



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz

X ECOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2002-2003

Dietrich Häfner et Jean-Philippe Nicolas

Théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac sans masse dans la métrique de Kerr

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° XXIII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A23_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Théorie de la diffusion pour l'équation de Dirac sans masse dans la métrique de Kerr

Dietrich HÄFNER & Jean-Philippe NICOLAS

*M.A.B., UMR CNRS n° 5466, Institut de Mathématiques de Bordeaux,
Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.*

courriel : hafner@math.u-bordeaux.fr, nicolas@math.u-bordeaux.fr

Résumé

Pour l'équation de Dirac sans masse à l'extérieur d'un trou noir de Kerr lent nous démontrons la complétude asymptotique. Nous introduisons une nouvelle tétrade de Newman-Penrose pour laquelle l'expression de l'équation ne contient pas de termes à longue portée artificiels. La technique principale utilisée est une estimation de Mourre. La géométrie proche de l'horizon exige d'appliquer une transformation unitaire avant de se retrouver dans une situation dans laquelle le générateur de dilatations est un bon opérateur conjugué. Les résultats sont réinterprétés de façon géométrique comme solution d'un problème de Goursat dans la compactification de Penrose de l'extérieur du trou noir.

1 Introduction

Les trous noirs sont les objets cosmologiques pour lesquels les effets de gravitation sont les plus extrêmes. Dans les années 1960 et 1970 quelques phénomènes importants liés aux trous noirs ont été découverts, parmi lesquels la radiation de Hawking et la superradiance. Une compréhension mathématique complète de ces phénomènes passe nécessairement par une analyse détaillée des propriétés de diffusion des champs classiques et quantiques dans des espaces-temps de type trou noir.

La première et la plus simple solution des équations d'Einstein à décrire un trou noir est la métrique de Schwarzschild. Elle décrit un espace-temps asymptotiquement plat qui ne contient qu'un trou noir statique, non chargé et à symétrie sphérique. Il existe aujourd'hui un grand nombre de résultats sur la théorie de la diffusion pour des équations de champ dans la métrique de Schwarzschild (voir A. Bachelot [2, 3], A. Bachelot et A. Motet-Bachelot [7], S. Debièvre, P. Hislop and I.M. Segal [9], J. Dimock [10], J. Dimock and B.S. Kay [11, 13], W.M. Jin [23], F. Melnyk [25], J.-P. Nicolas [28, 29], A. Sá Barreto and M. Zworski [34]). Ces théories classiques ont été utilisées ensuite pour développer des théories quantiques. Des descriptions mathématiques précises de certains effets quantiques, en particulier de l'effet Hawking par A. Bachelot, ont été obtenues (voir A. Bachelot [4, 5, 6], J. Dimock and B.S. Kay [12], F. Melnyk [26]).

La métrique de Kerr est une généralisation de la métrique de Schwarzschild. Il s'agit d'une solution des équations d'Einstein qui décrit des trous noirs en rotation. Comme des objets cosmologiques sont en général en rotation, ce modèle d'un trou noir semble plus réaliste que la métrique de Schwarzschild. L'analyse des propriétés de diffusion des champs dans cette géométrie rencontre trois difficultés qui sont absentes dans le cas de Schwarzschild :

1. Moins de symétrie. Ceci a deux conséquences :

1.1 Grâce à la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild on peut appliquer des méthodes de perturbation à trace. Ceci n'est plus possible dans le cadre de la métrique de Kerr et nous devons recourir à une estimation de Mourre.

1.2 Des métriques qui sont solutions de l'équation d'Einstein et qui sont asymptotiquement plates sont des perturbations en $\frac{1}{r}$ à l'infini de la métrique de Minkowski. La situation pour

des opérateurs à masse nulle est en général meilleure. Dans la métrique de Schwarzschild il suffit de diagonaliser l’opérateur et d’introduire la “bonne” variable radiale pour éliminer des perturbations à longue portée artificielles. La situation dans la métrique de Kerr exige une meilleure compréhension a priori de l’évolution pour éliminer ces termes.

2. L’évolution peut être comprise comme une évolution sur une variété riemannienne avec deux bouts. Le bout qui représente l’horizon est exponentiellement grand. Dans ce contexte le générateur de dilatations n’est pas un bon opérateur conjugué pour l’hamiltonien.
3. L’extérieur du trou noir de Kerr n’est pas stationnaire, i.e. il n’y a pas de champ de Killing global de type temps. Pour les équations de spin entier ceci entraîne qu’il n’y a pas de quantité positive conservée. On appelle ce phénomène la superradiance.

Des études analytiques de propagation des champs dans la géométrie de Kerr sont rares. En particulier la compréhension de la superradiance par une théorie de la diffusion dépendante du temps est un problème majeur ouvert. Nous mentionnons le travail fondamental de S. Chandrasekhar (voir [8]) pour la théorie de la diffusion indépendante du temps. En ce qui concerne la théorie de la diffusion dépendante du temps l’article [20] peut être compris comme un premier pas vers la géométrie de Kerr. A notre connaissance le seul résultat sur la théorie de la diffusion dépendante du temps pour une équation de champ dans la métrique de Kerr est [21]; il s’agit d’un résultat de complétude asymptotique pour l’équation de Klein-Gordon après restriction aux modes non superradiants. La troisième difficulté est alors évitée.

Dans cet exposé nous présentons un résultat de complétude asymptotique pour l’équation de Dirac sans masse dans la métrique de Kerr. Les deux premières difficultés mentionnées sont alors présentes, mais pas la troisième grâce à la conservation d’une norme L^2 pour l’équation de Dirac.

Parmi les travaux analytiques sur l’équation de Dirac dans cette géométrie nous citons l’analyse de l’évolution dans des espaces de Sobolev et de Sobolev à poids par J.-P. Nicolas (voir [30]) et un papier de F. Finster, N. Kamran, J. Smoller et S.-T. Yau [14] sur la décroissance en temps des champs de Dirac.

Cet exposé est organisé de la façon suivante :

- La section 2 donne une introduction détaillée à la métrique de Kerr et à l’équation de Dirac associée. Nous expliquons le choix de la tétrade de Newman-Penrose qui évite des perturbations à longue portée artificielles.
- Dans la section 3 nous présentons nos résultats principaux. Il s’agit de l’existence de la vitesse asymptotique, d’une description de son spectre ainsi que des résultats de complétude asymptotique pour deux types de dynamiques asymptotiques : des profils asymptotiques ainsi que des opérateurs de type Dirac.
- Nous donnons quelques éléments de la démonstration dans la section 4.
- La section 5 est dédiée à une interprétation géométrique de nos résultats. Les opérateurs d’onde inverses sont compris comme des opérateurs de trace sur des hypersurfaces nulles au bord de la compactification de Penrose de l’extérieur du trou noir. La théorie de la diffusion complète donne une solution au problème de Goursat sur la compactification de l’extérieur avec des données spécifiées sur la réunion de deux hypersurfaces nulles.

L’exposé est basé sur l’article [22], où on peut trouver des explications plus détaillées ainsi que la démonstration complète des résultats.

Notations.

Nous allons utiliser les indices abstraits de R. Penrose et W. Rindler [32]. Les indices abstraits sont notés par des lettres latines, majuscules pour les spineurs, minuscules pour les vecteurs. Ces indices indiquent la nature de l’objet, ils ne font pas référence à une base. Les indices concrets

qui font référence à une base sont notés par des lettres latines en gras. Nous notons \mathbb{S}^A le fibré spinoriel et $\mathbb{S}^{A'}$ le même fibré avec structure complexe opposée. Pour une variété Y nous notons $C_\infty(Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ sur Y qui tendent vers zéro à l'infini.

2 La métrique de Kerr et l'équation de Dirac associée

2.1 La métrique de Kerr

L'espace-temps de Kerr est décrit en termes de coordonnées de Boyer-Lindquist comme la variété $\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r \times S_\omega^2$ équipée de la métrique lorentzienne :

$$g = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.1)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2,$$

$$\sigma^2 = (r^2 + a^2) \rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta,$$

où M est la masse du trou noir et a son moment angulaire par unité de masse. Il s'agit d'une solution exacte de l'équation d'Einstein. Notons d'abord que l'espace-temps de Kerr possède deux champs de Killing qui sont donnés par ∂_t et ∂_φ .

Nous considérons ici le cas de la métrique de Kerr à rotation lente, i.e. $0 < |a| < M$. Dans ce cas la métrique de Kerr décrit des trous noirs en rotation. Δ possède deux racines qui sont données par

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2},$$

ainsi on a deux horizons, les sphères $\{r = r_-\}$ et $\{r = r_+\}$. On verra plus tard que les singularités de la métrique à $\{r = r_\pm\}$ sont des singularités de coordonnées. Néanmoins les coordonnées utilisées ici sont des coordonnées qui sont bien adaptées à un observateur qui est loin du trou noir, comme par exemple un télescope sur la terre. En effet un tel observateur ne voit pas un objet traverser l'horizon du trou noir. L'horizon est pour lui une région asymptotique.

Par la suite nous considérons uniquement la région $\{r > r_+\}$, qu'on appelle le bloc $I : \mathcal{B}_I$. Une caractéristique de la métrique de Kerr est l'existence d'une ergosphère. Il s'agit d'une région dans laquelle le champ ∂_t devient de type espace :

$$\mathcal{E} = \left\{ (t, r, \theta, \varphi) ; r_+ < r < M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right\}.$$

Plus généralement le bloc I de la métrique de Kerr n'est pas stationnaire, i.e. il n'y a pas de champ de Killing global de type temps.

La métrique de Kerr est de type Petrov D (voir [33] ou [31]). Ceci signifie que le tenseur de Weyl possède deux racines doubles en chaque point. Ces racines qu'on appelle les directions principales nulles du tenseur de Weyl sont données par les champs de vecteurs

$$V^\pm = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.2)$$

Comme V^+ and V^- sont des directions nulles répétées du tenseur de Weyl, leurs courbes intégrales sont des géodésiques nulles par le théorème de Goldberg-Sachs (voir par exemple [31]). Nous allons appeler les courbes intégrales de V^+ (resp. V^-) les géodésiques principales nulles sortantes (rentrantes).

Nous terminons cette sous-section en remarquant que le champ ∇^{at} est de type temps dans le bloc I . Les surfaces de niveau de t , notées Σ_t , sont des surfaces de Cauchy et on obtient un feuilletage de \mathcal{M} par des surfaces de Cauchy $\{\Sigma_t\}_t$. \mathcal{M} est donc globalement hyperbolique et admet conséquemment une structure spinorielle (voir par exemple R.P. Geroch [17, 18, 19]).

2.2 L'équation de Dirac

L'équation de Dirac est donnée par

$$\begin{cases} \nabla^{AA'} \phi_A = \mu \chi^{A'}, \\ \nabla^{AA'} \chi_{A'} = \mu \phi^A, \quad \mu = \frac{m}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $m \geq 0$ est la masse du champ. Dans le cas sans masse (2.3) se réduit à l'équation de Weyl

$$\nabla^{AA'} \phi_A = 0, \quad (2.4)$$

puisque l'équation pour χ est le complexe conjugué de cette équation. L'équation (2.4) est l'objet de cet exposé.

Pour l'équation de Dirac (2.3) la charge totale du champ en dehors du trou noir est constante en temps (voir par exemple [30]) :

$$C(t) = \int_{\Sigma_t} (\phi_A \bar{\phi}_{A'} + \bar{\chi}_A \chi_{A'}) T^{AA'} d\text{Vol} = \text{const}. \quad (2.5)$$

Ici T^a est le champ de vecteurs normal à Σ_t dirigé vers le futur, normalisé tel que $T_a T^a = 2$, et $d\text{Vol}$ est la forme de volume induite sur Σ_t par la métrique de Kerr. La quantité $C(t)$ définit une norme pour $(\phi_A, \chi_{A'})$ sur Σ_t .

2.2.1 Le formalisme de Newman-Penrose

Utilisant le formalisme de Newman-Penrose, l'équation (2.4) peut être exprimée comme un système d'équations aux dérivées partielles par rapport à une base de coordonnées. Ce formalisme est basé sur le choix d'une tétrade nulle, i.e. un ensemble de quatre champs de vecteurs nuls l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a , les deux premiers réels et dirigés vers le futur, \bar{m}^a le complexe conjugué de m^a , tel que m^a est orthogonal à l^a, n^a :

$$l_a l^a = n_a n^a = m_a m^a = l_a m^a = n_a m^a = 0. \quad (2.6)$$

On dit que la tétrade est normalisée si en plus :

$$l_a n^a = 1, \quad m_a \bar{m}^a = -1. \quad (2.7)$$

Les vecteurs l^a, n^a décrivent des directions de scattering, m^a a usuellement des courbes intégrales bornées au moins spatialement. Une fois une tétrade de Newman-Penrose fixée il y a une base spinorielle associée, unique à signe près, telle que :

$$o^A \bar{o}^{A'} = l^a, \quad \iota^A \bar{\iota}^{A'} = n^a, \quad o^A \bar{\iota}^{A'} = m^a, \quad \iota^A \bar{o}^{A'} = \bar{m}^a, \quad o_A \iota^A = 1. \quad (2.8)$$

Nous désignons par ϕ_0 et ϕ_1 les composantes de ϕ_A dans (o^A, ι^A) .

$$\phi_0 = \phi_A o^A, \quad \phi_1 = \phi_A \iota^A.$$

L'équation de Weyl devient simplement :

$$\begin{cases} n^{\mathbf{a}} \partial_{\mathbf{a}} \phi_0 - m^{\mathbf{a}} \partial_{\mathbf{a}} \phi_1 + (\mu - \gamma) \phi_0 + (\tau - \beta) \phi_1 = 0, \\ l^{\mathbf{a}} \partial_{\mathbf{a}} \phi_1 - \bar{m}^{\mathbf{a}} \partial_{\mathbf{a}} \phi_0 + (\alpha - \pi) \phi_0 + (\varepsilon - \tilde{\rho}) \phi_1 = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Les μ, γ etc. sont des coefficients de spin, par exemple $\mu = -\bar{m}^a \delta n^a$; $\delta = m^a \nabla_a$.

2.2.2 Le choix de la tétrade de Newman-Penrose

La tétrade qui est le plus souvent utilisée est celle de Kinnersley (voir [24]). Le choix de cette tétrade vient de la structure de type D de l'espace-temps de Kerr. Les deux vecteurs réels sont choisis le long des directions principales nulles V^+ et V^- :

$$l^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \lambda V^+, \quad n^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \mu V^- \quad (2.10)$$

et la condition de normalisation $l_a n^a = 1$ donne

$$\lambda \mu g(V^+, V^-) = 1,$$

donc,

$$\lambda \mu \frac{2\rho^2}{\Delta} = 1.$$

Le choix de Kinnersley était de prendre $\lambda = 1$. Une fois les directions l^a et n^a choisies, le champ de vecteurs complexe m^a est déterminé de façon unique à un facteur de phase $e^{i\theta}$ près. Nous allons prendre ici $\lambda = \mu$ plutôt que $\lambda = 1$ afin d'avoir un comportement équivalent des vecteurs l^a, n^a près de l'horizon. On obtient :

$$l^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{\sqrt{2\Delta\rho^2}} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} + \Delta \frac{\partial}{\partial r} + a \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (2.11)$$

$$n^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{\sqrt{2\Delta\rho^2}} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \frac{\partial}{\partial r} + a \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (2.12)$$

$$m^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{p\sqrt{2}} \left[ia \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (2.13)$$

$$\bar{m}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{\bar{p}\sqrt{2}} \left[-ia \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (2.14)$$

où $p = r + ia \cos \theta$. Nous introduisons une ‘‘bonne’’ variable radiale pour la théorie de la diffusion : une variable r_* (voir [8]) telle que les géodésiques principales nulles ont une vitesse ± 1 par rapport à cette coordonnée, i.e. telle que

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}. \quad (2.15)$$

A l'extérieur d'un trou noir de Kerr on obtient :

$$r_* = r + M \text{Log} (r^2 - 2Mr + a^2) + \frac{2M^2}{\sqrt{M^2 - a^2}} \text{Log} \sqrt{\frac{r - r_+}{r - r_-}} + R_0, \quad (2.16)$$

où $R_0 \in \mathbb{R}$ est arbitraire.

La mesure $d\text{Vol}$ a l'expression suivante par rapport aux coordonnées r_*, θ et φ :

$$d\text{Vol} = \sqrt{\frac{\Delta \sigma^2 \rho^2}{(r^2 + a^2)^2}} dr_* d\omega, \quad d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

On définit le ‘‘spineur à densité’’

$$\tilde{\phi}_A = \left(\frac{\Delta \sigma^2 \rho^2}{(r^2 + a^2)^2} \right)^{1/4} \phi_A. \quad (2.17)$$

L'équation de Weyl s'écrit alors :

$$\partial_t \tilde{\Phi} = i\mathcal{D}_K^K \tilde{\Phi}, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{D}_K^K = M_r D_r + M_{S^2} \mathcal{D}_{S^2} + M_\varphi D_\varphi + M_P \quad (2.19)$$

Nous allons spécifier uniquement le terme qui pose des problèmes pour la théorie de la diffusion, i.e.

$$M_{S^2} = \begin{pmatrix} \frac{(r^2+a^2)\sqrt{\Delta\rho^2}}{p\sigma^2} & \frac{ia\Delta \sin \theta}{\sigma^2} \\ -\frac{ia\Delta \sin \theta}{\sigma^2} & \frac{(r^2+a^2)\sqrt{\Delta\rho^2}}{p\sigma^2} \end{pmatrix} \simeq \frac{1}{r} \text{Id}_2 \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

À l'infini positif ($r \rightarrow +\infty$) on devra comparer $M_{S^2} \mathcal{D}_{S^2}$ à $\frac{1}{r} \mathcal{D}_{S^2}$. Notons que dans ce cas la condition de courte portée est

$$(M_{S^2} - \frac{1}{r}) \mathcal{D}_{S^2} \in O(r^{-1-\epsilon} (\frac{1}{r} \mathcal{D}_{S^2})), \quad \epsilon > 0, \quad \text{i.e.} \quad M_{S^2} - \frac{1}{r} \in O(r^{-2-\epsilon}),$$

ce qui n'est pas vérifié. Plus généralement il n'y a pas de matrice M_0 à symétrie sphérique telle que :

$$(M_{S^2} - M_0) \in O(r^{-2-\epsilon}).$$

Notons ici que ceci n'est pas lié au choix de λ, μ dans (2.10).

Pour éliminer ce problème nous allons choisir une autre tétrade.

Une fois une tétrade de Newman-Penrose choisie, le champ de vecteurs $l^a + n^a$ est un champ de vecteurs de type temps dirigé vers le futur. Par le choix de notre feuilletage Σ_t nous fixons un champ de vecteurs de type temps dirigé vers le futur, qui est le champ de vecteurs futur normal à Σ_t . L'idée est alors de poser

$$\mathbf{l}^a + \mathbf{n}^a = T^a.$$

Ceci correspond à la notion d'une tétrade adaptée au feuilletage définie dans [30]. Nous imposons maintenant qu'il n'y ait pas d'accélération dans les directions angulaires et que \mathbf{l}^a soit sortante et \mathbf{n}^a rentrante. Ceci fixe \mathbf{l}^a et \mathbf{n}^a et ensuite \mathbf{m}^a à un facteur complexe de module 1 près :

$$\mathbf{l}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{2} T^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \sqrt{\frac{\Delta}{2\rho^2}} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\Delta\rho^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2aMr}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \sqrt{\frac{\Delta}{2\rho^2}} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{n}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{2} T^a \frac{\partial}{\partial x^a} - \sqrt{\frac{\Delta}{2\rho^2}} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\Delta\rho^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2aMr}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \sqrt{\frac{\Delta}{2\rho^2}} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{m}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{\sqrt{2\rho^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\rho^2}{\sigma \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.22)$$

$$\bar{\mathbf{m}}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{\sqrt{2\rho^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\rho^2}{\sigma \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (2.23)$$

Un premier test pour déterminer s'il s'agit d'un bon choix de tétrade de Newman-Penrose consiste à calculer l'expression de la quantité positive conservée. Nous trouvons :

$$T^{\mathbf{A}\mathbf{A}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_a T^a & -\bar{\mathbf{m}}_a T^a \\ -\mathbf{m}_a T^a & \mathbf{l}_a T^a \end{pmatrix} = I,$$

ce qui est effectivement l'expression la plus simple qu'on puisse attendre. Nous calculons l'expression de l'équation de Weyl utilisant la nouvelle tétrade :

$$\partial_t \Psi = i\mathbb{D}_K \Psi, \quad (2.24)$$

$$\mathbb{D}_K = \frac{r^2 + a^2}{\sigma} \gamma D_{r_*} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} \mathbb{D}_{S^2} + A_\varphi D_\varphi + P,$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{2Mra}{\sigma^2} & \frac{i\sqrt{\Delta}}{\sigma \sin \theta} \left(\frac{\rho^2}{\sigma} - 1 \right) \\ -\frac{i\sqrt{\Delta}}{\sigma \sin \theta} \left(\frac{\rho^2}{\sigma} - 1 \right) & -\frac{2Mra}{\sigma^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$|P_{ij}(r_*)| \leq C < r_* >^{-1-\epsilon},$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} - \frac{\sqrt{\Delta}}{r^2 + a^2} \in O(r^{-3}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

L'expression exacte pour le potentiel peut être trouvée dans [22]. Le vecteur Ψ est lié au vecteur $\tilde{\Phi}$ par une transformation unitaire :

$$\Psi = \mathbf{U} \tilde{\Phi}, \quad \mathbf{U} = \sqrt{\frac{p}{2\sigma\rho}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_+} & -\frac{\bar{p}}{\rho} \frac{ia \sin \theta \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\sigma_+}} \\ \frac{ia \sin \theta \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\sigma_+}} & \frac{\bar{p}}{\rho} \sqrt{\sigma_+} \end{pmatrix},$$

où $\sigma_+ = \sigma + r^2 + a^2$. Le problème qui existait dans l'expression de l'équation de Weyl utilisant la tétrade de Kinnersley n'existe plus avec cette tétrade. En effet nous pouvons tout d'abord grâce à (2.25) comparer l'hamiltonien à un hamiltonien intermédiaire à symétrie sphérique dont il est une perturbation à courte portée. Ensuite la partie angulaire peut être traitée comme un potentiel.

3 Résultats principaux

Dans cette section nous présentons les résultats principaux de ce travail.

Soient $\kappa_+ := \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2}$, $\theta_0, \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, θ_0 valant zéro dans un voisinage de 0 et 1 loin de l'origine, $\theta_1(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\theta_0(x)$. Nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= L^2((\mathbb{R} \times S^2); dr_* d\omega; \mathbb{C}^2), \\ \mathbb{D}_H &= \gamma D_{r_*} - \frac{a}{r_+^2 + a^2} D_\varphi, \\ \mathbb{D}_\infty &= \gamma D_{r_*}, \\ \mathbb{D}_H &= \gamma D_{r_*} + e^{-\kappa_+ |r_*| \theta_0(r_*)} \mathbb{D}_{S^2} - \frac{a}{r_+^2 + a^2} D_\varphi, \\ \mathbb{D}_\infty &= \gamma D_{r_*} + \frac{\theta_1(r_*)}{|r_*|} \mathbb{D}_{S^2}. \end{aligned}$$

\mathbb{D}_H et \mathbb{D}_∞ possèdent les mêmes espaces de solutions rentrantes (resp. sortantes) :

$$\mathcal{H}^- = \{(\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}; \psi_1 = 0\} \text{ (resp. } \mathcal{H}^+ = \{(\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}; \psi_0 = 0\}).$$

$\mathbb{D}_K, \mathbb{D}_H, \mathbb{D}_\infty$ sont autoadjoints et leurs spectres sont purement absolument continus. Le premier résultat concerne la vitesse asymptotique :

Théorème 1 (Vitesse asymptotique). *Il existe des opérateurs a.a. bornés P^\pm , P_H^\pm , P_∞^\pm t.q. pour tout $J \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned} J(P^\pm) &= s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_K} J\left(\frac{r^*}{t}\right) e^{it\mathbb{D}_K}, \\ J(P_H^\pm) &= s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_H} J\left(\frac{r^*}{t}\right) e^{it\mathbb{D}_H}, \\ J(P_\infty^\pm) &= s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_\infty} J\left(\frac{r^*}{t}\right) e^{it\mathbb{D}_\infty}, \\ J(\mp\gamma) &= s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_H} J\left(\frac{r^*}{t}\right) e^{it\mathbb{D}_H} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_\infty} J\left(\frac{r^*}{t}\right) e^{it\mathbb{D}_\infty}. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\sigma(P^+) = \sigma(P_H^+) = \sigma(P_\infty^+) = \{-1, 1\}.$$

Soit $P_{\mathcal{H}^\pm}$ la projection sur \mathcal{H}^\pm .

Théorème 2 (Profils asymptotiques). 1. *Les opérateurs d'onde classiques définis par les limites fortes*

$$\mathfrak{W}_H^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_K} e^{it\mathbb{D}_H} P_{\mathcal{H}^\mp}, \quad (3.1)$$

$$\mathfrak{W}_\infty^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_K} e^{it\mathbb{D}_\infty} P_{\mathcal{H}^\pm}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathfrak{W}}_H^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_H} e^{it\mathbb{D}_K} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(P^\pm), \quad (3.3)$$

$$\tilde{\mathfrak{W}}_\infty^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_\infty} e^{it\mathbb{D}_K} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(P^\pm) \quad (3.4)$$

existent et satisfont

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{W}}_H^\pm &= (\mathfrak{W}_H^\pm)^*, \quad \tilde{\mathfrak{W}}_\infty^\pm = (\mathfrak{W}_\infty^\pm)^*, \\ \tilde{\mathfrak{W}}_H^\pm \mathfrak{W}_H^\pm + \tilde{\mathfrak{W}}_\infty^\pm \mathfrak{W}_\infty^\pm &= \mathfrak{W}_H^\pm \tilde{\mathfrak{W}}_H^\pm + \mathfrak{W}_\infty^\pm \tilde{\mathfrak{W}}_\infty^\pm = \text{Id}_{\mathcal{H}}, \\ \ker(\mathfrak{W}_H^\pm) &= \mathcal{H}^\pm, \quad \ker(\mathfrak{W}_\infty^\pm) = \mathcal{H}^\mp, \quad \text{ran}(\tilde{\mathfrak{W}}_H^\pm) = \mathcal{H}^\mp, \quad \text{ran}(\tilde{\mathfrak{W}}_\infty^\pm) = \mathcal{H}^\pm. \end{aligned}$$

2. Si on pose :

$$\begin{aligned} W^+ : \quad \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+ &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ ((\psi_0, 0), (0, \psi_1)) &\longmapsto \mathfrak{W}_H^+(\psi_0, 0) + \mathfrak{W}_\infty^+(0, \psi_1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} W^- : \quad \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- &\longrightarrow \mathcal{H} \\ ((0, \psi_1), (\psi_0, 0)) &\longmapsto \mathfrak{W}_H^-(0, \psi_1) + \mathfrak{W}_\infty^-(\psi_0, 0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\tilde{W}^+ : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+, \quad \tilde{W}^+ \Psi = \left(\tilde{\mathfrak{W}}_H^+ \Psi, \tilde{\mathfrak{W}}_\infty^+ \Psi \right), \quad (3.7)$$

$$\tilde{W}^- : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \quad \tilde{W}^- \Psi = \left(\tilde{\mathfrak{W}}_H^- \Psi, \tilde{\mathfrak{W}}_\infty^- \Psi \right), \quad (3.8)$$

alors W^\pm sont des isométries et satisfont :

$$\tilde{W}^+ W^+ = \text{Id}_{\mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+}, \quad \tilde{W}^- W^- = \text{Id}_{\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-}, \quad W^+ \tilde{W}^+ = W^- \tilde{W}^- = \text{Id}_{\mathcal{H}}.$$

Théorème 3 (Dynamiques de comparaison de type Dirac). *Les opérateurs d'onde classiques définis par les limites fortes*

$$\Omega_H^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_K} e^{it\mathbb{D}_H} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(P_H^\pm), \quad (3.9)$$

$$\Omega_\infty^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_K} e^{it\mathbb{D}_\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(P_\infty^\pm), \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Omega}_H^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_H} e^{it\mathbb{D}_K} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(P^\pm), \quad (3.11)$$

$$\tilde{\Omega}_\infty^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbb{D}_\infty} e^{it\mathbb{D}_K} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(P^\pm), \quad (3.12)$$

existent et satisfont

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_H^\pm &= (\Omega_H^\pm)^*, \quad \tilde{\Omega}_\infty^\pm = (\Omega_\infty^\pm)^*, \\ \tilde{\Omega}_H^\pm \Omega_H^\pm + \tilde{\Omega}_\infty^\pm \Omega_\infty^\pm &= \Omega_H^\pm \tilde{\Omega}_H^\pm + \Omega_\infty^\pm \tilde{\Omega}_\infty^\pm = \text{Id}_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

4 Éléments de la démonstration

Nous allons expliquer dans ce paragraphe quelques idées de la démonstration. On commence par démontrer une version du théorème 3 qui utilise des troncatures, plus précisément nous allons démontrer l'existence des limites

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-it\mathbb{D}} j_- e^{it\mathbb{D}_K} \quad \text{etc.},$$

où j_- est une fonction lisse qui vaut 1 pour $x \leq -1$ et zéro pour $x \geq 1$. Supposons un moment qu'un tel théorème soit déjà établi. Nous en déduisons une version avec troncatures du théorème 2 utilisant [29]. Ceci nous donne le théorème 1. En effet la démonstration est élémentaire pour les dynamiques \mathbb{D}_H et \mathbb{D}_∞ . Pour les autres dynamiques nous utilisons les résultats de complétude asymptotique déjà établis. Nous en déduisons les théorèmes 2 et 3.

Il s'agit alors de démontrer une version du théorème 3 avec troncatures. Nous comparons d'abord \mathbb{D}_K à un opérateur intermédiaire \mathbb{D}_K^0 à symétrie sphérique. Dans un deuxième temps nous comparons \mathbb{D}_K^0 à $\mathbb{D}_H, \mathbb{D}_\infty$. Ce deuxième pas est facile. Après diagonalisation il s'agit de l'opérateur de Dirac unidimensionnel avec potentiel. Nous allons alors nous concentrer sur la première étape. La démonstration passe par une estimation de Mourre :

4.1 Rappel de la théorie de Mourre

Soit H l'hamiltonien qu'on veut étudier, H autoadjoint sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On suppose l'existence d'un autre opérateur autoadjoint A tel que :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} H \in C^2(A), \text{ i.e.} \\ \exists z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H) \ s \mapsto e^{isA}(z - H)^{-1}e^{-isA} \\ \text{de classe } C^2 \text{ pour} \\ \text{la topologie forte de } B(\mathcal{H}) \\ \text{+ gap dans le spectre de } H \end{array} \right.$$

ou

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{itA} : D(H) \rightarrow D(H), \\ [iH, A] : D(H) \rightarrow \mathcal{H} \text{ borné,} \\ [iA, [iA, H]] : D(H) \rightarrow D(H)^* \text{ borné} \end{array} \right.$$

et

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1}_\Delta(H)[iH, A]\mathbf{1}_\Delta(H) \geq \mu\mathbf{1}_\Delta(H) + K, \\ \mu > 0, K \text{ compact} \end{array} \right.$$

Alors si $\Delta \cap \sigma_{pp}(H) = \emptyset$:

$$\forall s > \frac{1}{2}, \phi \in \mathcal{H} \int_1^\infty \| \langle A \rangle^{-s} \mathbf{1}_\Delta(H) e^{-itH} \phi \|^2 dt \leq C \|\phi\|^2.$$

La condition importante est la condition (II), qui dit que A est une observable qui croît le long de l'évolution. (I) et (I') sont des conditions techniques. (I) est décrit dans [1], alors que (I') est la condition initiale de Mourre (voir [27]).

4.2 Modèle jouet

L'évolution peut être décrite comme une évolution sur une variété riemannienne avec deux bouts. Nous allons considérer uniquement le bout qui correspond à l'horizon du trou noir. C'est ici que le choix de l'opérateur conjugué est le plus difficile. Il s'agit d'un bout de la variété qui est exponentiellement grand. Le modèle jouet est le suivant :

$$H = \gamma D_r + e^{\eta r} \mathcal{D}_{S^2} + C \quad \mathbf{R}_- \times S^2; \eta > 0, C \in \mathbb{R}.$$

Nous traitons d'abord le cas $C = 0$. L'opérateur conjugué le plus utilisé est le générateur de dilatations $A = \frac{1}{2}(rD_r + D_r r)$. On fait un essai

$$[iH, A] = \gamma D_r - \eta r e^{\eta r} \mathcal{D}_{S^2}$$

et on voit qu'aucune des conditions n'est vérifiée ! Grâce à la symétrie sphérique nous pouvons diagonaliser en utilisant des harmoniques sphériques à poids spinoriel :

$$H^{nl} = \gamma D_r + e^{\eta r} (l + \frac{1}{2}) \tau,$$

où τ est une matrice constante. Maintenant on peut établir une estimation de Mourre parce que $e^{\eta r} \tau$ est un potentiel à très courte portée. Nous pouvons utiliser par exemple que $e^{\eta r} \tau (l + \frac{1}{2}) \chi(H^{nl})$ est compact. Si comme dans le cas de la métrique de Kerr l'hamiltonien n'est pas à symétrie sphérique nous ne pouvons pas procéder de cette façon. Mais nous allons montrer que l'estimation qu'on peut établir, pour l'hamiltonien intermédiaire à symétrie sphérique, sur chaque harmonique sphérique est en fait uniforme en n, l . Pour ceci nous introduisons la transformation unitaire suivante :

$$\begin{aligned} U &:= e^{-\eta^{-1} i D_r \ln |\mathcal{D}_{S^2}|}, \\ \hat{H} &= U H U^* = \gamma D_r + e^{\eta r} \frac{\mathcal{D}_{S^2}}{|\mathcal{D}_{S^2}|}, \\ \hat{H}^{nl} &= \gamma D_r + e^{\eta r} \text{sign}(l + \frac{1}{2}) \tau. \end{aligned}$$

Par les arguments déjà invoqués $A^{nl} = \frac{1}{2}(rD_r + D_r r)$ est un bon opérateur conjugué. L'estimation de Mourre qu'on obtient pour (H^{nl}, A^{nl}) est uniforme en n, l parce que les deux opérateurs ne dépendent de n, l que par le signe de $(l + \frac{1}{2})$! Nous prenons alors $\hat{A} = U^* A U$ comme opérateur conjugué. Le cas où C est différent de zéro est sur chaque harmonique sphérique similaire au cas de l'équation de Dirac chargée dans la métrique de Reissner-Nordström. Dans [25] l'opérateur conjugué A est remplacé par $A + \gamma C r$ et nous modifions A de la même façon ici. On conjugue ensuite par la transformation unitaire pour obtenir le bon opérateur conjugué.

Remarque 4.1. 1) \hat{A} est similaire à un opérateur introduit par Froese, Hislop pour le laplacien sur des variétés riemanniennes avec un bout exponentiellement grand (voir [15]). Ils écrivent le laplacien comme somme de deux opérateurs, une partie en r et une partie sur la sphère. Ils utilisent ensuite explicitement la positivité de chaque partie. Leur argument n'est donc pas applicable au cas de Dirac.

2) On ne peut pas passer par le carré et utiliser ensuite le résultat de Froese, Hislop et des résultats concernant l'estimation de Mourre pour la racine d'un opérateur (voir [9], [21]). Pour des bouts exponentiellement grand, \mathcal{D}^2 n'est pas une perturbation du laplacien.

3) \mathcal{D}_K n'a pas de gap dans le spectre et la vérification de l'hypothèse $e^{it\hat{A}} : D(\mathcal{D}_K) \rightarrow D(\mathcal{D}_K)$ ne semble pas tout à fait immédiate. On peut appliquer [16, lemma 2] :

$$\mathcal{D}_K \in C^1(\hat{A}), [i\mathcal{D}_K, \hat{A}] : D(\mathcal{D}_K) \rightarrow \mathcal{H} \Rightarrow e^{it\hat{A}} : D(\mathcal{D}_K) \rightarrow D(\mathcal{D}_K).$$

4) L'absence de valeurs propres suit d'un résultat de séparation de variables de Teukolski (voir [35]).

5 Interprétation géométrique

5.1 Théorème 2 en termes de géodésiques principales nulles

Nous introduisons les champs de vecteurs nuls v^\pm générateurs de géodésiques principales nulles, normalisés tels que les flots préservent le feuilletage $\{\Sigma_t\}_t$:

$$v^\pm = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} V^\pm = \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{r^2 + a^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

On introduit également la partie spatiale de v^\pm :

$$w^\pm = \pm \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{a}{r^2 + a^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Soit F_{w^\pm} le flot de w^\pm sur Σ_0 , $P_N = \gamma D_{r_*} - \frac{a}{r^2 + a^2} D_\varphi$. On a :

$$\left(e^{itP_N} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0(F_{w^-}(-t)(r_0, \theta_0, \varphi_0)) \\ g_1(F_{w^+}(-t)(r_0, \theta_0, \varphi_0)) \end{pmatrix}$$

On obtient

Théorème 4. *Les limites fortes*

$$\mathfrak{W}_{H,pn}^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathcal{D}_K} e^{it\mathbf{P}_N} P_{\mathcal{H}^\mp}, \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{W}_{\infty,pn}^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathcal{D}_K} e^{it\mathbf{P}_N} P_{\mathcal{H}^\pm}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{\mathfrak{W}}_{H,pn}^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbf{P}_N} e^{it\mathcal{D}_K} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(P^\pm), \quad (5.3)$$

$$\tilde{\mathfrak{W}}_{\infty,pn}^\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-it\mathbf{P}_N} e^{it\mathcal{D}_K} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(P^\pm) \quad (5.4)$$

existent et satisfont les mêmes propriétés que les opérateurs d'onde du théorème 2. Les opérateurs d'onde globaux correspondants sont :

$$\begin{aligned} W_{pn}^+ : \quad \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+ &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ ((\psi_0, 0), (0, \psi_1)) &\longmapsto \mathfrak{W}_{H,pn}^+(\psi_0, 0) + \mathfrak{W}_{\infty,pn}^+(0, \psi_1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} W_{pn}^- : \quad \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- &\longrightarrow \mathcal{H} \\ ((0, \psi_1), (\psi_0, 0)) &\longmapsto \mathfrak{W}_{H,pn}^-(0, \psi_1) + \mathfrak{W}_{\infty,pn}^-(\psi_0, 0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\tilde{W}_{pn}^+ : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+, \quad \tilde{W}_{pn}^+ \Psi = \left(\tilde{\mathfrak{W}}_{H,pn}^+ \Psi, \tilde{\mathfrak{W}}_{\infty,pn}^+ \Psi \right), \quad (5.7)$$

$$\tilde{W}_{pn}^- : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \quad \tilde{W}_{pn}^- \Psi = \left(\tilde{\mathfrak{W}}_{H,pn}^- \Psi, \tilde{\mathfrak{W}}_{\infty,pn}^- \Psi \right). \quad (5.8)$$

5.2 Les opérateurs d'onde inverses à l'horizon comme opérateurs de trace

Comme nous l'avons déjà indiqué dans la première section, les singularités pour $\Delta = 0$ sont en fait des singularités de coordonnées. Pour voir ceci nous introduisons des coordonnées qu'on appelle les coordonnées de Kerr-* ($t^*, r, \theta, \varphi^*$). Elles sont choisies telles que les équations des géodésiques principales nulles rentrantes deviennent

$$\dot{r} = -1, \dot{t}^* = \dot{\varphi}^* = \dot{\theta} = 0.$$

Un calcul explicite montre que g se prolonge de façon lisse à travers $\{r = r_+\}$ et nous définissons l'horizon futur :

$$\mathfrak{H}^+ := \mathbb{R}_{t^*} \times \{r = r_+\} \times S_{\theta, \varphi^*}^2.$$

Il s'agit d'une hypersurface nulle. Les coordonnées *-Kerr ($t^*, r, \theta, \varphi^*$) sont construites de la même façon utilisant les géodésiques principales nulles sortantes. Ceci donne une définition analogue de l'horizon passé (\mathfrak{H}^-). Afin de mettre les deux systèmes de coordonnées ensemble on définit les coordonnées de Kruskal-Boyer-Lindquist :

$U = e^{-\kappa_+ t^*}, V = e^{\kappa_+ t^*}, \varphi^\sharp = \varphi - \frac{a}{r_+^2 + a^2} t^*$. Les coordonnées de Kruskal-Boyer-Lindquist nous donnent une description globale de l'horizon $\mathfrak{H} := ([0, \infty[_U \times \{0\}_V \times S_{\theta, \varphi^\sharp}^2) \cup (\{0\}_U \times [0, \infty[_V \times S_{\theta, \varphi^\sharp}^2)$ (voir figure 1). Toutes ces coordonnées sont expliquées en détail dans [31].

Nous pouvons appliquer le théorème de Leray pour voir que le spineur Φ_A solution de (2.4) possède une trace sur \mathfrak{H}^\pm . Par des calculs explicites nous démontrons que la limite

$\lim_{r \rightarrow r_+} \Psi_0(\gamma_{V, \theta, \varphi^\sharp}^-(r)) =: \Psi_0|_{\mathfrak{H}^+}(0, V, \theta, \varphi^\sharp)$ existe et que $\lim_{r \rightarrow r_+} \Psi_1(\gamma_{V, \theta, \varphi^\sharp}^-(r)) = 0$, où Ψ est solution de (2.24) et $\gamma_{V, \theta, \varphi^\sharp}^-$ désigne la géodésique principale nulle rentrante qui rencontre \mathfrak{H}^+ au point $(0, V, \theta, \varphi^\sharp)$. Ceci nous permet de définir un opérateur de trace :

Définition 5.1.

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{H}^+}^+ : \quad \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\Sigma_0, \mathbb{C}^2) & \rightarrow & C^\infty(\mathfrak{H}^+, \mathbb{C}) \\ \Psi_{\Sigma_0} & \mapsto & \Psi_0|_{\mathfrak{H}^+}. \end{array}$$

$\mathcal{T}_{\mathfrak{H}^-}^-$ est défini de façon analogue utilisant les géodésiques sortantes. Nous définissons également un difféomorphisme $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}^\pm}^\pm : \mathfrak{H}^\pm \rightarrow \Sigma_0$ en identifiant les points le long des géodésiques rentrantes (resp. sortantes) et $\mathcal{H}_{\mathfrak{H}^\pm} := L^2(\mathfrak{H}^\pm, dVol_{\mathfrak{H}^\pm})$, où $dVol_{\mathfrak{H}^\pm}$ est l'image inverse de $dr_* d\omega$ par $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}^\pm}^\pm$.

Théorème 5. $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}^\pm}^\pm$ se prolonge en un opérateur borné de \mathcal{H} dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{H}^\pm}$ et on a : $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}^\pm}^\pm = (\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}^\pm}^\pm)^* \tilde{\mathfrak{W}}_{H,pn}^\pm$.

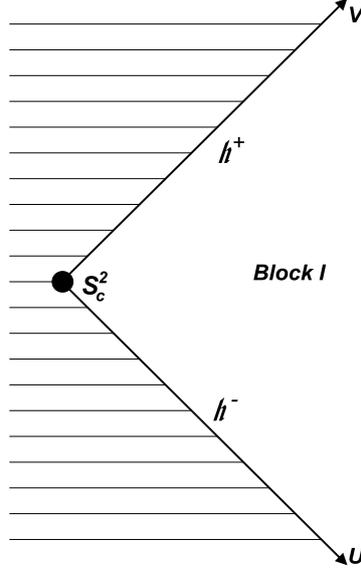


FIG. 1 – $B_I^{KBL} = [0, \infty[_U \times [0, \infty[_V \times S_{\theta, \varphi}^2$.

5.3 Les opérateurs d’onde inverses à l’infini comme opérateurs de trace

On définit $\Omega := \frac{1}{r}$. On a : $\mathcal{B}_I = \mathbb{R}_{t^*} \times]0, \frac{1}{r_+}[\Omega \times S_{\theta, \varphi}^2$ et on pose : $\hat{g} := \Omega^2 g$. Un calcul explicite montre que \hat{g} possède une extension lisse à $\mathbb{R}_{t^*} \times [0, \frac{1}{r_+}]_\Omega \times S_{\theta, \varphi}^2$ et nous définissons l’infini passé nul $\mathcal{J}^- := \mathbb{R}_{t^*} \times \{\Omega = 0\} \times S_{\theta, \varphi}^2$. Il s’agit d’une hypersurface nulle régulière pour \hat{g} . Nous définissons l’infini futur nul \mathcal{J}^+ de la même façon utilisant les coordonnées de *-Kerr. La compactification de Penrose est définie comme

$$(\bar{\mathcal{B}}_I, \hat{g}), \bar{\mathcal{B}}_I = \mathcal{B}_I \cup \mathfrak{H}^+ \cup \mathfrak{H}^- \cup S_c^2 \cup \mathcal{J}^- \cup \mathcal{J}^+$$

et malgré le nom l’espace-temps résultant n’est pas compact. Il manque trois points dans le bord : les infinis temporels futur et passé ainsi que l’infini spatial (voir figure 2).

Remarque 5.1. *L’équation de Weyl est conformément invariante :*

$$\hat{\nabla}^{AA'} \hat{\phi}_A = 0, \text{ où } \hat{\phi}_A = \Omega^{-1} \phi_A$$

et $\hat{\nabla}$ est la connexion associée à la métrique \hat{g} .

On suit maintenant la même démarche qu’à l’horizon pour définir $\mathcal{T}_J^\pm, \mathfrak{F}_J^\pm$ et \mathcal{H}_{J^\pm} . On obtient :

Théorème 6. *L’opérateur \mathcal{T}_J^\pm s’étend en un opérateur borné de \mathcal{H} dans \mathcal{H}_{J^\pm} et on a : $\mathcal{T}_J^\pm = (\mathfrak{F}_J^\pm)^* \tilde{\mathfrak{W}}_{\infty, pn}^\pm$.*

5.4 Le Problème de Goursat

Nous pouvons alors résoudre le problème de Goursat dans le compactifié du bloc I . On définit :

$$\Pi_F : \begin{array}{l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathfrak{H}^+} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{J}^+} =: \mathcal{H}_F \\ \Psi_{\Sigma_0} \mapsto (\mathcal{T}_{\mathfrak{H}^+}^+ \Psi_{\Sigma_0}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}^+}^+ \Psi_{\Sigma_0}). \end{array}$$

Théorème 7 (Problème de Goursat). *Π_F est un isomorphisme, i.e. pour tout $\Phi \in \mathcal{H}_F$ il existe un unique $\Psi \in C(\mathbb{R}_t, \mathcal{H})$ solution de (2.24) tel que $\Phi = \Pi_F \Psi(0)$.*

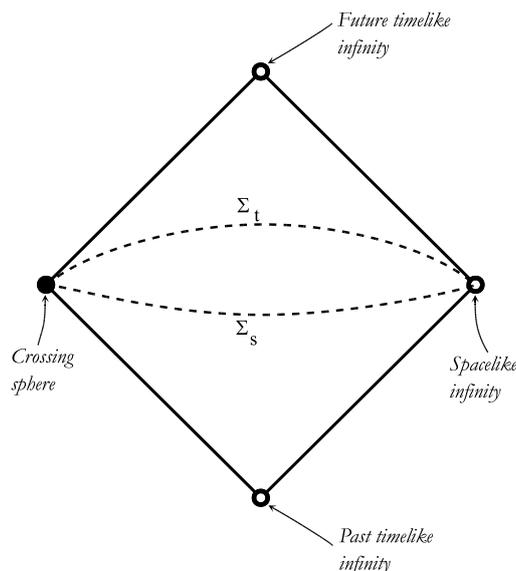


FIG. 2 – Compactification de Penrose du bloc I

Références

- [1] W. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, *C_0 -groups, commutator methods and spectral theory of N -body Hamiltonians*, Birkäuser Verlag, 1996.
- [2] A. Bachelot, *Gravitational scattering of electromagnetic field by a Schwarzschild Black hole*, Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique Théorique **54** (1991), 261–320.
- [3] A. Bachelot, *Asymptotic completeness for the Klein-Gordon equation on the Schwarzschild metric*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique **61** (1994), no. 4, 411–441.
- [4] A. Bachelot, *Quantum vacuum polarization at the black-hole horizon*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **67** (1997), no. 2, 181–222.
- [5] A. Bachelot, *The Hawking effect*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **70** (1999), no. 1, 41–99.
- [6] A. Bachelot, *Creation of fermions at the charged black-hole horizon*, Ann. Henri Poincaré **1** (2000), no. 6, 1043–1095.
- [7] A. Bachelot, A. Motet-Bachelot, *Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique **59** (1993), no. 1, 3–68.
- [8] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Oxford University Press 1983.
- [9] S. Debièvre, P. Hislop, I.M. Sigal, *Scattering theory for the wave equation on non-compact manifolds*, Rev. Math. Phys. **4** (1992), 575–618.
- [10] J. Dimock, *Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric*, Gen. Relativ. Gravitation **17** (1985), no. 4, 353–369.
- [11] J. Dimock, B.S. Kay, *Scattering for massive scalar fields on Coulomb potentials and Schwarzschild metrics*, Classical Quantum Gravity **3** (1986), 71–80.
- [12] J. Dimock, B.S. Kay, *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric I*, Ann. Phys. **175** (1987), 366–426.
- [13] J. Dimock, B.S. Kay *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric II*, J. Math. Phys. **27** (1986), 2520–2525.

- [14] F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, S.-T. Yau, *Decay Rates and Probability Estimates for Massive Dirac Particles in the Kerr-Newman Black Hole Geometry*, gr-qc 0107094.
- [15] R. Froese, P. Hislop, *Spectral analysis of second-order elliptic operators on non-compact manifolds*, *Duke Math. J.* **58**, 103-129.
- [16] V. Georgescu, C. Gérard, *On the virial theorem in quantum mechanics*, *Comm. Math. Phys.* **208** (1999), 275-281.
- [17] R.P. Geroch, *Spinor structure of space-times in general relativity I*, *J. Math. Phys.* **9** (1968).
- [18] R.P. Geroch, *Spinor structure of space-times in general relativity II*, *J. Math. Phys.* **11** (1970).
- [19] R.P. Geroch, *The domain of dependence*, *J. Math. Phys.* **11** (1970), 437-449.
- [20] D. Häfner, *Complétude asymptotique pour l'équation des ondes dans une classe d'espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats*, *Ann. Inst. Fourier* **51** (2001), 779-833.
- [21] D. Häfner, *Sur la théorie de la diffusion pour l'équation de Klein-Gordon dans la métrique de Kerr*, à paraître dans *Dissertationes Mathematicae*.
- [22] D. Häfner, J.-P. Nicolas, *Scattering of massless Dirac fields by a Kerr black hole*, preprint no. 03-06 (2003), UMR CNRS 5466, Université Bordeaux 1.
- [23] W.M. Jin, *Scattering of massive Dirac fields on the Schwarzschild black hole space-time*, *Classical Quantum Gravity* **15** (1998), no. 10, 3163-3175.
- [24] W. Kinnersley, *Type D vacuum metrics*, *J. Math. Phys.* **10** (1969), 1195-1203.
- [25] F. Melnyk, *Scattering on Reissner-Nordström metric for massive charged spin 1/2 fields*, à paraître dans *Ann. Henri Poincaré*.
- [26] F. Melnyk, *The Hawking effect for spin 1/2 fields*, M.A.B. preprint no. 03-05 (2003), UMR CNRS 5466, Université Bordeaux 1.
- [27] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, *Comm. Math. Phys.* **78** (1981), 391-408.
- [28] J.-P. Nicolas, *Non linear Klein-Gordon equation on Schwarzschild like metrics*, *J. Math. Pures Appl.* (9) **74** (1995), 35-58.
- [29] J.-P. Nicolas, *Scattering of linear Dirac fields by a spherically symmetric Black hole*, *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique Théorique* **62** (1995), no. 2, 145-179.
- [30] J.-P. Nicolas, *Dirac fields on asymptotically flat space-times*, *Dissertationes Mathematicae* **408**, 2002.
- [31] B. O'Neill, *The geometry of Kerr black holes*, A.K. Peters, Wellesley, 1995.
- [32] R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and space-time*, Vol. I & II, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press 1984 & 1986.
- [33] A.Z. Petrov, *The classification of spaces defining gravitational fields*, *Scientific Proceedings of Kazan State University (named after V.I. Ulyanov-Lenin), Jubilee (1804-1954) Collection* **114** (1954), 8, 55-69, translation by J. Jezierski and M.A.H. MacCallum, with introduction, by M.A.H. MacCallum, *Gen. Rel. Grav.* **32** (2000), 1661-1685.
- [34] A. Sá Barreto, M. Zworski, *Distribution of resonances for spherical black holes*, *Math. Res. Lett.* **4**, 103-121.
- [35] S.A. Teukolski, *Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations*, *Astrophys. J.* **185** (1973), 635-647.