



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz



ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2001-2002**

Frédéric Klopp

**Asymptotiques de Lifshitz**

*Séminaire É. D. P.* (2001-2002), Exposé n° IV, 12 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2001-2002\\_\\_\\_\\_A4\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A4_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# ASYMPTOTIQUES DE LIFSHITZ

FRÉDÉRIC KLOPP

*Dédié à la mémoire de T. Wolff.*

RÉSUMÉ. Cet exposé a pour but de présenter des résultats récents de l'auteur concernant les asymptotiques de Lifshitz pour des perturbations aléatoires d'opérateurs de Schrödinger périodiques. Certains de ces résultats ont été obtenus en collaboration avec T. Wolff.

## 0. INTRODUCTION

Au début des années 60 (cf. [25, 27]), I.M. Lifshitz montra qu'à un bord fluctuant du spectre d'un opérateur de Schrödinger aléatoire, la densité d'états décroît exponentiellement rapidement. Ce comportement est radicalement différent de celui connu pour les opérateurs périodiques : dans ce cas, la décroissance en bord de bande spectrale est polynomiale. Cette différence de comportement a des conséquences spectrales : dans le cas aléatoire, le bord de la bande spectrale est localisé (i.e. le spectre y est purement ponctuel dense) alors que, dans le cas périodique, il est étendu (i.e. le spectre y est absolument continu). Les asymptotiques de Lifshitz jouent un rôle crucial dans la preuve de la localisation en bord de bande spectrale (voir, par exemple [14, 2, 16, 19]).

Décrivons d'abord le modèle aléatoire que nous étudierons. Pour simplifier l'exposé, nous n'essayerons pas d'optimiser nos hypothèses de travail.

## 1. LE MODÈLE D'ANDERSON CONTINU

Soit  $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , un potentiel  $\mathbb{Z}^d$ -périodique borné. Sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , considérons l'opérateur de Schrödinger périodique  $H = -\Delta + W$ .  $H$  est essentiellement auto-adjoint sur  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; soit  $\Sigma_p$  son spectre.

Le modèle d'Anderson continu est l'opérateur de Schrödinger aléatoire

$$(1.1) \quad H_\omega = H + V_\omega = H + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \omega_\gamma V_\gamma,$$

où  $V_\gamma(\cdot) = V(\cdot - \gamma)$ ,  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel et  $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Nous supposons que

(H.1)

- (1)  $0 \notin V$  est continue, bornée et décroît suffisamment rapidement pour que la somme (1.1) converge.
- (2)  $V$  est positive ou nulle.
- (3) Les variables aléatoires  $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$  sont non constantes, bornées et leur support commun est l'intervalle  $[\omega^-, \omega^+]$ .

Rappelons d'abord quelques faits bien connus de la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires (cf. [35, 10, 4]). Sous nos hypothèses, pour tout  $\omega$ ,  $H_\omega$  est essentiellement auto-adjoint sur  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; son extension auto-adjointe est également notée  $H_\omega$ . Il existe un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}$ , noté  $\Sigma$ , tel que, pour presque tout  $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ , le spectre de  $H_\omega$  est égal à  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est le *spectre presque sûr* de  $H_\omega$ . Sous nos hypothèses, l'ensemble  $\Sigma$  est semi-borné inférieurement.

La conjecture de Bethe-Sommerfeld (voir [40, 9]) et la caractérisation classique de  $\Sigma$  en terme d'opérateurs périodiques admissibles (voir [11, 35]) garantissent que  $\Sigma$  est la réunion d'un nombre fini d'intervalles (voir la figure 1). Les composantes connexes de  $\mathbb{R} \setminus \Sigma$  sont les lacunes de  $\Sigma$ . Les bords des lacunes (qui sont aussi les bords des bandes spectrales) sont les points de  $\Sigma \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \Sigma}$ .

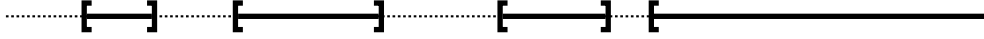


FIG. 1. Un spectre typique

Définissons la densité d'états intégrée de  $H_\omega$ . Soit  $H_{\omega,l}^D$ , la restriction de Dirichlet de  $H_\omega$  au cube  $\Lambda_l$  centré en 0 de côté de longueur  $l$ . Le spectre de l'opérateur  $H_{\omega,l}^D$  est discret. Pour  $E$  réel, définissons

$$(1.2) \quad N_{\omega,l}^D(E) = \frac{1}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \#\{\text{valeurs propres de } H_{\omega,l}^D \leq E\}$$

où  $\#\mathcal{E}$  est le nombre d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{E}$  et  $\text{Vol}(\Lambda_l)$ , le volume de  $\Lambda_l$ .

Alors,  $\omega$ -presque sûrement,  $N_{\omega,l}^D(E)$  admet une limite quand  $l \rightarrow +\infty$ . Cette limite est indépendante de la réalisation  $\omega$ . C'est la *densité d'états intégrée* de  $H_\omega$ . Nous la noterons  $N(E)$ . Du point de vue de la physique, elle représente le nombre d'états d'énergie inférieure à  $E$  par unité de volume pour un système régi par le hamiltonien  $H_\omega$ . La fonction  $N$  est croissante et continue à droite; l'ensemble de ses points d'accroissement est le spectre presque sûr,  $\Sigma$ .

La densité d'états intégrée est l'objet principal de notre exposé. Soit  $(E_+, E_-)$ , une lacune de  $\Sigma$  (voir la figure 2). Typiquement, si la perturbation aléatoire  $V_\omega$  n'est pas trop grande, cette lacune provient d'une lacune de  $\Sigma_p$ , disons  $(e_+, e_-)$ .

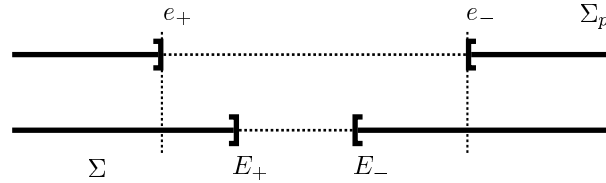


FIG. 2. Les bords des spectres  $\Sigma$  et  $\Sigma_p$

La question principale à laquelle nous répondrons est :

(Q) *quel est le comportement de  $N(E)$  au voisinage de  $E_\pm$  ?*

Les cas de  $E_+$  et  $E_-$  sont semblables; nous n'énoncerons les résultats que pour le cas de  $E_-$  i.e. pour les bords inférieurs de bandes spectrales.

## 2. QUELQUES HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES

La réponse à la question (Q) dépend du bord spectral que l'on considère, ainsi que des propriétés du potentiel  $V$  et des variables aléatoires de  $(\omega_\gamma)_\gamma$ . Pour ce qui concerne le bord spectral, on peut distinguer deux cas :

- (1) le fond du spectre i.e.  $\inf(\Sigma)$ ,
- (2) les bords internes.

Pour ce qui est de la décroissance de  $V$ , nous distinguerons également deux cas :

- (1) le potentiel  $V$  est de courte portée : il existe  $\nu > d + 2$  et  $0 \leq g_+$ , une fonction continue non identiquement nulle, telle que, pour  $\gamma \in \mathbb{Z}^d$  et  $x \in \Lambda_1$ , on ait

$$(2.1) \quad V(x + \gamma) \cdot (1 + |\gamma|)^\nu \leq g_+(x),$$

- (2) le potentiel  $V$  est de longue portée : il existe  $\nu \in (d, d + 2]$  et  $0 \leq g_- \leq g_+$ , deux fonctions continue non identiquement nulles, telles que, pour  $\gamma \in \mathbb{Z}^d$  et  $x \in \Lambda_1$ , on ait

$$(2.2) \quad g_-(x) \leq V(x + \gamma) \cdot (1 + |\gamma|)^\nu \leq g_+(x),$$

Avant de décrire nos résultats, faisons quelques remarques visant à simplifier l'exposé. Si  $E_-$  est un bord inférieur de bande spectrale (voir la figure 2), en ajoutant une constante au potentiel périodique, nous pouvons supposer  $E_- = 0$ . Ce que nous ferons dorénavant.

De plus, quitte à modifier le potentiel périodique  $W$ , nous pouvons supposer que  $\omega^- = 0$ . Ce que nous ferons également dorénavant. Ainsi, comme les variables aléatoires  $(\omega_\gamma)_\gamma$  ne sont pas constantes, nous obtenons que  $\mathbb{E}(\omega_\gamma) = \mathbb{E}(\omega_0) > 0$ .

### 3. LE FOND DU SPECTRE

Commençons par le cas d'un potentiel  $V$  de courte portée.

**3.1. Potentiels de courte portée.** Ce cas est celui qui a été étudié le premier et le plus fréquemment.

Dans [25, 26], Lifshitz développe son raisonnement heuristique non pour le modèle d'Anderson continu mais pour le modèle de Poisson (le potentiel aléatoire est obtenu en plaçant un exemplaire de  $V$  en chaque point d'un processus de Poisson). Il établit de façon non rigoureuse l'*asymptotique de Lifshitz*, c'est-à-dire

$$(3.1) \quad \log(N(E) - N(0)) = \log N(E) \underset{E \rightarrow 0^+}{\sim} -CE^{-d/2}.$$

Les premiers résultats mathématiques sur les asymptotiques de Lifshitz sont apparus bien plus tard; ces résultats ont été obtenus par des méthodes ne suivant pas l'heuristique initiales de Lifshitz mais en utilisant des techniques probabilistes (intégrales de Wiener et estimées de Donsker-Varadhan (voir [33, 34])). Ce point de vue établit le lien entre les asymptotiques de Lifshitz et certaines questions de l'étude du mouvement brownien dans des obstacles aléatoires (voir [42]).

Pour le modèle d'Anderson continu, des preuves des asymptotiques de Lifshitz à l'infimum du spectre suivant l'heuristique originale de Lifshitz furent développées dans les années 80 (voir [12, 13, 30, 41]). L'asymptotique obtenue n'est pas aussi précise que (3.1); on obtient seulement

**Théorème 3.1** ([12, 13, 30, 41]). *Supposons que  $V$  satisfait à (2.1). Alors,*

$$(3.2) \quad -\frac{d}{2} + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} \leq \liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log N(E)|}{\log E}$$

$$(3.3) \quad \limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log N(E)|}{\log E} \leq -\frac{d}{2} + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon}$$

Ce résultat a comme corollaire immédiat

**Corollaire 3.1.** *Supposons que  $V$  satisfait à (2.1). Si*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} = -\alpha, \quad \alpha \in [0, +\infty],$$

alors

$$(3.4) \quad \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log N(E)|}{\log E} = -\frac{d}{2} - \alpha.$$

**Preuve.** Pour comprendre l'origine des asymptotiques de Lifshitz, nous allons esquisser une preuve du Théorème 3.1. Notre preuve est semblable à celles détaillées dans [25, 26, 12, 13, 30, 41]. Afin de simplifier l'exposé, nous supposons que  $V$  est à support compact contenu dans  $\Lambda_1$ , le domaine fondamental de  $\mathbb{Z}^d$  et que  $H = -\Delta$ . Nous supposons aussi que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} = 0$ .

Soit  $\Lambda_l$ , le cube de  $\mathbb{R}^d$  de côté de longueur  $l$  centré en 0; soit  $H_{\omega,l}^D$  (resp.  $H_{\omega,l}^N$ ) l'opérateur  $H_\omega$  restreint à  $\Lambda_l$  avec conditions de Dirichlet (resp. Neumann) au bord. Soit  $E \in \mathbb{R}$  et  $\Theta_{\omega,l}^{D,N}(E)$ , la fonction de comptage des valeurs propres de  $H_{\omega,l}^{D,N}$  i.e. le nombre de valeurs propres de  $H_{\omega,l}^{D,N}$  inférieures ou égales à  $E$ . Alors, l'encadrement de Dirichlet-Neumann (voir [37, 10, 35]) garantit

$$(3.5) \quad \frac{1}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \mathbb{E}(\Theta_{\omega,l}^D(E)) \leq N(E) \leq \frac{1}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \mathbb{E}(\Theta_{\omega,l}^N(E)).$$

Comme  $V_\omega$  est borné, pour  $0 \leq E \leq 1$ , on sait que  $\Theta_{\omega,l}^N(E) \leq C \text{Vol}(\Lambda_l)$  (où  $C > 0$  est indépendante de  $l$  et  $\omega$ ); l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \mathbb{P}(\{\text{il existe une valeur propre de } H_{\omega,l}^D(E) \leq E\}) \\ \leq N(E) \leq \\ C \mathbb{P}(\{\text{il existe une valeur propre de } H_{\omega,l}^N(E) \leq E\}). \end{aligned}$$

Ceci peut se réécrire comme

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \mathbb{P}(\{\exists \varphi \in H_0^1(\Lambda_l), \|\varphi\| = 1, \langle H_{\omega,l}^D \varphi, \varphi \rangle \leq E\}) \\ \leq N(E) \leq \\ C \mathbb{P}(\{\exists \varphi \in H^1(\Lambda_l), \|\varphi\| = 1, \langle H_{\omega,l}^N \varphi, \varphi \rangle \leq E\}). \end{aligned}$$

Pour estimer  $N(E)$  pour  $E$  petit, il suffit de choisir  $l$  de façon à ce que le double logarithme des membres de droite et de gauche de (3.6) coïncident asymptotiquement.

Commençons par la minoration qui est la partie la plus simple de la preuve. Pour ce faire, choisissons  $\alpha > 0$  petit et  $l = E^{-(1+\alpha)/2}$ . Comme nous connaissons explicitement les valeurs propres de  $H_{\omega,l}^D$  (voir [37]), si  $\varphi_0 \in H_0^1$ ,  $\|\varphi_0\| = 1$  est l'état fondamental pour le laplacien de Dirichlet sur  $\Lambda_l$ , alors  $\langle -\Delta \varphi_0, \varphi_0 \rangle \leq CE^{1+\alpha}$  (où  $C > 0$  est une constante). Ainsi, si on choisit  $\omega_\gamma \leq E^{-1-\alpha}$  pour  $\gamma \in \Lambda_l$ , on obtient  $\langle V_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle \leq CE^{1+\alpha}$  où  $C > 0$  ne dépend que de la norme uniforme de  $V$ . Ceci démontre que, pour  $E$  petit et  $l = E^{-(1+\alpha)/2}$ , on a

$$\mathbb{P}(\{\exists \varphi \in H_0^1(\Lambda_l), \|\varphi\| = 1, \langle H_{\omega,l} \varphi, \varphi \rangle \leq E\}) \geq \mathbb{P}(\forall \gamma \in \Lambda_l, \omega_\gamma \leq E^{-1-\alpha}).$$

Cette dernière probabilité s'estime aisément comme les variables aléatoires sont indépendantes; comme  $\alpha$  est arbitrairement petit, on obtient (3.2).

La majoration requiert un peu plus de travail. En effet, la minoration s'obtient à partir d'une fonction test bien choisie, alors que la majoration nécessite une caractérisation de toutes les fonctions dans l'espace spectral associé au domaine d'énergie  $[0, E]$ .

Fixons  $l = E^{-(1-\alpha)/2}$  où  $0 < \alpha < 1$ . Supposons que  $\varphi \in H^1(\Lambda_l)$ ,  $\|\varphi\| = 1$  vérifie  $\langle H_{\omega,l}^N \varphi, \varphi \rangle \leq E$  i.e.

$$(3.7) \quad \langle -\Delta_l^N \varphi, \varphi \rangle + \langle V_\omega \varphi, \varphi \rangle \leq E.$$

Soit  $\varphi_0$ , l'état fondamental positif normalisé de  $-\Delta_l^N$  i.e. la fonction constante égale à  $\text{Vol}(\Lambda_l)^{-1/2}$  sur  $\Lambda_l$ . On peut décomposer  $\varphi = a\varphi_0 + \psi$  où  $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ . On calcule

$$\langle -\Delta_l^N \varphi, \varphi \rangle = a \langle -\Delta_l^N \varphi_0, \varphi_0 \rangle + \langle -\Delta_l^N \psi, \psi \rangle = \langle \psi, -\Delta_l^N \varphi \rangle = \langle -\Delta_l^N \psi, \psi \rangle.$$

Comme  $V_\omega$  est positif ou nul, l'équation (3.7) garantit

$$(3.8) \quad \langle -\Delta_l^N \psi, \psi \rangle \leq E.$$

D'autre part, un calcul explicite ([37]) montre que,  $(-\Delta_l^N)|_{\varphi_0^\perp} \geq C^{-1}l^{-2} = C^{-1}E^{1-\alpha}$ . L'équation (3.8) donne alors

$$(3.9) \quad \|\psi\|^2 \leq CE^\alpha.$$

Ceci implique en particulier que  $|a| = 1 + O(E^{\alpha/2})$ .

Fixons maintenant  $\beta \in (0, 1)$ . En utilisant la positivité de  $V_\omega$ , on calcule

$$\begin{aligned} \langle V_\omega \varphi, \varphi \rangle &= \|V_\omega^{1/2} \varphi\|^2 \\ &\geq \|aV_\omega^{1/2} \varphi_0\|^2 + \|V_\omega^{1/2} \psi\|^2 + 2\text{Re}(a \langle V_\omega \varphi_0, \psi \rangle) \\ &\geq (1 - \beta) \|aV_\omega^{1/2} \varphi_0\|^2 - (\beta^{-1} - 1) \|V_\omega^{1/2} \psi\|^2. \end{aligned}$$

En remplaçant ceci dans l'équation (3.7), en utilisant la positivité de  $-\Delta_l^N$ , le fait que  $V_\omega$  est borné et l'estimée (3.9), on obtient

$$(3.10) \quad \langle V_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle \leq (a(1-\beta))^{-1} (E + (\beta^{-1} - 1)CE^\alpha) \leq CE^\alpha.$$

D'autre part, comme  $V$  est supporté dans un cellule fondamentale de  $\mathbb{Z}^d$  et que  $\varphi_0$  est connue explicitement,  $\langle V_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle$  vaut  $(C\text{Vol}(\Lambda_l))^{-1} \sum_{\gamma \in \Lambda_l \cap \mathbb{Z}^d} \omega_\gamma$ . En résultat, choisissant  $\beta = 2$ , nous avons démontré que, pour  $\alpha \in (0, 1)$ , il existe  $C > 0$  tel que

$$(3.11) \quad \mathbb{P}(\{\text{there exists an eigenvalue of } H_{\omega,l}^N(E) \leq E\}) \leq \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \sum_{\gamma \in \Lambda_l} \omega_\gamma \leq CE^\alpha\right\}\right).$$

Une majoration de cette dernière probabilité est fournie par des estimées de grandes déviations classiques (voir [6, 5]). Comme  $\alpha$  est arbitrairement petit, on obtient (3.3). Ceci achève la preuve du Théorème 3.1 si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} = 0$ . Quand cette dernière condition n'est pas satisfaite, il faut modifier la dernière étape de la preuve.  $\square$

**Remarque 3.1.** Les idées guidant cette preuve remontent aux travaux de Lifshitz ([25, 26]). D'abord, dans des boîtes pas trop grandes, la densité d'états intégrée à l'énergie  $E$  est bien approchée par la probabilité d'avoir un état d'énergie inférieure à  $E$ . Comme l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont positives, elles doivent toutes deux être inférieures à  $E$ . La petitesse de l'énergie cinétique garantit un localisation en moment de l'état considéré. Le principe d'incertitude force alors cet état à être étendu dans l'espace des positions. Comme le potentiel est ergodique, l'énergie potentielle est une moyenne spatiale empirique du potentiel. Comme la moyenne spatiale du potentiel est strictement positive, la probabilité qu'une telle moyenne empirique soit petite est contrôlée par des estimées de grandes déviations. Ce qui fournit la décroissance exponentiellement rapide annoncée.

Ceci nous montre qu'il existe une échelle régissant les asymptotiques de Lifshitz : la taille minimale occupée par un état d'énergie cinétique inférieure à  $E$ . Cette taille dépend de la forme de l'énergie cinétique ; ceci explique pourquoi le bord inférieur du spectre et les bords internes peuvent se comporter différemment (voir la partie 4, et plus spécialement les Théorèmes 4.1, 4.6 et la partie 4.3.3).

**3.2. Potentiels de longue portée.** Dans ce cas, le phénomène de Lifshitz est un peu différent. En effet, l'asymptotique ne dépend du comportement local de l'énergie cinétique que si la distribution des variables aléatoires décroît suffisamment rapidement. On démontre

**Théorème 3.2** ([12, 13, 30, 41, 22, 15]). *Supposons que  $V$  vérifie (2.2). Définissons*

$$(3.12) \quad \kappa^- = -\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} \quad \text{and} \quad \kappa^+ = -\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon}.$$

Alors,

$$(3.13) \quad -\sup\left(\frac{d}{\nu-d}, \frac{d}{2} + \kappa^-\right) \leq \liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log N(E)|}{\log E},$$

$$(3.14) \quad \limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log N(E)|}{\log E} \leq -\sup\left(\frac{d}{\nu-d}, \frac{d}{2} + \kappa^+\right).$$

Ce résultat admet le corollaire immédiat suivant

**Corollaire 3.2.** *Supposons que  $V$  vérifie (2.2) et que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} = -\kappa, \quad \kappa \in [0, +\infty].$$

Alors,

$$(3.15) \quad \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0))|}{\log E} = -\sup\left(\frac{d}{\nu-d}, \kappa + \frac{d}{2}\right).$$

**Remarque 3.2.** On peut remarquer ici que si  $\frac{d}{\nu-d} > \kappa + \frac{d}{2}$ , alors, l'échelle régissant les asymptotiques de Lifshitz dans le cas de courte portée ne joue ici plus aucun rôle. En effet, comme le potentiel  $V$  décroît lentement, localement, le potentiel aléatoire  $V_\omega$  est une moyenne empirique de variables aléatoires. Cet effet de moyennisation est plus important que celui provenant de l'extension spatiale de l'état considéré.

Dans le cas de longue portée, l'exposant de Lifshitz ne dépend du principe d'incertitude i.e. de l'énergie cinétique que si  $\frac{d}{\nu-d} < \kappa + \frac{d}{2}$ . Il est donc raisonnable d'espérer que les estimées (3.13) et (3.14) sont valables pour les bords spectraux internes si la condition  $\frac{d}{\nu-d} > \kappa + \frac{d}{2}$ . Le Théorème 4.4 affirme que ceci est bien le cas.

#### 4. BORDS SPECTRAUX INTERNES

Dans ce cas, on sait beaucoup moins de choses. Ceci s'explique par le fait que le comportement en bord de spectre des opérateurs périodiques est mal connu. En effet, considérons une petite perturbation aléatoire d'un opérateur de Schrödinger périodique. Dans ce cas, il est raisonnable de supposer que, près d'un bord spectral de l'opérateur périodique, le hamiltonien aléatoire est la somme d'un terme d'énergie potentielle, le potentiel aléatoire, et d'un terme d'énergie cinétique constitué par les valeurs propres de Floquet de l'opérateur périodique. Sauf au voisinage de l'infimum du spectre (voir [1, 3]), les valeurs propres de Floquet sont mal connues en dimension plus grande que 1.

Nous nous contenterons de décrire les résultats pour le modèle d'Anderson continu. On notera tout de même que le modèle de Poisson n'a pas de lacunes internes.

**4.1. Potentiels à courte portée.** Les résultats connus dans ce cas dépendent de la dimension que l'on considère. Pour le cas général de la dimension  $d$ , on ne connaît que des résultats conditionnels. En dimension  $d = 1$  ou  $d = 2$ , on a de meilleurs résultats.

4.1.1. *En dimension  $d \geq 1$ .* En dimension 1, on connaît parfaitement le comportement des valeurs propres de Floquet d'un opérateur périodique (voir [7, 28, 29]); dans [31], (3.4) est démontrée à tous les bords de bandes spectrales sous l'hypothèse  $\limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{|\log E|} = 0$ .

En dimension supérieure à 1, nous énoncerons d'abord un résultat général. Ce résultat soulignera l'importance du comportement des valeurs propres de Floquet au bord du spectre.

4.1.2. *L'opérateur de Schrödinger périodique de référence.* L'opérateur de Schrödinger périodique de référence jouera un rôle privilégié dans notre étude. Cet opérateur dépend du bord spectral  $E_\pm$  que l'on considère, de ce que ce bord est un bord supérieur ou un bord inférieur d'une bande spectrale.

Rappelons que l'infimum (resp. supremum) essentiel des variables aléatoires  $(\omega_\gamma)_\gamma$  est  $\omega^-$  (resp.  $\omega^+$ ). Soit  $H^+$  (resp.  $H^-$ ) l'opérateur de Schrödinger périodique défini par  $H^- = H + \omega^- \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} V_\gamma$  (resp.  $H^+ = H + \omega^+ \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} V_\gamma$ ). On écrira  $H_\omega = H^- + V_\omega^-$  (resp.  $H_\omega = H^+ + V_\omega^+$ ) où  $V_\omega^- = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} \omega_\gamma^+ V_\gamma$  et  $\omega_\gamma^+ = \omega_\gamma - \omega^-$  (resp.  $V_\omega^+ = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} \omega_\gamma^- V_\gamma$  et  $\omega_\gamma^- = \omega_\gamma - \omega^+$ ). Les variables aléatoires  $(\omega_\gamma^+)_\gamma$  (resp.  $(\omega_\gamma^-)_\gamma$ ) sont indépendantes et identiquement distribuées et positives (resp. négatives). Les résultats de [11] impliquent

- $E_-$  est le bord supérieur d'une lacune de  $\Sigma$  si et seulement si  $E_-$  est le bord supérieur d'une lacune de  $H^-$ .
- $E_+$  est le bord inférieur d'une lacune de  $\Sigma$  si et seulement si  $E_+$  est le bord inférieur d'une lacune de  $H^+$ .

Supposons que  $E_-$  est le bord supérieur d'une lacune de  $\Sigma$ . Alors le bon opérateur de référence est  $H^-$ .

4.1.3. *Théorie de Floquet.* Nous rappelons maintenant quelques éléments de la théorie de Floquet de  $H^-$  (voir [37, 24, 39]). Le spectre de Floquet de  $H^-$  est le spectre de l'opérateur différentiel  $H^-$  agissant sur  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$  avec des conditions au bord quasi-périodiques. Pour  $\theta \in \mathbb{T}^* = \mathbb{R}^d / (\mathbb{Z}^d)^*$  ( $(\mathbb{Z}^d)^* = 2\pi\mathbb{Z}^d$  est le réseau dual  $\mathbb{Z}^d$  i.e. pour  $\gamma \in \mathbb{Z}^d$  et  $\gamma^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$ , on a  $\gamma\gamma^* \in 2\pi\mathbb{Z}$ ), sur  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$ , considérons le problème aux valeurs propres suivant

$$(4.1) \quad \begin{cases} H^- \varphi = E \varphi \\ \varphi(x + \gamma) = e^{i\gamma\theta} \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Comme  $H^-$  est elliptique, les valeurs propres de (4.1) sont discrètes; on les notera  $E_0(\theta) \leq E_1(\theta) \leq \dots \leq E_n(\theta) \leq \dots$  (on les répète selon leur multiplicité). Ce sont les *valeurs propres de Floquet* de  $H^-$ . Ces fonctions sont lipschitziennes en  $\theta$ ; quand elles sont simples, elles sont mêmes analytiques en  $\theta$ . De plus, la loi de Weyl implique

$$(4.2) \quad E_n(\theta) \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ (uniformément en } \theta).$$

Le spectre de  $H^-$  est donné par  $\sigma(H^-) = \cup_{n \geq 0} E_n(\mathbb{T}^*)$ . On définit  $n(E)$ , la densité d'états intégrée de  $H^-$  de la même façon que pour  $H_\omega$  (voir (1.2)). On démontre que (voir [37, 39])

$$n(E) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^*} \mathbf{1}_{E_j(\theta) \leq E} d\theta.$$

4.1.4. *Un résultat général.* Nous supposons toujours que  $E_- = 0$ . On démontre

**Théorème 4.1** ([20]). *Supposons que  $V$  satisfait à (2.1). Alors, on a*

$$\liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0))|}{\log E} \geq -\frac{d}{2} + \liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E}.$$

*Si, de plus,*

$$(4.3) \quad \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log(n(E) - n(0))}{\log E} = -\frac{d}{2},$$

*alors*

$$\limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0))|}{\log E} \leq -\frac{d}{2} + \limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E}.$$

On démontre également

**Théorème 4.2** ([20]). *Supposons que  $V$  satisfait à (2.1) et que*

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E} = -\alpha, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

*Alors,*

$$(4.4) \quad \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0))|}{\log E} = -\frac{d}{2} \iff \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log(n(E) - n(0))}{\log E} = -\frac{d}{2} - \alpha.$$

**Remarque 4.1.** L'assertion (4.4) reflète ce qui a été dit ci-dessus. En effet, dans le cas présent, le rôle de l'énergie cinétique est joué par les valeurs propres de Floquet de l'opérateur  $H^-$  atteignant la valeur 0; sous l'hypothèse (4.3) sur la densité d'états intégrée, le comportement de ces valeurs propres de Floquet au voisinage des points où elles s'annulent est connu : ces valeurs propres de Floquet s'annulent quadratiquement. Cette situation spéciale est due au fait que l'annulation quadratique est maximale. En général, la situation est beaucoup plus compliquée et la seule connaissance de la densité d'états intégrée de l'opérateur de référence ne suffit pas en général pour obtenir le comportement de la densité d'états de l'opérateur aléatoire (voir Théorème 4.6 et la remarque concluant la partie 4.3.3).

Dans [20], les Théorèmes 4.1 et 4.2 n'ont été démontrés que si  $\limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{|\log E|} = 0$ ; mais la méthode utilisée se généralise de façon évidente aux cas considérés ici.

Bien sûr, les Théorèmes 4.1 et 4.2 restent vrai au fond du spectre; On retrouve ainsi les résultats connus dans ce cas, car on sait qu'au bord inférieur du spectre d'un opérateur périodique, l'hypothèse (4.3) est vérifiée. On retrouve aussi les résultats connus en dimension 1, car on sait alors que l'hypothèse (4.3) est vérifiée à n'importe quel bord spectral.

La preuve des Théorèmes 4.1 et 4.2 repose sur un nouveau schéma d'approximation de la densité d'états intégrée : les approximations périodiques (voir [20]). L'encadrement Dirichlet-Neumann permettait d'obtenir une minoration et une majoration de la densité d'états intégrée. Le schéma d'approximations périodiques, lui, ne fournit pas d'encadrement mais une estimation de la distance à la limite; cette distance décroît exponentiellement avec la taille du cube utilisé pour l'approximation (voir [17]). Cette méthode



d'approximation a été utilisée avec succès pour analyser la densité d'états pour d'autres opérateurs aléatoires, voir [23, 21, 38, 8, 32].

**4.2. Potentiels à longue portée.** On démontre le résultat suivant

**Théorème 4.3.** *Supposons que  $V$  satisfait à (2.2). Supposons que l'énergie  $E = 0$  est le minimum d'une bande du spectre presque sûr  $\Sigma$ . Supposons, de plus, que*

$$\limsup_{E \rightarrow 0^+} \left| \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E} \right| = \kappa, \quad \kappa \in [0, +\infty).$$

Si  $\frac{d}{\nu - d} > \kappa + \frac{d}{2}$ , alors

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(E) - N(0))}{\log E} = -\frac{d}{\nu - d}.$$

Comme prévu, ce résultat est le même que celui obtenu dans le cas du fond du spectre. On est ici dans un cas classique c'est-à-dire que l'énergie cinétique n'a pas d'influence sur l'asymptotique de Lifshitz. Nous allons voir que ce n'est plus le cas si  $\frac{d}{\nu - d} < \kappa + \frac{d}{2}$ .

On peut dans certains cas compléter ce résultat. Pour cela, il nous faut introduire quelques objet supplémentaires.

**Théorème 4.4** ([22]). *Supposons que  $V$  satisfait à (2.2). Supposons de plus que l'énergie  $E = 0$  est le minimum d'une bande du spectre presque sûr  $\Sigma$ . Si  $\kappa^\pm$  sont définis par (3.12) alors, on a*

$$\liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0))|}{\log E} \geq -\sup \left( \frac{d}{2} - \liminf_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E}, \frac{d}{\nu - d} \right).$$

Supposons, de plus, que

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(n(E) - n(0))|}{\log E} = -\frac{d}{2}$$

alors, on a

$$\limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(N(E) - N(0))|}{\log E} \leq -\sup \left( \frac{d}{2} - \limsup_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E}, \frac{d}{\nu - d} \right).$$

On en déduit le corollaire suivant

**Corollaire 4.1.** *Supposons que  $V$  satisfait à (2.2). Supposons que l'énergie  $E = 0$  est le minimum d'une bande du spectre presque sûr  $\Sigma$ . Supposons, de plus, que*

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log \mathbb{P}(\{\omega_0 \leq E\})|}{\log E} = -\kappa, \quad \kappa \in [0, +\infty).$$

Alors,

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log |\log(n(E) - n(0))|}{\log E} = -\frac{d}{2} \implies \lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(E) - N(0))}{\log E} = -\sup \left( \frac{d}{2} + \kappa, \frac{d}{\nu - d} \right)$$

On voit que dans ce cas, le résultat est similaire à celui du cas à courte portée si  $\kappa + \frac{d}{2} > \frac{d}{\nu - d}$ . On obtient une transition entre les régimes quantique (si  $\kappa + \frac{d}{2} < \frac{d}{\nu - d}$ ) et classique (si  $\kappa + \frac{d}{2} > \frac{d}{\nu - d}$ ); le paramètre régissant cette transition est  $\kappa$ , le taux de décroissance de la distribution des variables aléatoires au bord de son support.

**4.3. Un résultat général en dimension  $d = 2$  pour les potentiels à courte portée.** Nous supposons maintenant que  $d = 2$ . Dans ce cas, nous obtiendrons des résultats sans hypothèses sur la densité d'états de l'opérateur périodique de référence. Nous supposons toujours que  $E_- = 0$ .

Dans les Théorèmes 4.1 et 4.2, Nous avons vu que le comportement de la loi de la variable aléatoire  $\omega_0$  au voisinage de ses extréma intervient dans l'asymptotique de Lifshitz. Dans la suite, nous supposons que la loi commune aux variables aléatoires  $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$  vérifie

$$(4.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log |\log \mathbb{P}\{|\omega_0 - \omega^-| \leq \varepsilon\}|}{-\log \varepsilon} = 0$$

Lorsque l'on considère le bord supérieur d'une bande spectrale, il convient de faire l'hypothèse symétrique sur le comportement de la loi des  $(\omega_\gamma)_\gamma$  au voisinage de leur maximum  $\omega^+$ .

**4.3.1. La densité d'états décroît exponentiellement aux bords des bandes spectrales.** Nous commencerons par un résultat tout-à-fait général : on ne suppose rien de plus sur la décroissance de  $V$  à l'infini que la condition de sommabilité (H.1). On démontre alors

**Théorème 4.5** ([19]). *Supposons que (H.1) est vérifiée. Supposons de plus que 0 est le bord inférieur d'une bande spectrale. Alors, on a*

$$(4.6) \quad \limsup_{\substack{E \rightarrow 0 \\ E \in \Sigma}} \frac{\log |\log |N(E) - N(0)||}{\log |E|} < 0.$$

Le Théorème 4.5 garantit que la densité d'états intégrée décroît exponentiellement à tous les bords de bandes spectrales. On ne connaît pas en général l'exposant de décroissance (dont l'existence n'est même pas garantie). Ceci est naturel au vu de résultats énoncés précédemment.

**4.3.2. Une estimation de l'exposant de décroissance.** Si on suppose que le potentiel  $V$  est à support compact ce que nous ferons dorénavant, on peut calculer l'exposant de décroissance.

Avant de pouvoir énoncer le résultat, il nous faut introduire une définition supplémentaire. Soit  $H^-$  l'opérateur de référence introduit dans la partie 4.1.2. Soit  $E$ , une énergie du spectre de  $H^-$ .  $E$  est dite *simple* si l'ensemble  $\{p \in \mathbb{N}; \exists \theta \in \mathbb{T}^*, E_p(\theta) = E\}$  est un singleton. On remarque que, par (4.2), cet ensemble est toujours fini. Le bord d'une bande spectrale de  $\Sigma$  sera dit simple s'il est simple pour  $H^-$  (resp.  $H^+$ ) et que c'est un bord inférieur (resp. supérieur). D'après [18], on sait, pour un potentiel périodique générique, les bords de bandes spectrales sont simples.

On démontre

**Théorème 4.6** ([19]). *Supposons que (H.1) est vérifiée et que  $V$  est à support compact. Supposons de plus que 0 est un bord simple de  $\Sigma$ . Alors, il existe  $0 < \alpha \leq +\infty$  tel que*

$$(4.7) \quad \lim_{\substack{E \rightarrow 0 \\ E \in \Sigma}} \frac{\log |\log |N(E) - N(0)||}{\log |E|} = -\alpha.$$

L'exposant  $\alpha$  est appelé *exposant de Lifshitz*. Son calcul n'est pas évident ; il est l'objet de la partie qui suit.

**4.3.3. Le calcul de l'exposant de Lifshitz.** On suppose que 0 est le bord supérieur d'une lacune de  $\Sigma$ . Comme 0 est simple, on appelle  $E_{n_0}(\cdot)$ , l'unique valeur propre de Floquet s'annulant. On définit  $\mathcal{S} = \{\theta \in \mathbb{T}^*; E_{n_0}(\theta) = 0\}$ . Alors, il existe  $\eta > 0$  tel que

- pour  $n < n_0$  et  $\theta \in \mathbb{T}^*$ ,  $E_n(\theta) < -\eta$  ;
- pour  $n > n_0$  et  $\theta \in \mathbb{T}^*$ ,  $E_n(\theta) > \eta$ .

Ceci implique que, pour  $\theta$  voisin de  $\mathcal{S}$ , les valeurs propres de Floquet  $E_{n_0}(\theta)$  sont des valeurs propres simples ; par conséquent, la fonction  $\theta \mapsto E_{n_0}(\theta)$  est analytique réelle dans un voisinage de  $\mathcal{S}$ . L'exposant de Lifshitz dépend de l'annulation de  $E_{n_0}$  en  $\mathcal{S}$  ainsi que de la courbure de  $\mathcal{S}$ .

Pour le décrire précisément, rappelons quelques notions de géométrie analytique. Pour  $\mathcal{E}$ , un sous-ensemble du premier quadrant fermé de  $\mathbb{R}^2$ , on définit son *enveloppe convexe extérieure* comme l'enveloppe convexe de la réunion des rectangles  $R_{xy} = [x, \infty) \times [y, \infty)$ , où la réunion est prise sur les  $(x, y) \in \mathcal{E}$ .

Pour  $\theta_0 \in \mathcal{S}$ , on considère le diagramme de Newton de  $E_{n_0}$  en  $\theta_0$ , i.e.,

- (1) on développe  $E_{n_0}$  en sa série de Taylor en  $\theta_0$ ,  $E_{n_0}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i,j} a_{ij}(\theta^1 - \theta_0^1)^i (\theta^2 - \theta_0^2)^j$ ,  $\theta = (\theta^1, \theta^2)$ .
- (2) on forme l'enveloppe convexe extérieure des points  $(i, j)$  tels que  $a_{ij} \neq 0$ . C'est un polygone convexe, appelé *polygone de Newton*.
- (3) La frontière de ce polygone est le *diagramme de Newton*.

L'exposant de décroissance de Newton est alors défini comme suit. Le diagramme de Newton consiste en un certain nombre de segments de droite. On prolonge chacun de ces segment afin qu'il intersecte la première bissectrice des axes  $\theta^1 = \theta^2$ . L'ensemble des intersections ainsi obtenues est un ensemble de points  $(a_k, a_k)$ . On prend l'inverse du plus grand des  $a_k$  que l'on nomme  $\hat{\alpha}(E_{n_0}, \theta_0)$ ; c'est l'*exposant de décroissance de Newton* en  $\theta_0$ . On définit  $\alpha(E_{n_0}, \theta_0) = \min\{\hat{\alpha}(E_{n_0} \circ T_0, \theta_0) : T_0(\cdot) = \theta_0 + T(\cdot - \theta_0), T \in SL(2, \mathbb{R})\}$ .

On définit de la même façon  $\alpha(E_{n_0}, \theta)$  pour chaque  $\theta$  dans  $\mathcal{S}$ , le lieu de zéros de  $E_{n_0}$ . Alors, l'*exposant de Lifshitz*  $\alpha$  est donné par

$$(4.8) \quad \alpha = \min_{\theta \in \mathcal{S}} \alpha(E_{n_0}, \theta).$$

L'exposant de Lifshitz  $\alpha$  est positif comme  $\theta \mapsto \alpha(E_{n_0}, \theta)$  est une fonction positive, semi-continue inférieurement et que  $\mathcal{S}$  est compact.

Pour conclure cette partie, comparons  $N$  à  $n$ , la densité d'états de l'opérateur de référence  $H^-$ . A un facteur constant près,  $n(\varepsilon) - n(0)$  se comporte comme le volume de  $\{\theta \in \mathbb{T}^*; E_{n_0}(\theta) \leq \varepsilon\}$ . L'équivalence (4.4) aurait pu faire penser qu'au bord d'une bande spectrale,  $N$  se comporte comme  $e^{-1/n}$  (au double logarithme près). On voit ici que ceci sera faux en général si l'ensemble  $\mathcal{S}$  a une courbure non nulle. Par exemple, si on suppose que  $E_{n_0}(\theta)$  s'annule à l'ordre constant  $q$  sur une courbe, et que l'ordre maximal d'annulation de la courbure de cette courbe est  $m$  (i.e.  $m = 0$  si la courbure ne s'annule pas) alors  $\alpha = \frac{m+3}{q(m+2)}$  est le volume aura l'exposant  $\frac{1}{q}$ .

**4.3.4. Les idées principales de la preuve du Théorème 4.6.** Suivant les idées développées dans [20], on montre que l'étude de la densité d'états intégrée de  $H_\omega$  au voisinage de 0 peut se ramener à l'étude de la densité d'états intégrée d'un opérateur aléatoire discret (i.e. agissant sur  $\mathbb{Z}^2$ ). L'opérateur discret est la somme d'un terme d'énergie cinétique, la seule valeur propre de Floquet s'annulant, et d'un terme d'énergie potentiel, le potentiel aléatoire projeté sur l'espace spectral associé à  $H^-$  correspondant aux énergie voisines de 0. Cet opérateur appelé *réduit* peut être réalisé comme un opérateur agissant sur le tore  $\mathbb{T}^*$ . Pour faire cette réduction, nous avons besoin de savoir que le bord spectral 0 de  $\Sigma$  correspond à un unique bord spectral de  $H^-$ . Pour cela, nous utilisons la positivité du potentiel  $V$ , et le fait que lorsque l'on ajoute la perturbation  $V_\omega$ , le spectre se trouvant sous 0 de passe pas au-dessus de 0. Ceci est garanti par la connexité du support des variables aléatoires. On pourrait remplacer cette dernière hypothèse par une hypothèse de petitesse de la perturbation aléatoire  $V_\omega$ , essentiellement, que la perturbation est plus petite que la lacune de  $H^-$  sous l'énergie 0.

La prochaine étape consiste à montrer, qu'avec une bonne précision, la probabilité que l'opérateur réduit (restreint à une cube suffisamment grand) ait une valeur propre inférieure à  $E$  approxime la densité d'états de l'opérateur réduit à l'énergie  $E$ . Si le bord de bande considéré est simple, il nous reste alors à estimer la probabilité que, pour  $\delta > 0$  petit, il existe une fonction  $u \in L^2(\mathbb{T})$  telle que les coefficients de Fourier  $u$  sont à support dans  $[-M, M] \times [-M, M] \subset \mathbb{Z}^2$  et telle que

$$(4.9) \quad \langle E_{n_0} \cdot u, u \rangle_{L^2(\mathbb{T}^*)} + \langle v_\omega u, u \rangle_{L^2(\mathbb{T}^*)} \leq \delta$$

Ici,  $E_{n_0} \cdot u$  est l'opérateur de multiplication par la valeur propre de Floquet  $E_{n_0}$  et  $v_\omega$  est le potentiel aléatoire réduit. Remarquons que les deux termes de (4.9) sont positifs ou nuls. Dans le cas général i.e. si 0 n'est pas simple, les multiplicités rendent la situation plus compliquée.

Enfin, nous estimons cette probabilité. Cette estimation est une question de théorie des séries de Fourier aléatoires; en effet, la condition (4.5) nous permet de remplacer les variables aléatoires  $(\omega_\gamma)_\gamma$  par des variables aléatoires de Bernoulli i.i.d.

Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{T}^*$  réelle analytique à valeurs positives ou nulles. Soient  $\delta > 0$  et  $M < \infty$ , deux paramètres et  $S$ , un sous-ensemble aléatoire du carré  $[-M, M] \times [-M, M]$  (dans  $\mathbb{Z}^2$ ) de densité  $\frac{1}{2}$ .

Soit  $P(M, \delta)$ , la probabilité qu'il existe une fonction  $u \in L^2(\mathbb{T})$  telle que

$$\int_{T^2} f(\theta) |u(\theta)|^2 < \delta \|u\|_2^2 \quad \text{and} \quad \text{supp}(\hat{u}) \subset S.$$

Les coefficients de Fourier de  $u$  doivent être supporté sur l'ensemble aléatoire  $S$ , et  $u$  doit être supportée au voisinage des zéros de  $f$ . On étudie alors le comportement de la probabilité  $P(M(\delta), \delta)$  quand  $\delta \rightarrow 0$ , et  $M = M(\delta) \rightarrow \infty$  dans un régime bien choisi. On obtient  $P(M(\delta), \delta)$  se comporte environ comme  $e^{-\delta^{-\alpha}}$ .

On peut alors appliquer cette estimée en prenant pour  $f$  la valeur propre de Floquet  $E_{n_0}$ ; ceci permet de achever les preuves des Théorèmes 4.5 et 4.6 de façon similaire au cas uni-dimensionnel discret traité dans [17].

Un exposant de décroissance de Newton similaire à celui introduit ci-dessus intervient dans les estimations d'intégrales oscillantes (voir [43, 36]); notre étude montre que cet exposant contrôle le comportement de certaines séries de Fourier aléatoires.

Bien que dans [19] nous n'étudions que le cas de l'opérateur de Schrödinger aléatoire, les méthodes développées s'appliquent sans aucun doute à de nombreuses autres familles d'opérateurs aléatoires : opérateurs acoustiques aléatoires ([32]), champs magnétiques aléatoires ([8]), etc.

#### RÉFÉRENCES

- [1] S. Agmon. On positive solutions of elliptic operators with periodic coefficients in  $L^2(\mathbf{R}^n)$ , spectral results and extension to elliptic operators on Riemannian manifolds. Dans I. Knowles and R. Lewis, éditeurs, *Differential equations*, pages 7–17, Birmingham, 1984. North-Holland.
- [2] J.-M. Barbaroux, J.-M. Combes, and P. Hislop. Landau hamiltonians with unbounded random potentials. *Letters in Mathematical Physics*, 40(4) :355–369, 1997.
- [3] M. Sh Birman. Perturbations of operators with periodic coefficients. Dans *Schrödinger Operators : standard and non-standard*, Dubna, 1988.
- [4] R. Carmona and J. Lacroix. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [5] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviation techniques and applications*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [6] J.-M. Deuschel and D. Stroock. *Large deviations*, volume 137 de *Pure and applied Mathematics*. Academic Press, 1989.
- [7] M. Eastham. *The spectral theory of periodic differential operators*. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
- [8] F. Ghribi. *Asymptotique de Lifshitz pour des opérateurs de Schrödinger à champ magnétique aléatoire*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, Villetaneuse. en préparation.
- [9] B. Helffer and A. Mohamed. Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential. *Duke Math. J.*, 92(1) :1–60, 1998.
- [10] W. Kirsch. Random Schrödinger operators. Dans A. Jensen, H. Holden, éditeurs, *Schrödinger Operators*, number 345 in *Lecture Notes in Physics*, Berlin, 1989. Springer Verlag, Proceedings, Sonderborg, Denmark 1988.
- [11] W. Kirsch and F. Martinelli. On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential. *Communications in Mathematical Physics*, 85 :329–350, 1982.
- [12] W. Kirsch and F. Martinelli. Large deviations and Lifshitz singularities of the integrated density of states of random hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 89 :27–40, 1983.
- [13] W. Kirsch and B. Simon. Lifshitz tails for the Anderson model. *Journal of Statistical Physics*, 38 :65–76, 1985.
- [14] W. Kirsch, P. Stollmann, and G. Stolz. Localization for random perturbations of periodic Schrödinger operators. *Random Oper. Stochastic Equations*, 6(3) :241–268, 1998.
- [15] F. Klopp. Une remarque à propos des asymptotiques de Lifshitz internes. Disponible sur <http://zeus.math.univ-paris13.fr/~klopp/publi.html>.
- [16] F. Klopp. Localization for some continuous random Schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 167 :553–570, 1995.
- [17] F. Klopp. Band edge behaviour for the integrated density of states of random Jacobi matrices in dimension 1. *Journal of Statistical Physics*, 90(3-4) :927–947, 1998.
- [18] F. Klopp and J. Ralston. Endpoints of the spectrum of periodic operators are generically simple. *Methods and Applications of Analysis*, 7(3) :459–464, 2000.
- [19] F. Klopp and T. Wolff. Lifshitz tails for 2-dimensional random Schrödinger operators. *Jour. d'Analyse Math.* A paraître.
- [20] F. Klopp. Internal Lifshitz tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, 98(2) :335–396, 1999.

- [21] F. Klopp. Precise high energy asymptotics for the integrated density of states of an unbounded random Jacobi matrix. *Rev. Math. Phys.*, 12(4) :575–620, 2000.
- [22] F. Klopp. Internal lifshitz tails for schrödinger operators with random potentials. *Jour. Math. Phys.*, 2002. A paraître.
- [23] F. Klopp and L. Pastur. Lifshitz tails for random Schrödinger operators with negative singular Poisson potential. *Comm. Math. Phys.*, 206(1) :57–103, 1999.
- [24] P. Kuchment. *Floquet theory for partial differential equations*, volume 60 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser, Basel, 1993.
- [25] I. M. Lifshitz. Structure of the energy spectrum of impurity bands in disordered solid solutions. *Soviet Physics JETP*, 17 :1159–1170, 1963.
- [26] I. M. Lifshitz. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. *Soviet Physics Uspekhi*, 7 :549–573, 1965.
- [27] I.M. Lifshitz, S.A. Gredeskul, and L.A. Pastur. *Introduction to the theory of disordered systems*. Wiley, New-York, 1988.
- [28] H. McKean and P. van Moerbeke. The spectrum of Hill’s equation. *Inventiones Mathematicae*, 30 :217–274, 1975.
- [29] H. P. McKean and E. Trubowitz. Hill’s surfaces and their theta functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6) :1042–1085, 1978.
- [30] G. Mezincescu. Lifshitz singularities for periodic operators plus random potentials. *Journal of Statistical Physics*, 49 :1081–1090, 1987.
- [31] G. Mezincescu. Internal Lifshitz singularities for one dimensional Schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 158 :315–325, 1993.
- [32] H. Najjar. *Asymptotique de la densité d’états intégrée des modèles aléatoires continus*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, Villetaneuse, November 2000.
- [33] S. Nakao. On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential. *Japan Journal of Mathematics*, 3 :117–139, 1977.
- [34] L. Pastur. Behaviour of some Wiener integrals as  $t \rightarrow +\infty$  and the density of states of the Schrödinger equation with a random potential. *Teor.-Mat.-Fiz.*, 32 :88–95, 1977. (in russian).
- [35] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [36] D. H. Phong and E. M. Stein. The Newton polyhedron and oscillatory integral operators. *Acta Math.*, 179(1) :105–152, 1997.
- [37] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol IV : Analysis of Operators*. Academic Press, New-York, 1978.
- [38] O. Saad. *Comportement en grandes énergies de la densité d’états du modèle d’Anderson non borné*. Thèse de doctorat, Université de Paris 13, Villetaneuse. en préparation.
- [39] J. Sjöstrand. Microlocal analysis for periodic magnetic Schrödinger equation and related questions. Dans *Microlocal analysis and applications*, volume 1495 des *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, 1991. Springer Verlag.
- [40] M. M. Skriganov. Proof of the Bethe-Sommerfeld conjecture in dimension 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 248(1) :39–42, 1979.
- [41] P. Stollmann. Lifshitz asymptotics via linear coupling of disorder. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2(3) :279–289, 1999.
- [42] A.S. Sznitman. *Brownian motion, obstacles and random media*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [43] V. Varchenko. Newton polyhedra and estimations of oscillatory integrals. *Functional Analysis and its Applications*, 8 :175–196, 1976.

(Frédéric Klopp) DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, INSTITUT GALILÉE, U.M.R. 7539 C.N.R.S, UNIVERSITÉ DE PARIS-NORD, 99 AVENUE J.-B. CLÉMENT, F-93430 VILLETANEUSE, FRANCE  
*E-mail address:* klopp@math.univ-paris13.fr