)dx \leq C\int_G |z|^2 dx. \tag{3.40}$$

Supposons démontré le Lemme 3.3. En multipliant scalairement dans $L^2(G)$ l'équation (3.35) par u et après intégration par parties, on voit que

$$\int_G |z|^2 dx = \int_G e^{s\varphi} f\overline{u} dx - \sum_{j=0}^{N}\int_G e^{s\varphi} f_j \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} dx,$$

d'où, en utilisant (3.40), on obtient

$$\begin{aligned}\int_G |z|^2 dx &\leq C(\frac{1}{s^2\lambda^2}\int_G |f|^2 \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi^2} dx \\ &+ \sum_{j=0}^{N} s\int_G |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx).\end{aligned}$$

On applique ensuite cette inégalité à $\tilde{z} = \sqrt{\varphi} z$ qui est solution d'une équation du même type avec les changements adéquats sur les seconds membres pour obtenir l'estimation cherchée (3.37) qui termine le Lemme 3.2.

Montrons maintenant le Lemme 3.3. L'équation (3.38), (3.39) est un "bon" problème de Cauchy. On remarque que le symbole principal de l'opérateur $\frac{R_+ + R_+^*}{2}$ qui est $\frac{r_+(x,\xi)+r_+^*(x,\xi)}{2}$ vérifie

$$\exists C > 0,\ \forall (x,\xi) \in G \times \mathbb{R}^N,\ |\xi| \geq 1,\ \frac{r_+(x,\xi) + r_+^*(x,\xi)}{2} \geq C|\xi|.$$

Alors, en prenant la partie réelle du produit scalaire dans $L^2(M)$ de (3.38) par $-u$ on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}|u|^2_{L^2(M)} + \int_M s\lambda\varphi|u|^2 dx' + C||u||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)} \leq C(|u|^2_{L^2(M)} + |z|^2_{L^2(M)}).$$

Si

$$S = s\lambda\varphi + \frac{R_+ + R_+^*}{2}$$

on prend la partie réelle du produit scalaire dans $L^2(M)$ de (3.38) avec $-Su$. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}(u, Su)_{L^2(M)} + Re\int_M (s\lambda\varphi u + R_+^* u)Sudx' &- \frac{1}{2}Re(u, (\frac{\partial}{\partial x_0}S)u)_{L^2(M)} \\ &= -Re(z, Su)_{L^2(M)}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gårding, nous avons

$$(u, Su)_{L^2(M)} \geq s\lambda\int_M \varphi|u|^2 dx' + C||u||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)} - C|u|^2_{L^2(M)}.$$

Maintenant on a

$$Re\int_M (s\lambda\varphi u + R_+^* u)Sudx' = |Su|^2_{L^2(M)} + Re(Tu, Su)_{L^2(M)}$$

où

$$T = R_+^* - R_+.$$

On montre par des calculs soigneux que

$$|Re(Tu, Su)_{L^2(M)}| \leq C||u||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)} + s\lambda \int_M \varphi |u|^2 dx'.$$

D'autre part, on a

$$|Su|^2_{L^2(M)} \geq s^2\lambda^2 \int_M \varphi^2 |u|^2 dx' + C||u||^2_{H^1(M)}.$$

Enfin il est aisé de voir que

$$Re(u, (\frac{\partial}{\partial x_0} S)u)_{L^2(M)}| \leq C||u||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)} + s\lambda^2 \int_M \varphi |u|^2 dx'.$$

Utilisant toutes ces estimations et le Lemme de Gronwall, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} s\lambda||\sqrt{\varphi}u||^2_{L^\infty(0,1;L^2(M))} &+ ||u||^2_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))} + s^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |u|^2 dx \\ +||u||^2_{L^2(0,1;H^1(M))} &\leq C(|z|^2_{L^2(G)} + s\lambda^2 |\sqrt{\varphi}u|^2_{L^2(G)}) \end{aligned} \tag{3.41}$$

soit pour s assez grand

$$\begin{aligned} s\lambda||\sqrt{\varphi}u||^2_{L^\infty(0,1;L^2(M))} &+ ||u||^2_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))} + s^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |u|^2 dx \\ +||u||^2_{L^2(0,1;H^1(M))} &\leq C|z|^2_{L^2(G)}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

En réutilisant l'équation on déduit de ceci que

$$|\frac{\partial u}{\partial x_0}|^2_{L^2(G)} \leq C|z|^2_{L^2(G)}.$$

Ceci termine la démonstration du Lemme 3.3.

Maintenant nous cherchons à obtenir une estimation de w en fonction de z. Nous savons que w satisfait

$$Lw = (\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-)w = z \text{ dans } G, \tag{3.43}$$

$$w(0, x') = e^s g(x'),\ w(1, x') = 0 \text{ dans } M. \tag{3.44}$$

On définit

$$L_1 = -(s\lambda\varphi + \frac{R_- + R_-^*}{2}) \tag{3.45}$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial x_0} - (\frac{R_- - R_-^*}{2}) \tag{3.46}$$

de sorte que

$$L = L_1 + L_2.$$

Cas 1. $(L_1(0)g, g)_{L^2(M)} \leq 0$.

On a alors

$$|L_1 w|^2_{L^2(G)} + |L_2 w|^2_{L^2(G)} + ([L_1, L_2]w, w)_{L^2(G)} - e^{2s}(L_1(0)g, g)_{L^2(M)} = |z|^2_{L^2(G)}.$$

Mais

$$[L_1, L_2] = s\lambda^2\varphi + K$$

où

$$(Kw, w)_{L^2(G)} \leq C||w||^2_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}.$$

Mais en utilisant l'inégalité de Gårding pour L_1 on a

$$\begin{aligned} ||w||^2_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))} &\leq C(s\lambda \int_G \varphi|w|^2 dx + \int_G |w|^2 dx + (L_1 w, w)_{L^2(G)}) \\ &\leq C(s\lambda \int_G \varphi|w|^2 dx + \frac{1}{\lambda}|L_1 w|^2_{L^2(G)}). \end{aligned}$$

Choisissant $s \geq 1$ et λ suffisamment grand (indépendant de s) on obtient

$$\frac{1}{2}|L_1 w|^2_{L^2(G)} + |L_2 w|^2_{L^2(G)} + \frac{1}{2}s\lambda^2 \int_G \varphi|w|^2 dx \leq |z|^2_{L^2(G)}$$

puis en appliquant ce résultat à l'équation vérifiée par $\tilde{w} = \sqrt{\varphi}w$ on obtient

$$\frac{1}{2}|L_1(\sqrt{\varphi}w)|^2_{L^2(G)} + |L_2(\sqrt{\varphi}w)|^2_{L^2(G)} + \frac{1}{2}s\lambda^2 \int_G \varphi^2|w|^2 dx \leq 2|\sqrt{\varphi}z|^2_{L^2(G)}.$$

Ceci, combiné à l'estimation (3.37) obtenue sur z donne l'estimation désirée de $s^2\lambda^2 \int_G \varphi^2|w|^2 dx$ et, dans ce cas, sans terme de trace g dans le membre de droite !

Cas 2. $(L_1(0)g, g)_{L^2(M)} \geq 0$.

Remarquons qu'alors

$$s\lambda \int_M |g|^2 dx' \leq C||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)}. \tag{3.47}$$

On considère alors le problème adjoint

$$L^* p = (-\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-^*)p = \varphi w. \tag{3.48}$$

Il n'est pas évident qu'il existe des solutions p de ce problème et encore moins que l'on puisse estimer certaines de ces solutions.

Lemme 3.4 *Il existe $C > 0$, il existe $\lambda_2 > 0$ tels que pour tout $\lambda \geq \lambda_2$, pour tout $s \geq 1$, il existe p solution de (3.48) avec*

$$(3.49) \qquad s\lambda^2 \int_G |p|^2 dx + \sqrt{s}\lambda \int_M |p(0,x')|^2 dx' \leq C \int_G \varphi |w|^2 dx.$$

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$ fixé on considère

$$(3.50) \qquad J_\epsilon(p) = \frac{1}{2}|p|^2_{L^2(G)} + \frac{1}{2\epsilon}|\varphi w - L^* p|^2_{L^2(G)}.$$

On montre aisément que J_ϵ possède un minimum p_ϵ et si $q_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(\varphi w - L^* p_\epsilon)$ on a

$$(3.51) \qquad Lq_\epsilon = (L_1 + L_2)q_\epsilon = p_\epsilon \text{ dans } G,$$

$$(3.52) \qquad q_\epsilon(0,x') = 0,\ q_\epsilon(1,x') = 0 \text{ dans } M;$$

$$(3.53) \qquad L^* p_\epsilon = (L_2 - L_1)p_\epsilon = \varphi w - \epsilon q_\epsilon \text{ dans } G.$$

Nous avons vu (cf Cas 1.) que

$$|L_1 q_\epsilon|^2_{L^2(G)} + |L_2 q_\epsilon|^2_{L^2(G)} + s\lambda^2 \int_G \varphi |q_\epsilon|^2 dx \leq C|p_\epsilon|^2_{L^2(G)}.$$

Multipliant l'équation (3.53) par q_ϵ on obtient

$$-\int_G p_\epsilon \overline{(L_1 + L_2)q_\epsilon} dx = \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx - \int_G \varphi w \overline{q_\epsilon} dx$$

et donc

$$\int_G |p_\epsilon|^2 dx + \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx = \int_G \varphi w \overline{q_\epsilon} dx.$$

En utilisant l'estimation obtenue sur q_ϵ on obtient, indépendamment de ϵ

$$(3.54) \qquad s\lambda^2 \int_G |p_\epsilon|^2 dx \leq C \int_G \varphi |w|^2 dx.$$

Remarquons que

$$p_\epsilon(0,x') = \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0}(0,x').$$

Il reste donc à obtenir une estimation sur $\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0}(0,x')$. Si $\theta \in C^\infty([0,1])$ avec

$$\theta(x_0) = 1,\ \forall x_0 \in [0, \frac{1}{2}],\ \theta(x_0) = 0,\ \forall x_0 \in [\frac{3}{4}, 1],$$

on a

$$(L_1 + L_2)(\theta q_\epsilon) = \theta p_\epsilon + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon,$$

$$\theta q_\epsilon(0,x') = 0,\ \theta q_\epsilon(1,x') = 0,\ \frac{\partial(\theta q_\epsilon)}{\partial x_0}(1,x') = 0.$$

Appliquant l'opérateur $(L_2 - L_1)$ à cette équation on obtient

$$(L_2 - L_1)(L_1 + L_2)(\theta q_\epsilon) = (L_2 - L_1)(\theta p_\epsilon) + (L_2 - L_1)(\frac{\partial\theta}{\partial x_0} q_\epsilon).$$

Donc

$$L_2^2(\theta q_\epsilon) - L_1^2(\theta q_\epsilon) + [L_2, L_1](\theta q_\epsilon) = \epsilon\theta q_\epsilon - \theta\varphi w + \frac{\partial\theta}{\partial x_0}(L_2 - L_1)q_\epsilon + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_0^2} q_\epsilon.$$

Multipliant cette équation par $\frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon)$ et après une estimation soigneuse des différents termes, on obtient

$$|\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0}(0)|^2_{L^2(M)} \leq C\sqrt{s}\lambda |p_\epsilon|^2_{L^2(G)} + C|\sqrt{\varphi} w|_{L^2(G)} |p_\epsilon|_{L^2(G)}.$$

Ceci nous donne

$$\sqrt{s}\lambda \int_M |p_\epsilon(0, x')|^2 dx' \leq C \int_G \varphi |w|^2 dx. \tag{3.55}$$

Maintenant les estimations obtenues sur p_ϵ sont indépendantes de ϵ et après passage à la limite en ϵ on obtient le résultat du Lemme 3.4.

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} \int_G \varphi |w|^2 dx &= (L^* p, w)_{L^2(G)} = (p, Lw)_{L^2(G)} + \int_M p(0, x') w(0, x') dx' \\ &= (p, z)_{L^2(G)} + \int_M e^s p(0, x') g(x') dx'. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_G \varphi |w|^2 dx \leq \frac{C}{s\lambda^2} |z|^2_{L^2(G)} + \frac{C}{\sqrt{s}\lambda} e^{2s} |g|^2_{L^2(M)}.$$

D'après (3.47), cela donne

$$s^2\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 dx \leq Cs|z|^2_{L^2(G)} + C\sqrt{s} e^{2s} ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)}.$$

Changeant w en $\sqrt{\varphi} w$ on obtient alors

$$\begin{aligned} s^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx &\leq Cs|\sqrt{\varphi} z|^2_{L^2(G)} + C\sqrt{s} e^{2s} ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)} \\ &\leq C\sqrt{s} e^{2s} ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)} + C(\frac{1}{s\lambda^2} \int_G |f|^2 \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi} dx + \sum_{j=0}^{N} s \int_G |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Ceci nous donne une partie du résultat escompté, à savoir l'estimation sur le terme $\int_G \varphi^2|w|^2dx$. Il reste à obtenir l'estimation sur $\int_G |\nabla w|^2dx$. Pour cela on reprend l'équation en w (3.43) qui donne

$$\frac{\partial w}{\partial x_0} - R_- w = z + s\lambda\varphi w \text{ dans } G, \tag{3.57}$$

$$w(0,x') = e^s g(x') \text{ dans } M. \tag{3.58}$$

Utilisant les mêmes arguments qu'au Lemme 3.3 , on montre que

$$\int_0^1 ||w||^2_{H^1(M)}dx_0 \le C\int_G |z|^2dx + Cs^2\lambda^2\int_G \varphi^2|w|^2dx + Ce^{2s}||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)}$$

puis en réutilisant l'équation, que

$$\int_G |\nabla w|^2dx \le C\int_G |z|^2dx + Cs^2\lambda^2\int_G \varphi^2|w|^2dx + Ce^{2s}||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(M)}, \tag{3.59}$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 2.1.

Références

[1] C. Fabre, G. Lebeau : Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes, Comm. Partial Differential Equations, vol 21, 1996, pp: 573-596

[2] A. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov : *Controllability of Evolution Equations*, *Lecture Notes Series 34*, RIM-GARC, Seoul National University, 1996.

[3] O.Yu. Imanuvilov : On exact controllability for the Navier-Stokes equations, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, www.emath.fr/cocv/*, **3**, 1998, 97-131.

[4] O.Yu. Imanuvilov : Remarks on exact controllability for Navier-Stokes equations, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, www.emath.fr/cocv/*, **6**, 2001, 39-72.

[5] O.Yu. Imanuvilov, J.-P. Puel : Global Carleman Estimates for Weak Solutions of Elliptic Nonhomogeneous Dirichlet Problems, IMRN 2003, no. 16, 883-913.

[6] O.Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto : Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, UTMS 98-46.

[7] G. Lebeau, L. Robbiano : Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. Partial Differential Equations, **30**, (1995), 335-357.

[8] J.-P. Puel : Une approche non classique d'un problème d'assimilation de données, Note aux C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 334 (2002)

[9] M. Taylor : *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE* Birkhäuser, Berlin, 1991.