SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Raphaël Danchin

Fluides incompressibles à densité variable

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° XI, 16 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A11_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Fluides incompressibles à densité variable

R. Danchin [1]

Résumé : *On généralise aux fluides incompressibles à densité variable un certain nombre de résultats bien connus pour les équations de Navier-Stokes et d'Euler incompressibles.*

Introduction

Ces dernières années, se sont multipliés les travaux consacrés aux *équations de Navier-Stokes incompressibles*

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t v + v\cdot\nabla v - \mu\Delta v + \nabla\Pi = 0,\\ \mathrm{div}\, v = 0,\end{array}\right. \qquad (NS_\mu)$$

et, dans une moindre mesure, aux *équations d'Euler incompressibles* $(E) \stackrel{\text{déf}}{=} (NS_0)$.

Ci-dessus, le paramètre $\mu \geq 0$ est appelé viscosité, et $v = v(t,x) \in \mathbb{R}^N$ (avec $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$) est le champ de vitesses. Le terme $\nabla\Pi$ (le gradient de la pression) peut être vu comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\mathrm{div}\, v = 0$.

En partant du constat qu'un fluide "réel" n'est pas homogène (i.e à densité constante), nous voulons étudier dans quelle mesure les résultats "de base" portant sur (NS_μ) et (E) peuvent être généralisés à des modèles plus "physiques".

Nous nous attachons plus précisément à la généralisation des résultats suivants :

1. (NS_μ) et (E) sont localement bien posés (uniformément en μ pour μ petit) dans H^s pour $s > 1 + N/2$ (voir par exemple [16]). Le même résultat est valable dans *l'espace de Besov* $B^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}$ (voir [21]).

2. Dans le cas $\mu > 0$, (NS_μ) est localement bien posé dans $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$ (voir [13]).

3. En dimension $N = 2$, les équations de Navier-Stokes sont globalement bien posées dans L^2. Celles d'Euler sont globalement bien posées dans H^s si $s > 2$, et dans $B^2_{2,1}$ (pour ce dernier résultat, voir [21]).

4. Critère d'explosion. Dans le cas H^s avec $s > \frac{N}{2} + 1$, les solutions de (NS_μ) et de (E) restent régulières tant que leur tourbillon reste borné (voir [2]).

5. Les solutions de (NS_μ) tendent vers celles de (E) au sens suivant :

   i) Si v_μ (resp. v) est une solution suffisamment régulière de (NS_μ) (resp. (E)) sur $[0,T]$, alors $\|v_\mu - v\|_{L^2} = \mathcal{O}(\mu)$ (voir [3]).

   ii) Pour $v_0 \in H^s$ avec $s > \frac{N}{2} + 1$ (ou $v_0 \in B^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}$), on peut trouver un intervalle $[0,T]$ et un $\mu_0 > 0$ tel que (NS_μ) avec $\mu \leq \mu_0$, (resp. (E)) ait une solution régulière v_μ (resp. v) sur $[0,T]$ et que v_μ tende vers v dans $L^\infty(0,T;H^{s'})$ pour tout $s' < s$ (voir par exemple [16]).

[1] Centre de Mathématiques, Univ. Paris 12, 61 av. du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France

iii) Si (E) a une solution $v \in C([0,T_0];H^s)$ (avec $s > \frac{N}{2}+1$) alors il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $\mu \in (0,\mu_0]$, (NS_μ) ait une solution $v_\mu \in C([0,T_0];H^s)$ sur l'intervalle $[0,T_0]$. De plus v_μ tend vers v dans $L^\infty(0,T;H^{s'})$ pour tout $s' < s$ (voir par exemple [6]).

Dans ce travail, nous nous intéressons aux fluides incompressibles *à densité variable.* De tels fluides sont décrits en tout point (t,x) par leur densité $\rho = \rho(t,x) \geq 0$ et leur champ de vitesse $u = u(t,x)$ et sont régis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho u = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u + \nabla \Pi = \rho f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \qquad (INS_\mu)$$

Dans le cas limite $\mu = 0$, on utilisera souvent la notation (IE) pour désigner (INS_0).

On suppose connus la densité initiale ρ_0 et le champ de vitesse initial u_0 (à divergence nulle) ainsi que le terme de force extérieure f. On supposera désormais que la variable d'espace x appartient à $\mathbb{A}^N$ $(N \geq 2)$ où $\mathbb{A}^N$ désigne le tore $\mathbb{T}^N$ ou l'espace entier $\mathbb{R}^N$.

L'école russe a probablement été la première à s'intéresser aux fluides incompressibles à densité variable. On dispose maintenant d'un panorama très complet sur les solutions faibles globales dans le cas visqueux : de même que dans le cas homogène, (INS_μ) a des solutions faibles globales de type L^2 (voir par exemple [1] et les références qui s'y trouvent). Des raffinements récents ont été obtenus dans [18] et dans [12].

Tous ces travaux reposent sur des méthodes de compacité et sur l'égalité suivante valable pour les solutions régulières de (INS_μ) :

$$\|\sqrt{\rho}u(t)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau = \|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{A}^N} (\rho f \cdot u)(\tau,x)\, dx\, d\tau. \qquad (1)$$

Dans le cas non visqueux, l'existence de solutions locales régulières sur des variétés compactes a été établie par J. Marsden dans [19]. Le cas de l'espace entier est traité dans [14] et [15]. Le premier travail sur les solutions fortes dans le cas visqueux (et dans un domaine borné) semble être celui de O. Ladyzhenskaya et V. Solonnikov dans [17] (voir aussi [20]). Le cas $\mathbb{R}^3$ avec données initiales dans H^3 se trouve dans [14]. Des résultats de limite non visqueuse (dans l'esprit des points 5.*i)* et 5.*ii)*) ont été obtenus dans [15].

Cependant, dans tous les travaux dont nous avons eu connaissance, le cadre fonctionnel utilisé est nettement plus régulier que celui mentionné dans les points 1 à 5, et le point 5.*iii)* n'a pas été abordé du tout.

1 Résultats

Comme nous nous limiterons toujours à des solutions *à densité strictement positive*, le changement d'inconnue $a \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{-1} - 1$ permet de se ramener à l'étude du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t a + u \cdot \nabla a = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + (1+a)(\nabla \Pi - \mu \Delta u) = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \qquad (\widetilde{INS}_\mu)$$

Le caractère incompressible du champ de vitesse assure que $\inf_x \rho(t,x) = \inf_x \rho(0,x)$ si bien que l'hypothèse $\inf_x \rho(0,x) > 0$ sera préservée au cours du temps.

Définissons maintenant l'espace fonctionnel $F^s_{T,\mu}$ dans lequel vivra une solution forte définie sur $[0,T]$ et de donnée initiale H^s :

Définition 1.1 *Pour $s \in \mathbb{R}$, $\mu \geq 0$ et $T > 0$, on pose*

$$F^s_{T,\mu} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{(a,u,\nabla\Pi) \in \widetilde{C}_T(H^s) \times \left(\widetilde{C}_T(H^s)\right)^N \times \left(\widetilde{L}^1_T(H^s)\right)^N \mid \mu u \in \left(\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})\right)^N\right\},$$

muni de la norme

$$\|(a,u,\nabla\Pi)\|_{F^s_{T,\mu}} \stackrel{\text{déf}}{=} \|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)} + \|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)} + \mu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})} + \|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}.$$

Lorsque $\mu = 0$, on utilisera également la notation F^s_T au lieu de $F^s_{T,\mu}$.

L'espace $\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})$ est légèrement plus gros que $L^1(0,T;H^{s+2})$ alors que $\widetilde{L}^\infty(0,T;H^s)$ est inclus dans $L^\infty(0,T;H^s)$. On a noté $\widetilde{C}_T(H^s) = \widetilde{L}^\infty_T(H^s) \cap C([0,T];H^s)$. Le lecteur trouvera plus de détails sur ces espaces dans l'appendice.

Nous pouvons maintenant énoncer l'adaptation du résultat 1 d'existence locale au cas des fluides non homogènes :

Théorème 1.2 *Soit $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$, $u_0 \in H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$ à divergence nulle, $\rho_0 > 0$ tel que $a_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_0^{-1} - 1 \in H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$, et $f \in \widetilde{L}^1_{loc}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}) \stackrel{\text{déf}}{=} \cap_{T>0}\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$. Soit $\underline{b} = 1 + \inf_x a_0(x)$.*

Il existe un temps $T > 0$ tel que (INS_μ) ait une unique solution $(\rho, u, \nabla\Pi)$ définie sur $[0,T] \times \mathbb{A}^N$ et vérifiant $(a,u,\nabla\Pi) \in F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T,\mu}$ uniformément en μ, et $1 + a \geq \underline{b}$.

Ce temps T peut être minoré par une constante ne dépendant que de γ, N, μ, $\underline{b}$ et des normes des données dans $H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$, et choisie indépendante de μ pour μ assez petit.

Un résultat similaire peut être prouvé dans le cas limite où les données appartiennent à l'espace de Besov $B^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}$. Nous renvoyons à [11] pour un énoncé précis.

En vertu du résultat de référence 2, on s'attend à pouvoir affaiblir les hypothèses de régularité dans le cas visqueux. C'est bien le cas :

Théorème 1.3 *Soit $\alpha > 0$ et $\mu > 0$. Supposons que $a_0 \in H^{\frac{N}{2}+\alpha}$ avec $0 < \underline{b} \leq 1 + a_0$, $u_0 \in H^{\frac{N}{2}-1+\alpha}$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, et $f \in \widetilde{L}^1_{loc}(H^{\frac{N}{2}-1+\alpha})$. Alors il existe un temps $T > 0$ tel que (INS_μ) ait une unique solution telle que $(a,u,\nabla\Pi)$ appartienne à l'espace*

$$E^\alpha_T \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{C}_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha}) \times \left(\widetilde{C}_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha-1}) \cap \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha+1})\right)^N \times \left(\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha-1})\right)^N.$$

Un résultat similaire peut être prouvé pour des données (a_0, u_0, f) dans l'espace limite $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2,1} \times \left(\dot{B}^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}\right)^N \times \left(L^1(0,T;\dot{B}^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})\right)^N$ à condition de supposer en sus que $\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2,1}}$ est petit (c'est-à-dire que la densité initiale est proche d'une constante). Un tel espace a l'avantage d'être critique dans le sens où il correspond à l'invariance par changement d'échelle de (INS_μ) (voir [8] pour plus de détails).

Discutons maintenant l'existence globale en dimension $N = 2$. La situation est à peu près satisfaisante pour les fluides visqueux à densité variable puisque l'on a le

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses du théorème 1.3 et en dimension $N = 2$, le système (INS_μ) a une solution globale unique qui appartient à E^α_T pour tout $T > 0$.*

On peut prouver un résultat global (également valable en dimension supérieure) lorsque $(a_0, u_0/\mu, f/\mu)$ sont petites dans l'espace limite $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2,1} \times \left(\dot{B}^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}\right)^N \times \left(L^1(0,T;\dot{B}^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})\right)^N$ (voir [8]).

En revanche, même en dimension $N = 2$, le problème de l'existence globale de solutions pour (IE) (en dehors du cas à densité constante) semble être complètement ouvert.

Pour les fluides à densité variable, nous ne savons pas montrer que le tourbillon contrôle la régularité des solutions. En revanche, on dispose du critère suivant :

Proposition 1.5 *Soit $\gamma > 0$. Supposons que $1 + \inf_x a_0(x) > 0$, que $a_0, u_0 \in H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$ (avec $\operatorname{div} u_0 = 0$) et que $f \in \widetilde{L}^1_{loc}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$. Soit $(\rho, u, \nabla\Pi)$ une solution régulière de (INS_μ) sur $[0,T)$ (i.e telle que $(a, u, \nabla\Pi) \in F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T',\mu}$ pour tout $T' < T$). Si de plus*

$$\nabla u \in L^1(0,T;L^\infty) \quad et \quad \begin{cases} a \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}) & si \quad \mu = 0, \\ a \in L^\infty(0,T;H^{\frac{N}{2}+\alpha}) \;\; pour\ un\ \alpha > 0 & si \quad \mu > 0, \end{cases}$$

alors $(\rho, u, \nabla\Pi)$ peut-être prolongée au-delà de T en une solution régulière de (INS_μ).

Remarque 1.6 *Comme dans le cas homogène, on peut relaxer légèrement la condition $L^1(L^\infty)$ sur ∇u et obtenir un critère faisant intervenir la norme L^∞ du tourbillon (voir la proposition 5.2 pour plus de détails). Comme on ignore malheureusement tout de la conservation de la norme L^∞ du tourbillon dans le cas à densité variable, l'intérêt de ce "raffinement" est cependant discutable !*

Pour terminer, indiquons dans quelle mesure les résultats 5 relatifs à la limite non visqueuse peuvent se généraliser aux fluides à densité variable.

Des estimations d'énergie assez élémentaires permettent d'obtenir un contrôle par μ du taux de convergence dans L^2 des solutions régulières de (INS_μ) vers celles de (IE) (voir le corollaire 2.2). Pour $a_0, v_0 \in H^s$ fixés avec $s > 1 + \frac{N}{2}$ (ou même seulement $a_0, v_0 \in B^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}$), ce résultat de convergence L^2 combiné avec le théorème 1.2 permet de montrer l'existence d'un intervalle $[0,T]$ sur lequel (INS_μ) (avec μ petit) et (IE) ont une solution, et la convergence au sens $H^{s'}$ pour tout $s' < s$ lorsque μ tend vers 0.

Mais on dispose en fait d'un résultat bien plus fort :

Théorème 1.7 *Soit (a_0, u_0, f) vérifiant les hypothèses du théorème 1.2. Supposons que la solution de (IE) associée soit définie sur $[0,T_0] \times \mathbb{A}^N$ et vérifie $(a, u, \nabla\Pi) \in F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T_0}$. Alors il existe $\mu_0 > 0$ ne dépendant que de $\|(a, u, \nabla\Pi)\|_{F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T_0}}$, $\|f\|_{\widetilde{L}^1_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})}$, T_0, $\underline{\rho}$, γ et N, et tel que pour tout $\mu \in (0, \mu_0]$, le système (INS_μ) admette une unique solution $(\rho_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$ sur $[0,T_0] \times \mathbb{A}^N$ telle que $(a_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu) \in F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T_0,\mu}$ (uniformément en μ si $\gamma \neq 1$). De plus, pour tout $\gamma' < \gamma$, $(a_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$ tend vers $(a, u, \nabla\Pi)$ dans*

$$\widetilde{L}^\infty_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma'}) \times \Big(\widetilde{L}^\infty_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma'})\Big)^N \times \Big(\widetilde{L}^1_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma'})\Big)^N.$$

Remarque 1.8 *Pour simplifier, nous nous sommes limités à une étude dans le cadre des espaces de Sobolev construits sur L^2. La généralisation aux espaces de Besov $B^s_{2,\infty}$ avec $s > 1 + N/2$ ne pose aucun problème. Tant que l'on se restreint à des résultats locaux en temps, il ne devrait pas y avoir non plus d'obstruction à travailler dans des espaces construits sur L^p (une étude de ce type pour les fluides compressibles a d'ailleurs été menée dans [10]).*

Tous les résultats mentionnés reposent étroitement sur la preuve d'estimations *a priori* dans les espaces H^s pour une linéarisation appropriée de $(\widetilde{INS}_\mu)$. La densité vérifie une équation de transport, et les résultats classiques nous suffiront pour étudier son évolution. En revanche, la vitesse (linéarisée) u vérifie une équation de Stokes non stationnaire avec terme de transport, et coefficients variables :

$$\begin{cases} \partial_t u + v\cdot\nabla u + b(\nabla\Pi - \mu\Delta u) = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{M_μ}$$

C'est donc principalement sur l'étude de (M_μ) et des estimations *a priori* H^s associées que nous allons nous concentrer.

Dans la section 2, nous prouvons quelques estimations de type L^2 pour (M_μ). Nous en déduisons l'unicité des solutions régulières de (INS_μ) et une majoration du taux de convergence en norme L^2 pour la limite non visqueuse. La partie suivante est dévolue à la preuve d'estimations H^s pour (M_μ). Dans la section 5, on établit un critère de non explosion des solutions régulières. Enfin, dans la dernière partie, nous donnons quelques détails sur la preuve du théorème 1.7.

Un court appendice est consacré à la décomposition de Littlewood-Paley, outil de base pour la preuve de la plupart des résultats mentionnés dans cet article.

Notation : On désignera par C une constante "inoffensive" dont le sens précis dépendra du contexte. On utilisera également la notation $A \lesssim B$ au lieu de $A \leq CB$, et $A \approx B$ signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

On note $x \vee y = \min(x, y)$. Enfin, $\mathcal{P}$ désigne le projecteur L^2 sur les champs à divergence nulle, et $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ est le projecteur L^2 sur les champs de type gradient.

2 Estimations d'énergie

Montrons brièvement comment des estimations d'énergie sommaires permettent de prouver l'unicité des solutions régulières et de trouver un taux de convergence μ en norme L^2 pour la limite non visqueuse.

Commençons par la preuve (formelle) de (1). Considérons une solution u suffisamment régulière du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + v\cdot\nabla u) - \mu\Delta u + \nabla\Pi = \rho f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où v, champ de vecteurs à divergence nulle, f champ de vecteurs, et $\rho > 0$ sont donnés.

En prenant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$ de l'équation avec u, on trouve

$$\partial_t\left(\rho\frac{|u|^2}{2}\right) - \frac{|u|^2}{2}(\partial_t\rho + v\cdot\nabla\rho) - \mu u\cdot\Delta u + \nabla\Pi\cdot u = (\sqrt{\rho}f)\cdot(\sqrt{\rho}u).$$

Posons $g = (\partial_t\rho + v\cdot\nabla\rho)/\rho$. Après intégration par rapport à la variable d'espace, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2 + \mu\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int(\sqrt{\rho}f)\cdot(\sqrt{\rho}u)\,dx + \int\rho g\frac{|u|^2}{2}\,dx.$$

Dans le cas $g \equiv 0$, une intégration en temps donne l'égalité (1). Dans le cas général, on peut "simplifier" par $\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}$ puis appliquer l'inégalité de Gronwall, ce qui permet d'aboutir à

$$e^{-\frac{1}{2}\int_0^t\|g(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\|(\sqrt{\rho}u)(t)\|_{L^2} \leq \|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2} + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\int_0^\tau\|g(\tau')\|_{L^\infty}d\tau'}\|(\sqrt{\rho}f)(\tau)\|_{L^2}\,d\tau. \tag{3}$$

De cette inégalité, on peut ensuite aisément déduire l'unicité des solutions régulières (à densité ne s'annulant pas) de (INS_μ) en estimant la norme L^2 de leur différence. Plus généralement, on a

Proposition 2.1 *Soit* $(\rho_i, u_i, \nabla\Pi_i)$ *(*$i \in \{1,2\}$*) une solution de*

$$\begin{cases} \partial_t \rho_i + v_i \cdot \nabla \rho_i = \rho_i g_i, \\ \rho_i(\partial_t u_i + v_i \cdot \nabla u_i) - \mu\Delta u_i + \nabla\Pi_i = \rho_i f_i, \\ \operatorname{div} u_i = 0. \end{cases}$$

Posons $\delta\rho \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_2 - \rho_1$, $\delta u \stackrel{\text{déf}}{=} u_2 - u_1$, $\delta f \stackrel{\text{déf}}{=} f_2 - f_1$ *et* $\delta g \stackrel{\text{déf}}{=} g_2 - g_1$. *Alors on a*

$$e^{-V_{1,2}(t)}\Big(\|\delta\rho(t)\|_{L^2} + \|(\sqrt{\rho_2}\delta u)(t)\|_{L^2}\Big) \leq \|\delta\rho(0)\|_{L^2} + \|(\sqrt{\rho_2}\delta u)(0)\|_{L^2} \\ + \int_0^t e^{-V_{1,2}(\tau)}\Big(\|(\rho_1\delta g)(\tau)\|_{L^2} + \|(\sqrt{\rho_2}\delta f)(\tau)\|_{L^2}\Big)\,d\tau,$$

avec

$$V_{1,2}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t \left(\|g_2(\tau)\|_{L^\infty} + \left\|\frac{\nabla\rho_1}{\sqrt{\rho_2}}(\tau)\right\|_{L^\infty} + \|\nabla u_1(\tau)\|_{L^\infty} + \left\|\left(\frac{\nabla\Pi_1 - \mu\Delta u_1}{\rho_1\sqrt{\rho_2}}\right)(\tau)\right\|_{L^\infty}\right) d\tau.$$

En appliquant la proposition ci-dessus à

$$\begin{aligned} &(\rho_1, u_1, \nabla\Pi_1) = (\rho, u, \nabla\Pi), \qquad && g_1 = 0, \quad f_1 = f - \mu\rho^{-1}\Delta u, \\ &(\rho_2, u_2, \nabla\Pi_2) = (\rho_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu), && g_2 = 0, \quad f_2 = f, \end{aligned}$$

on en déduit le

Corollaire 2.2 *Soit* $(\rho_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$ *une solution de* (INS_μ) *et* $(\rho, u, \nabla\Pi)$ *une solution de* (IE) *avec la même force extérieure et les mêmes données initiales. On suppose de plus que* $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0$. *Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\|(\rho_\mu - \rho)(t)\|_{L^2} + \sqrt{\underline{\rho}}\,\|(u_\mu - u)(t)\|_{L^2} \leq \mu\frac{e^{V(t)}}{\sqrt{\underline{\rho}}}\int_0^t e^{-V(\tau)}\,\|\Delta u(\tau)\|_{L^2}\,d\tau,$$

où

$$V(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t \Big(\underline{\rho}^{-\frac{1}{2}}\,\|\nabla\rho(\tau)\|_{L^\infty} + \|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty} + \underline{\rho}^{-\frac{3}{2}}\,\|\nabla\Pi(\tau)\|_{L^\infty}\Big)\,dt.$$

Notons que les solutions de (IE) que nous avons construites dans le théorème 1.2 vérifient bien les hypothèses du corollaire.

3 Estimations dans les Sobolev d'indice positif pour les équations linéarisées

Le linéarisé de l'équation vérifiée par la densité est une simple équation de transport par un champ à divergence nulle.

En adaptant les preuves classiques (afin d'obtenir des estimations dans $\widetilde{L}^\infty_T(H^s)$ au lieu de $L^\infty(0,T;H^s)$), on prouve le résultat suivant (voir [7] et [11]) :

Proposition 3.1 *Soit $s > -1 - N/2$ tel que $s \neq 1 + N/2$. Soit v un champ de vecteurs à divergence nulle tel que $\nabla v \in L^1(0,T; H^{\frac{N}{2}} \cap L^\infty)$ si $|s| < 1 + N/2$, et $\nabla v \in L^1(0,T;H^s)$ si $s > 1 + N/2$. Supposons que $a_0 \in H^s$, $g \in \widetilde{L}^1_T(H^s)$. Soit $a \in L^\infty(0,T;H^s) \cap C([0,T];\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ une solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t a + v \cdot \nabla a = g, \\ a_{|t=0} = a_0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Alors $a \in \widetilde{C}_T(H^s)$ et il existe une constante $C = C_{s,N}$ telle que l'on ait :

$$\forall t \in [0,T],\ \|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(H^s)} \leq e^{CV(t)} \left(\|a_0\|_{H^s} + \|g\|_{\widetilde{L}^1_t(H^s)}\right),$$

$$\text{où} \quad V(t) = \left\{\begin{array}{lll} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{H^{\frac{N}{2}} \cap L^\infty} \, d\tau & si & |s| < 1 + N/2, \\ \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{H^{s-1}} \, d\tau & si & s > 1 + N/2. \end{array}\right.$$

Concentrons-nous maintenant sur le système de type Stokes suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u + v \cdot \nabla u + b(\nabla \Pi - \mu \Delta u) = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{array}\right. \tag{M_μ}$$

où b, f, v et u_0 sont donnés.

On supposera de plus que $\underline{b} \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_x b(x) > 0$ et que b tend vers une constante positive, disons 1 pour fixer les idées, à l'infini. On notera $a \stackrel{\text{déf}}{=} b - 1$.

Dans le cas $b \equiv 1$, $\mu > 0$ et $v \equiv 0$, on reconnaît dans (M_μ) le système de Stokes non stationnaire qui a été abondamment étudié. Dans le cadre qui nous intéresse ($x \in \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{T}^N$), il peut être projeté sur les champs à divergence nulle, ce qui permet de se ramener à l'équation de la chaleur. On prouve alors aisément l'estimation suivante :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(\dot{H}^s)} + \mu \|u\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{H}^{s+2})} + \|\nabla \Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{H}^s)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|f\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{H}^s)}. \tag{5}$$

Si l'on suppose maintenant que b est proche de la constante 1 (i.e a est petit), le système (M_μ) se récrit

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u + v \cdot \nabla u + \nabla \Pi - \mu \Delta u = f + a(\mu \Delta u - \nabla \Pi), \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{array}\right. \tag{M_μ}$$

Lorsque $v = 0$, on voit donc qu'une estimation telle que (5) permettra d'absorber le terme $a(\mu \Delta u - \nabla \Pi)$ pourvu que a soit petit et que $a(\mu \Delta u - \nabla \Pi)$ ait la même régularité que $\mu \Delta u - \nabla \Pi$. Dans le cadre Sobolev, une telle propriété est vraie dès que $a \in H^s$ avec $s > N/2$, et demeure encore dans le cas limite $s = N/2$ si l'on suppose que $a \in B^{\frac{N}{2}}_{2,1}$.

On comprend donc que sous de telles hypothèses de régularité, il ne sera pas trop difficile de “boucler les estimations” pour a petit. C'est d'ailleurs en développant cette idée que l'on parvient à prouver les versions des théorèmes 1.3 et 1.4 relatives au cas de la régularité critique (voir [8]).

Mais dans le cas général où b n'est pas proche d'une constante, une telle méthode ne saurait marcher. On parvient néanmoins à prouver le résultat suivant :

Proposition 3.2 *Soit $\mu \geq 0$, $s \in (0, \alpha + N/2]$ et $\alpha > 0$. Supposons que u_0 soit un champ de vecteurs à divergence nulle et coefficients H^s et que $f \in \widetilde{L}^1_T(H^s)$. Supposons en sus que $a \in \widetilde{C}_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})$ et que $\underline{b} \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{t,x} b > 0$. Soit v un champ de vecteurs à divergence nulle et dépendant du temps tel que $\nabla v \in L^1(0,T; H^{\frac{N}{2}} \cap L^\infty)$ si $s < N/2+1$ et $\nabla v \in L^1(0,T; H^s)$ si $s > N/2+1$, et supposons de plus que $s \neq 1 + N/2$ si $\nabla v \not\equiv 0$.*

Alors (M_μ) a unique solution $(u, \nabla\Pi)$ sur $[0,T] \times \mathbb{A}^N$ telle que

$$u \in \widetilde{C}_T(H^s), \quad \nabla\Pi \in \widetilde{L}^1_T(H^s) \quad \textit{et} \quad \mu u \in \widetilde{L}^1_T(H^{s+2}).$$

De plus il existe des constantes $\alpha' \in (0, \alpha]$, $\kappa > 0$ et $C > 0$ ne dépendant que de s, N et α, et telles que

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)} + \underline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})} \leq Ce^{C\mathcal{A}_T^\kappa V(T)}\Big(\|u_0\|_{H^s} + \mathcal{A}_T^\kappa\Big(\|f\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)} + \underline{\mu}\mathcal{A}_T\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha'})}\Big)\Big),$$

avec

$$\mathcal{A}_T \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 + \underline{b}^{-1}\|\nabla b\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha-1})} & \textit{si} \quad \alpha \neq 1, \\ 1 + \underline{b}^{-1}\|\nabla b\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty_T(L^\infty)} & \textit{si} \quad \alpha = 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$V(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^T \|\nabla v\|_{H^{\frac{N}{2}} \cap L^\infty} dt \quad \textit{si} \quad s < \frac{N}{2}+1 \quad \textit{et} \quad V(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^T \|\nabla v\|_{H^{s-2}} dt \quad \textit{si} \quad s > \frac{N}{2}+1.$$

Pour la pression, on a l'estimation

$$\underline{b}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)} \lesssim \mathcal{A}_T^\kappa\Big(\|\mathcal{Q}f\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)} + \mu\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})}\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})} + \int_0^T V'(t)\|u(t)\|_{H^s}\,dt\Big).$$

Si de plus $v = u$ et sous la seule condition $s \in (0, \alpha + N/2]$, les estimations ci-dessus sont valables avec $V(T) = \int_0^T \|\nabla u\|_{L^\infty} dt$.

La principale difficulté consiste à éliminer la pression afin de résoudre une équation d'évolution ne portant que sur u. Prendre la divergence de (M_μ) ramène l'étude de la pression à celle de l'équation elliptique suivante :

$$\operatorname{div}(b\nabla\Pi) = \operatorname{div} F \quad \text{avec} \quad F = f + \mu a \Delta u - v \cdot \nabla u. \tag{7}$$

Si l'on note $\mathcal{H}_b$ l'opérateur linéaire $F \mapsto \nabla\Pi$, le système (M_μ) se récrit

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u - \mu b \Delta u + b\mathcal{H}_b(f - v \cdot \nabla u + \mu a \Delta u) = f. \tag{$\widetilde{M_\mu}$}$$

La première étape de la preuve de la proposition 3.2 consiste donc à étudier la continuité de l'opérateur $\mathcal{H}_b$ dans les espaces de Sobolev.

Nous disposons bien sûr du résultat élémentaire suivant :

Proposition 3.3 *Si $F \in L^2$, et b est mesurable, bornée et satisfait $b \geq \underline{b} > 0$, alors (7) a une unique solution Π modulo les constantes telle que $\nabla\Pi \in L^2$.*

De plus $\mathcal{H}_b \;:\; F \mapsto \nabla\Pi$ est borné dans L^2 et vérifie

$$\underline{b}\,\|\nabla\Pi\|_{L^2} \leq \|\mathcal{Q}F\|_{L^2}. \tag{8}$$

On dispose également de résultats de continuité dans des espaces plus réguliers :

Proposition 3.4 *Soit $\alpha > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $1 \vee \alpha \leq |\sigma| \leq \alpha + N/2$. L'opérateur $\mathcal{H}_b$ est borné dans H^σ, et $\nabla\Pi \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{H}_b(F)$ vérifie :*

$$\underline{b}\|\nabla\Pi\|_{H^\sigma} \lesssim \mathcal{A}^{\frac{|\sigma|}{1\vee\alpha}}\|\mathcal{Q}F\|_{H^\sigma}, \tag{9}$$

avec $\mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 + \underline{b}^{-1}\|\nabla b\|_{H^{\frac{N}{2}+\alpha-1}} & si \quad \alpha \neq 1, \\ 1 + \underline{b}^{-1}\|\nabla b\|_{H^{\frac{N}{2}}\cap L^\infty} & si \quad \alpha = 1. \end{cases}$

Preuve : On découpe l'équation côté Fourier à l'aide d'une décomposition de Littlewood-Paley (voir l'appendice pour la définition d'une telle décomposition) :

$$\operatorname{div}(b\nabla\Delta_q\Pi) = \operatorname{div}(\Delta_q F + [b, \Delta_q]\nabla\Pi).$$

D'après (8), on a

$$\underline{b}\,\|\Delta_q\nabla\Pi\|_{L^2} \leq \|\Delta_q\mathcal{Q}F\|_{L^2} + \|[b, \Delta_q]\nabla\Pi\|_{L^2}\,. \tag{10}$$

On en déduit que

$$\underline{b}\Big(\sum_q 2^{2q\sigma}\,\|\Delta_q\nabla\Pi\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_q 2^{2q\sigma}\,\|\Delta_q\mathcal{Q}F\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum \|[b, \Delta_q]\nabla\Pi\|_{L^2}\,2^{2q\sigma}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le membre de droite, on reconnaît la norme H^s de $\nabla\Pi$, et dans le premier terme du membre de gauche, la norme H^s de $\mathcal{Q}F$.

Pour éviter quelques complications techniques, supposons que $\sigma \neq 1 \vee \alpha + N/2$ et $\alpha \neq 1$ (en plus des hypothèses faites dans l'énoncé). Le commutateur s'estime alors aisément à l'aide de calcul paradifférentiel élémentaire (voir l'appendice de [11]) et l'on trouve finalement

$$\underline{b}\|\nabla\Pi\|_{H^\sigma} \lesssim \|\mathcal{Q}F\|_{H^\sigma} + \|\nabla b\|_{H^{\frac{N}{2}+\alpha-1}}\|\nabla\Pi\|_{H^{\sigma-\alpha\vee 1}}. \tag{11}$$

Comme $\sigma \geq \alpha \vee 1$, on a l'inégalité d'interpolation suivante :

$$\|\nabla\Pi\|_{H^{\sigma-\alpha\vee1}} \leq \|\nabla\Pi\|_{H^\sigma}^{\frac{\sigma-\alpha\vee1}{\sigma}}\;\|\nabla\Pi\|_{L^2}^{\frac{\alpha\vee1}{\sigma}}\;, \tag{12}$$

et l'inégalité de Young combinée avec le résultat de continuité L^2 pour $\mathcal{H}_b$ donnent l'estimation souhaitée. □

Revenons maintenant au problème d'évolution (M_μ). La preuve d'estimations *a priori* repose sur le même principe que dans le cas stationnaire. On applique les opérateurs Δ_q afin de localiser l'équation :

$$\partial_t\Delta_q u + v\cdot\nabla\Delta_q u + \Delta_q\nabla\Pi - \mu\operatorname{div}(b\Delta_q\nabla u) = \Delta_q f + [v, \Delta_q]\cdot\nabla u - \Delta_q(a\nabla\Pi) + \mu R_q,$$

avec

$$R_q^j \stackrel{\text{déf}}{=} \Delta_q(b\Delta u^j) - \operatorname{div}(b\Delta_q\nabla u^j).$$

Bien sûr, ce dernier commutateur (source d'une perte de dérivées) n'apparaît heureusement pas dans le cas non visqueux !

En prenant le produit scalaire L^2 de cette équation avec $\Delta_q u$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 + \underline{\mu}\,\|\nabla\Delta_q u\|_{L^2}^2 \leq &\Big|(\Delta_q(a\nabla\Pi)|\Delta_q u)\Big| \\ &+ \|\Delta_q u\|_{L^2}\Big(\mu\,\|R_q\|_{L^2} + \|[v, \Delta_q]\cdot\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta_q\mathcal{P}f\|_{L^2}\Big).\end{aligned}$$

Pour majorer le terme de pression de façon optimale, on applique la décomposition de Bony au produit $a\nabla\Pi$ (voir l'appendice pour la définition d'une telle décomposition). Après intégration par parties et utilisation de $\operatorname{div} u = 0$, on obtient

$$\Big|(\Delta_q(a\nabla\Pi)|\Delta_q u)\Big| \leq \Big|(\Delta_q T_{\nabla a}\Pi|\Delta_q u)\Big| + \Big|(\Delta_q T'_{\nabla\Pi}a|\Delta_q u)\Big|.$$

Comme Δ_q est un opérateur de localisation spectrale dans des couronnes dyadiques, il existe $\kappa > 0$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$, on ait $\|\Delta_q \nabla u\|_{L^2} \geq \kappa 2^q \|\Delta_q u\|_{L^2}$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 + \kappa\underline{\mu}2^{2q}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta_q u\|_{L^2}\Big(&\|\Delta_q T_{\nabla a}\Pi\|_{L^2} + \|\Delta_q T'_{\nabla\Pi}a\|_{L^2} \\ &+\mu\|R_q\|_{L^2} + \|[v,\Delta_q]\cdot\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta_q \mathcal{P}f\|_{L^2}\Big).\end{aligned} \tag{13}$$

Si $q = -1$, on dispose d'une inégalité similaire avec $\kappa = 0$.

Formellement, l'étape suivante consiste à simplifier par $\|\Delta_q u\|_{L^2}$, multiplier les deux membres par 2^{qs}, intégrer en temps puis prendre la norme ℓ^2 de chaque membre (d'où l'apparition de normes de type $\widetilde{L}_T^\rho(H^\sigma)$). Tous calculs faits, on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^s)} + \underline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+2})} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \underline{\mu}\|\Delta_{-1}u\|_{L_T^1(L^2)} + \|T_{\nabla a}\Pi\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \|T'_{\nabla\Pi}a\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} \\ +\|\mathcal{P}f\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \mu\Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\|R_q\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\|[v,\Delta_q]\cdot\nabla u\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Les commutateurs peuvent être bornés au prix d'un peu de calcul paradifférentiel (voir l'appendice de [11]). On a

$$\Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\|[v,\Delta_q]\cdot\nabla u\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \int_0^T V'(t)\|u(t)\|_{H^s}\,dt, \tag{15}$$

$$\text{avec} \qquad V'(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \|\nabla v(t)\|_{H^{\frac{N}{2}}\cap L^\infty} & \text{si} \quad -\frac{N}{2} < s < 1+\frac{N}{2}, \\ \|\nabla v(t)\|_{H^{s-1}} & \text{si} \quad s > 1+\frac{N}{2}, \\ \|\nabla u(t)\|_{L^\infty} & \text{si} \quad v = u \ \text{ et } \ s > 0, \\ 0 & \text{si} \quad \nabla v = 0. \end{cases} \tag{16}$$

et il existe $\alpha' \in (0,\alpha]$ (dépendant de α, s et N) tel que

$$\Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\|R_q\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\nabla a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{N}{2}+\alpha-1})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^m(H^{s+1-\alpha'})}. \tag{17}$$

Par ailleurs, les propriétés de continuité du paraproduit donnent

$$\|T_{\nabla a}\Pi\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \|T'_{\nabla\Pi}a\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} \lesssim \|a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{N}{2}+\alpha})}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s-\alpha'})}.$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}\|u\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^s)} + \underline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+2})} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \underline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+2-\alpha'})} + \int_0^T V'(t)\|u(t)\|_{H^s}dt \\ +\mu\|a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{N}{2}+\alpha})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-\alpha'})} + \|\mathcal{P}f\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \|a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{N}{2}+\alpha})}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s-\alpha'})}.\end{aligned} \tag{18}$$

Il s'agit donc maintenant d'estimer la pression qui est solution du problème elliptique (7) avec second membre $F = f + \mu a\Delta u - v\cdot\nabla u$. C'est possible grâce à une généralisation immédiate de la proposition 3.4 au cas non stationnaire (afin de pouvoir traiter le cas où F appartient à un espace du type $\widetilde{L}^1_T(H^\sigma)$).

On trouve finalement l'inégalité suivante, valable pour tout $\alpha'' \in [0, \alpha']$:

$$\underline{b}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha''})} \lesssim \mathcal{A}_T^{\frac{s-\alpha''}{\alpha'}} \Big(\|\mathcal{Q}f\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)} + \int_0^T V'(t)\|u(t)\|_{H^s}\,dt \\ +\mu\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})}\|\Delta u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha''})}\Big),$$

où $V'(t)$ a été défini en (16), et $\mathcal{A}_T \stackrel{\text{déf}}{=} 1 + \underline{b}^{-1}\|\nabla a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})}$.

En reportant cette dernière inégalité dans (18) puis en utilisant le lemme de Gronwall, on trouve l'estimation souhaitée. □

4 Existence de solutions pour le modèle complet

Elle se montre par un schéma itératif standard. Sous les hypothèses du théorème 1.2, on peut par exemple partir de $a^0 \stackrel{\text{déf}}{=} a_0$ et $u^0 \stackrel{\text{déf}}{=} u_0$ puis, une fois (a^n, u^n) construite sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{A}^N$, définir a^{n+1} comme la solution globale de l'équation de transport linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t a^{n+1} + u^n \cdot \nabla a^{n+1} = 0, \\ a^{n+1}_{|t=0} = a_0, \end{cases} \tag{19}$$

et $(u^{n+1}, \nabla\Pi^{n+1})$ comme la solution globale de

$$\begin{cases} \partial_t u^{n+1} + u^n \cdot \nabla u^{n+1} + (1 + a^{n+1})(\nabla\Pi^{n+1} - \mu\Delta u^{n+1}) = f, \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0, \\ u^{n+1}_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{20}$$

Grâce aux propositions 3.1 et 3.2, on établit que tous les termes $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ sont dans $\cap_{T>0} F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T,\mu}$, et que la suite est uniformément bornée dans $F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T,\mu}$ pour T assez petit.

Des estimations d'énergie données dans la proposition 2.1, on déduit aisément que (a^n, u^n) est de Cauchy dans $C([0,T]; L^2)$. Les bornes uniformes permettent alors de montrer que la limite obtenue appartient encore à $F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T,\mu}$, et vérifie $(\widetilde{INS}_\mu)$.

Quant à l'unicité, elle découle simplement de la proposition 2.1.

La preuve du théorème 1.3 repose également sur les propositions 3.1 et 3.2. Mais le manque de régularité empêche d'appliquer tels quels les résultats de la section 2 pour obtenir l'unicité. La preuve du résultat d'existence globale en dimension $N = 2$ est plus délicate. On renvoie à [9] pour les détails.

5 Critères d'explosion

La connaissance explicite d'un minorant (en terme des normes des données initiales) pour le temps de vie des solutions régulières permet facilement d'obtenir le premier critère suivant :

Lemme 5.1 *Soit $\mu \geq 0$, $\gamma > 0$, $a_0 \in H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$ avec $1 + a_0$ n'atteignant pas le vide, $u_0 \in H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, et $f \in \widetilde{L}^1_{loc}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$. Soit $(\rho, u, \nabla\Pi)$ une solution régulière de (INS_μ) sur $[0, T[$.*

Si de plus $a \in L^\infty(0, T; H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$ et $u \in L^\infty(0, T; H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$ alors il existe un $\eta > 0$ tel que $(\rho, u, \nabla\Pi)$ puisse être prolongé en une solution régulière de (INS_μ) sur $[0, T + \eta]$.

Preuve de la proposition 1.5 dans le cas $\mu = 0$:

En appliquant la proposition 3.2 à $(a, u, \nabla\Pi)$ dans le cas $v = u$, on trouve $u \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$. Comme par hypothèse, $a \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$, le lemme 5.1 nous permet de prolonger la solution au-delà du temps T.

Preuve de la proposition 1.5 dans le cas $\mu > 0$:

Quitte à diminuer $\alpha > 0$, on peut toujours supposer que $a \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})$. La proposition 3.2 suivie d'une interpolation entre $\widetilde{L}^1_T(H^0)$ et $\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+2+\alpha})$ donne pour un certain coefficient $\kappa > 0$,

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})} + \underline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+2+\alpha})} \leq C\widetilde{\mathcal{A}}^\kappa_T e^{C\widetilde{\mathcal{A}}^\kappa_T \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\,dt} \times\Big(\|u_0\|_{H^{\frac{N}{2}+\alpha}} + \|f\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha})} + \underline{\mu}T\|u\|_{L^\infty_T(L^2)}\Big). \tag{21}$$

L'inégalité d'énergie (3) permet de contrôler le dernier terme. Donc $u \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\alpha}) \cap \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+2+\alpha})$. En particulier, $\nabla u \in L^1_T(H^{\frac{N}{2}+1+\frac{\alpha}{2}})$. En revenant à l'équation de transport vérifiée par a, on trouve donc $a \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+1+\min(\gamma,1+\frac{\alpha}{2})})$.

On peut alors utiliser à nouveau l'équation du moment pour trouver un gain de régularité supplémentaire sur u.

Après un nombre fini de va-et-vient entre les deux équations, on conclut que $a, u \in \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$, et le lemme 5.1 s'applique. □

En utilisant le classique résultat d'interpolation logarithmique

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla u\|_{B^0_{\infty,\infty}} \log\bigg(e + \frac{\|\nabla u\|_{H^{\frac{N}{2}+\gamma}}}{\|\nabla u\|_{B^0_{\infty,\infty}}}\bigg), \tag{22}$$

on obtient le raffinement suivant du critère d'explosion :

Proposition 5.2 *Les conclusions de la proposition 1.5 demeurent si l'hypothèse $\nabla u \in L^1(0, T; L^\infty)$ est remplacée par*

$$\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{B^0_{\infty,\infty}} \log\bigg(e + \frac{1}{\|\nabla u(t)\|_{B^0_{\infty,\infty}}}\bigg)dt < +\infty.$$

6 La limite non visqueuse

La preuve du théorème 1.7 repose sur le lemme suivant :

Lemme 6.1 *Soit* $\gamma\neq 1$ *et* $\underline{b}>0$. *Supposons que* $(\widetilde{INS}_\mu)$ *ait une solution* $(a_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$ *dans* $F^{\frac{N}{2}+\gamma}_{T,\mu}$ *et que la solution non visqueuse correspondante* $(a, u, \nabla\Pi)$ *appartienne à* $F^{\frac{N}{2}+\gamma}_{T}$ *et vérifie*

$$\Delta u \in L^2(0,T;H^{\frac{N}{2}+\gamma-1}), \quad \nabla\Pi,\ \nabla a,\ \nabla u \in L^1(0,T;H^{\frac{N}{2}+\gamma}) \quad \text{et} \quad 1+a \geq \underline{b}. \tag{23}$$

Notons $\delta a \overset{\text{déf}}{=} a_\mu - a$, $\delta u \overset{\text{déf}}{=} u_\mu - u$ *et* $\delta\Pi \overset{\text{déf}}{=} \Pi_\mu - \Pi$. *Alors il existe deux constantes* $X_0, \mu_0 > 0$ *ne dépendant que de* T_0 *et de* $(a, u, \nabla\Pi)$ *et telles que si* $\mu \in [0, \mu_0]$, *on ait*

$$\|\delta a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\gamma})} + \|\delta u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\gamma})} + \sqrt{\underline{\mu}}\|\delta u\|_{L^2_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})} + \|\nabla\delta\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+\gamma})+L^2_T(H^{\frac{N}{2}-1+\gamma})} \leq \sqrt{\underline{\mu}}X_0.$$

Éléments de preuve : Le terme δa est solution de l'équation de transport suivante :

$$\partial_t \delta a + u_\mu \cdot \nabla \delta a = -\delta u \cdot \nabla a, \qquad \delta a_{|t=0} = 0.$$

Notons que la présence de ∇a fait perdre une dérivée (ce genre de désagrément est courant lorsque l'on cherche l'équation vérifiée par la différence entre deux solutions d'un problème hyperbolique du premier ordre), ce qui amène à faire les estimations au niveau de régularité $H^{\frac{N}{2}+\gamma}$ alors que les solutions considérées sont dans $H^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$. Le terme $(\delta u, \nabla\delta\Pi)$ quant à lui satisfait

$$\begin{cases} \partial_t \delta u + u_\mu \cdot \nabla \delta u + (1+a)(\nabla\delta\Pi - \mu\Delta\delta u) = -\delta u \cdot \nabla u \\ \qquad\qquad -\delta a \nabla\delta\Pi - \delta a\nabla\Pi + \mu\delta a\Delta\delta u + \mu(1+a+\delta a)\Delta u, \\ \operatorname{div} \delta u = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Un examen rapide de l'équation ci-dessus permet de se convaincre que l'on ne va pouvoir appliquer telle quelle l'estimation de la proposition 3.2 car le terme Δu par exemple est seulement dans $L^1(0,T;H^{\frac{N}{2}-1+\gamma})$ (ce qui donnerait des estimations de δu dans $L^\infty(0,T;H^{\frac{N}{2}-1+\gamma})$ et introduit un certain nombre de désagréments supplémentaires). Au prix d'une généralisation de la proposition 3.2 permettant de prendre en compte des termes sources qui sont dans $L^2(0,T;H^{s-1})$ (au lieu de $L^1(0,T;H^s)$), on parvient cependant à estimer $(\delta a, \delta u)$ dans $\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\gamma})$.

Après quelques lignes de calculs, une utilisation du corollaire 2.2 pour régler les problèmes de basses fréquences, et un *bootstrap* final, on achève la preuve du lemme. □

Donnons maintenant la preuve du théorème 1.7 dans le cas $\gamma \neq 1$ (pour des raisons techniques). On considère donc une solution $(\rho, u, \nabla\Pi)$ de (IE) telle que $(a, u, \nabla\Pi) \in F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T_0}$, $(1+a) \geq \underline{b}$, et μ vérifiant les conditions du lemme 6.1 avec $T = T_0$.

Première étape : Existence locale

Grâce au théorème 1.2, on sait qu'il existe un $T > 0$ tel que (INS_μ) ait une unique solution $(\rho_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$ sur $[0,T]$ vérifiant $(a_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu) \in F^{\frac{N}{2}+1+\gamma}_{T,\mu}$ et $1 + a_\mu \geq \underline{b}$.

Deuxième étape : minoration du temps de vie

Si l'on note T_μ le temps de vie de $(a_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$, le lemme 6.1 donne

$$\forall t \in [0,T_0]\cap[0,T_\mu),\ \|\delta a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(H^{\frac{N}{2}+\gamma})} + \|\delta u\|_{\widetilde{L}^\infty_t(H^{\frac{N}{2}+\gamma})} + \sqrt{\underline{\mu}}\|\delta u\|_{L^2_t(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})} \leq \sqrt{\underline{\mu}}X_0.$$

Donc en particulier $\|a_\mu\|_{\widetilde{L}^\infty_t(H^{\frac{N}{2}+\gamma})}$ et $\|\nabla u_\mu\|_{L^1_t(L^\infty)}$ restent finis tant que $t \leq T_0$ et $t < T_\mu$. La proposition 1.5 nous assure donc que $T_\mu > T_0$.

Troisième étape : Estimations uniformes dans $F_{T,\mu}^{\frac{N}{2}+1+\gamma}$

Le lemme 6.1 donne des bornes indépendantes de μ pour $\|u_\mu\|_{L^2_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})}$.

La proposition 3.1 permet de majorer $\|a_\mu\|_{L^2_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})}$ indépendamment de μ, puis, en revenant finalement à la proposition 3.2, de majorer u_μ dans $\widetilde{L}^\infty_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$, μu_μ dans $\widetilde{L}^1_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+3+\gamma})$ et $\nabla\Pi_\mu$ dans $\widetilde{L}^1_{T_0}(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma})$ indépendamment de μ.

Dernière étape : résultats supplémentaires de convergence :

Grâce à la deuxième étape, on sait que (a_μ, u_μ) converge vers (a,u) dans $\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\gamma}) \times \widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{N}{2}+\gamma})^N$. En interpolant avec les bornes obtenus à la troisième étape, on récupère immédiatement la convergence de $(a_\mu, u_\mu, \nabla\Pi_\mu)$ vers $(a, u, \nabla\Pi)$ dans

$$\bigcap_{\gamma'<\gamma}\left(\widetilde{C}_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma'}) \times \left(\widetilde{C}_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma'})\right)^N \times \left(\widetilde{L}^1_T(H^{\frac{N}{2}+1+\gamma'})\right)^N\right).$$

Appendice

Dans cet appendice, nous définissons les espaces $\widetilde{L}^r_T(H^s)$, et le paraproduit.

Commençons par rappeler ce qu'est une décomposition de Littlewood-Paley non homogène (dans $\mathbb{R}^N$ pour fixer les idées).

On part d'un couple de fonctions C^∞, (χ, φ) tel que

$$\operatorname{Supp}\chi \subset \left\{|\xi| \le \frac{4}{3}\right\}, \quad \operatorname{Supp}\varphi \subset \left\{\frac{3}{4} \le |\xi| \le \frac{8}{3}\right\} \quad \text{et} \quad \chi(\xi) + \sum_{q\in\mathbb{N}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1.$$

Soit $\varphi_q(\xi) = \varphi(2^{-q}\xi)$, $h_q = \mathcal{F}^{-1}\varphi_q$ et $\check{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$. Les blocs dyadiques sont définis par

$$\Delta_q u \stackrel{\text{déf}}{=} 0 \quad \text{si} \quad q \le -1, \quad \Delta_{-1} u \stackrel{\text{déf}}{=} \chi(D)u = \int_{\mathbb{R}^N} \check{h}(y)u(x-y)\,dy,$$
$$\Delta_q u \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(2^{-q}D)u = \int_{\mathbb{R}^N} h_q(y)u(x-y)\,dy \quad \text{si} \quad q \ge 0,$$

et il est classique que $u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u$ pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

On définit également la troncature basses fréquences suivante :

$$S_q u \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k\le q-1} \Delta_k u = \chi(2^{-q}D)u.$$

La plupart des espaces fonctionnels "usuels" peuvent être caractérisés à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley. On peut montrer par exemple que

$$H^s = \left\{u \in \mathcal{S}' \;\middle|\; \left(\sum_{q\ge-1} 2^{2sq}\,\|\Delta_q u\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\},$$

et que

$$\left(\int (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\mathcal{F}(u)(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\sum_{q\ge-1} 2^{2sq}\,\|\Delta_q u\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $B^s_{2,1}$ mentionné dans l'introduction peut être défini comme suit :

$$B^s_{2,1} = \Big\{ u \in \mathcal{S}' \mid \sum_{q \geq -1} 2^{sq} \, \|\Delta_q u\|_{L^2} < +\infty \Big\}.$$

La décomposition de Littlewood-Paley nous servira à *localiser spectralement* les EDP considérées dans cet article afin de se ramener à la manipulation d'inégalités différentielles portant sur chaque bloc dyadique. Par intégration en temps, on obtient des estimations pour chaque bloc dans $L^p(0,T;L^2)$. Lorsque l'on "rassemble les blocs" (par sommation ℓ^2) l'espace obtenu n'est malheureusement pas du type $L^p(0,T;H^s)$ comme souhaité (sauf si $p=2$), ce qui amène à définir les espaces suivants :

Définition *Pour $\rho \in [1,+\infty]$, $s \in \mathbb{R}$ et $T \in [0,+\infty]$, on pose*

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \overset{\text{déf}}{=} \bigg(\sum_{q \in \mathbb{Z}} 2^{2qs} \Big(\int_0^T \|\Delta_q u(t)\|^\rho_{L^2} \, dt \Big)^{\frac{2}{\rho}} \bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

On note alors $\widetilde{L}^\rho_T(H^s)$ l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{S}'(0,T\times\mathbb{A}^N)$ telles que $\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)}$ soit fini. On omet l'indice T lorsque $T=+\infty$.

Grâce à l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \leq \|u\|_{L^\rho_T(H^s)} \quad \text{si} \quad \rho \leq 2 \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^\rho_T(H^s)} \leq \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \quad \text{si} \quad \rho \geq 2,$$

et on montre aisément que pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \lesssim \|u\|_{L^\rho_T(H^{s+\epsilon})} \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^\rho_T(H^s)} \lesssim \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^{s+\epsilon})}. \tag{25}$$

Les espaces $\widetilde{L}^\rho_T(H^s)$ ont des propriétés d'interpolation similaires à celles des espaces $L^\rho(0,T;H^s)$:

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \leq \|u\|^\theta_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(H^{s_1})} \|u\|^{1-\theta}_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(H^{s_2})} \text{ avec } \frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{\rho_1} + \frac{1-\theta}{\rho_2} \text{ et } s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2. \tag{26}$$

Les lois de produit sont les mêmes que dans les Sobolev classiques. L'indice ρ se comporte conformément à l'inégalité de Hölder. Par exemple, on a

$$\|uv\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \lesssim \|u\|_{L^{\rho_1}_T(L^\infty)} \|v\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(H^s)} + \|v\|_{L^{\rho_2}_T(L^\infty)} \|u\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(H^s)}$$

dès que $s > 0$, $1 \leq \rho, \rho_1, \rho_2 \leq +\infty$ et $1/\rho = 1/\rho_1 + 1/\rho_2$.

Des résultats de continuité plus précis peuvent être obtenus en "découpant" uv. Cela peut être fait grâce aux opérateurs de *paraproduit* introduits par J.-M. Bony dans [4].

Le paraproduit entre u et v est (formellement) défini par

$$T_u v \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q \in \mathbb{N}} S_{q-1} u \Delta_q v.$$

Si l'on pose

$$R(u,v) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q \geq -1} \Delta_q u \widetilde{\Delta}_q v. \quad \text{avec} \quad \widetilde{\Delta}_q v \overset{\text{déf}}{=} (\Delta_{q-1} + \Delta_q + \Delta_{q+1}) v,$$

on dispose de la décomposition (formelle) suivante :

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

Références

[1] S. Antontsev, A. Kazhikhov and V. Monakhov : Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids. Translated from the Russian. Studies in Mathematics and its Applications, 22. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[2] J. Beale, T. Kato and A. Majda : Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, *Communications in Mathematical Physics*, **94**, pages 61–66 (1984).

[3] J. Beale and A. Majda : Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, **37**, 243-259, (1981).

[4] J.-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure*, **14**, pages 209-246 (1981).

[5] J.-Y. Chemin : Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel, *Journal d'Analyse Mathématique*, **77**, pages 25–50 (1999).

[6] P. Constantin and C. Foias : Navier-Stokes equations, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press (1988).

[7] R. Danchin : A few remarks on the Camassa-Holm equation, *Differential and Integral Equations*, **14**, pages 953–988 (2001).

[8] R. Danchin : Density-dependent incompressible fluids in critical spaces, to appear in the *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.*

[9] R. Danchin : Local and global well-posedness results for flows of inhomogeneous viscous fluids, preprint.

[10] R. Danchin : Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases, *Communications in Partial Differential Equation*, **26**, pages 1183–1233 (2001).

[11] R. Danchin : The inviscid limit for density dependent incompressible fluids, preprint.

[12] B. Desjardins : Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space, *Diff. and Integral Equations*, **10**, pages 587–598 (1997).

[13] H. Fujita and T. Kato : On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pages 269-315 (1964).

[14] S. Itoh : On the vanishing viscosity in the Cauchy problem for the equations of a nonhomogeneous incompressible fluid, *Glasgow Journal of Mathematics*, **36**, pages 123–129 (1994).

[15] S. Itoh and A. Tani : Solvability of nonstationary problems for nonhomogeneous incompressible fluids and the convergence with vanishing viscosity, *Tokyo Journal of Mathematics*, **22**, pages 17–42 (1999).

[16] T. Kato and G. Ponce : Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41**, pages 891–907 (1988).

[17] O. Ladyzhenskaya and V. Solonnikov : The unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluids, *Journal of Soviet Mathematics*, **9**, pages 697–749 (1978).

[18] P.-L. Lions : Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 1 Incompressible Models, *Oxford University Press* (1996).

[19] J. Marsden : Well-posedness of the equations of a non-homogeneous perfect fluid, *Communications in Partial Differential Equations*, **1**, pages 215–230 (1976).

[20] H. Okamoto : On the equation of nonstationary stratified fluid motion : uniqueness and existence of the solutions, *J. Fac. Sci. of the Univ. of Tokyo*, **30**, pages 615–643 (1984).

[21] M. Vishik : Hydrodynamics in Besov spaces, *Archiv for Rational Mechanics and Analysis*, **145**, pages 197–214 (1998).