SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Séverine Rigot

Ensembles quasiminimaux pour le périmètre avec contrainte de volume et rectificabilité uniforme

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° IX, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A9_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

ENSEMBLES QUASIMINIMAUX POUR LE PERIMETRE AVEC CONTRAINTE DE VOLUME ET RECTIFIABILITE UNIFORME

Séverine RIGOT

1 Énoncés des résultats

Les quasiminima que nous allons considérer sont des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ dont on contrôle la variation du périmètre sous l'effet de perturbations compactes à volume constant. En gros, on sait que cette variation est, au moins pour de petites perturbations, négligeable devant le périmètre initial. Et on s'intéresse à leurs propriétés de régularité. On rencontre ce type de conditions de quasiminimalité dans certains problèmes variationnels où entrent en compétition des énergies de surface et de volume. Nous en donnerons un exemple dans le paragraphe 2. Nous allons commencer par définir de manière plus précise les quasiminima et citer certains résultats de régularité. Dans le paragraphe 3, nous donnerons une esquisse de la preuve du principal résultat donné ici (Théorème 1.10). Pour plus de détails sur les autres résultats cités (et d'autres propriétés des quasiminima), on pourra se reporter à [11].

Rappelons d'abord ce qu'est le périmètre d'un ensemble.

Définition 1.1 *Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. Le périmètre de G (dans $\mathbb{R}^n$), noté $P(G, \mathbb{R}^n)$, est:*

$$P(G, \mathbb{R}^n) := \sup \left\{ \int_G \operatorname{div} f \, dx \,;\; f \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ \|f\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

On dit que G est à périmètre fini si $P(G, \mathbb{R}^n) < +\infty$.

En d'autres termes, les ensembles G à périmètre fini sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ dont le gradient au sens des distributions de leur fonction caractéristique est représentable par une mesure (à valeurs vectorielles) et $P(G, \mathbb{R}^n)$ en désigne la variation totale. On dispose alors d'une mesure (positive), $P(G, .)$, qui est supportée dans la frontière ∂G de G. Si ∂G est suffisamment régulière, cette mesure coï ncide avec n'importe quelle autre définition raisonnable de la mesure de surface sur ∂G. Pour plus de détails sur la théorie des ensembles à périmètre fini, on pourra consulter par exemple [8] ou [14].

Dans toute la suite les ensembles considérés seront toujours supposés mesurables et on omettra en général de le repréciser. On désignera par $|.|$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Revenons maintenant aux quasiminima. On se fixe une fois pour toutes un réel $m > 0$ (ce sera le volume fixé des quasiminima) et une fonction $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(t) = o(t^{\frac{n-1}{n}})$ au voisinage de 0 (qui mesurera la déviation à la minimalité des quasiminima).

Définition 1.2 *On dira que $G \subset \mathbb{R}^n$ est un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume (Q.M.V.en abrégé) si $|G| = m$ et si*

$$P(G, \mathbb{R}^n) \leq P(G', \mathbb{R}^n) + g(|G \triangle G'|), \tag{1.3}$$

pour tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $|G'| = m$ et $G \triangle G' = (G \backslash G') \cup (G' \backslash G) \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Remarques

• **1.4** Si $g \equiv 0$, il s'agit juste de minimiser la surface de la frontière à volume fixé. C'est le problème isopérimétrique standard et l'on sait que dans ce cas les solutions sont, à un ensemble de mesure nulle près, des boules, c'est-à-dire des ensembles connexes très réguliers.

• **1.5** Quand g n'est pas identiquement nulle, (1.3) nous dit que si G est un $Q.M.V.$ alors toute perturbation compacte G' de G à volume constant ne peut diminuer le périmètre que d'au plus $g(|G \triangle G'|)$. Par exemple, si $G \triangle G' \subset B_r$, où B_r est une boule centrée sur ∂G de rayon r petit, $P(G, B_r)$ sera de l'ordre de r^{n-1} (au moins si l'on croit déjà que ∂G aura de bonnes propriétés de régularité) alors que $|G \triangle G'|$ est au pire de l'ordre de r^n et la déviation à la minimalité $g(|G \triangle G'|)$ est négligeable devant le périmètre initial $P(G, B_r)$.

• **1.6** Insistons maintenant sur le fait que l'on ne s'autorise dans (1.3) que des perturbations ***à volume constant***. Sans cette contrainte de volume (et en localisant la condition de quasiminimalité), il s'agirait d'un problème de surfaces "quasiminimales" pour lesquelles des propriétés de régularité sont connues (voir notamment [6], [7], [1], [5]... ou encore [2], [13] et [12] pour une formulation similaire à celle adoptée ici). Signalons aussi que des propriétés de régularité partielle ont été démontrées pour les ensembles qui minimisent localement le périmètre avec une contrainte de volume ([9]). Ici il va falloir tenir compte à la fois du caractère quasiminimal (et non plus minimal) des ensembles considérés et de la contrainte de volume.

Avant d'énoncer le théorème principal, définissons d'abord les propriétés que nous allons démontrer pour nos quasiminima.

Définition 1.7 *On dit qu'une partie fermée S de $\mathbb{R}^n$ est **Ahlfors-régulière** (de dimension $n-1$) s'il existe une constante $C > 1$ et une mesure borélienne μ supportée par S telles que, pour tout $x \in S$ et tout $r \leq 1$, on ait*

$$C^{-1} r^{n-1} \leq \mu(B(x,r)) \leq C r^{n-1}. \tag{1.8}$$

Malgré son nom, l'Ahlfors-régularité est uniquement une notion de taille. Par exemple, le Cantor à quatre coins du plan est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1 mais ne possède pas de bonnes propriétés de régularité. Il s'agit d'une manière uniforme en tout point de S et invariante par changement d'échelle de dire que S est de dimension $n-1$.

Définition 1.9 *On dit qu'un ouvert G de $\mathbb{R}^n$ vérifie **la condition B** s'il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $x \in \partial G$ et tout $r \leq 1$, il existe deux boules B_1 et B_2, toutes deux de rayon $C'r$, telles que $B_1 \subset B(x,r) \cap G$ et $B_2 \subset B(x,r) \backslash \overline{G}$.*

La condition B est une manière de dire qu'uniformément en tout point de la frontière et à toute échelle, la frontière sépare bien l'ensemble de son complémentaire. Ce n'est pas une condition très forte en soi. Elle devient beaucoup plus forte une fois conjuguée à l'inégalité de droite de (1.8) appliquée à $S = \partial G$. C'est de la tension entre la condition topologique de séparation de la condition B et la condition de taille de (1.8) (qui force la frontière à ne pas être trop grande) que naî t la force de cette conjonction. En dimension 2, si G est ouvert, vérifie la condition B et si ∂G est Ahlfors-régulière, alors ∂G est contenue dans une courbe Ahlfors-régulière. En dimension n quelconque, ∂G est uniformément rectifiable et même contient de "grands morceaux de graphes lipschitziens" ([4]). La théorie de la rectifiabilité uniforme a été largement développée par G. David et S. Semmes. Très grossièrement, c'est ce que l'on obtient quand on cherche à rendre quantitative et invariante par changement d'échelle la notion de rectifiabilité. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemple [3] et [4].

Théorème 1.10 ([11]) *Soit G un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume. Il existe un unique ouvert G_0, équivalent à G au sens où $|G\triangle G_0| = 0$, tel que*

$$\partial G_0 \text{ est Ahlfors-régulière,} \tag{1.11}$$

$$G_0 \text{ vérifie la condition B,} \tag{1.12}$$

avec des constantes implicites C et C' dans (1.11) *et* (1.12) *qui peuvent être choisies en fonction uniquement de n, m et g.*

Dans toute la suite on appellera constantes de régularité les constantes implicites qui interviennent dans (1.11) et (1.12). On dira qu'une constante est universelle si elle ne dépend que de n, m et g.

Remarques

• **1.13** Tout ensemble équivalent à un quasiminimum est encore un quasiminimum. Il est donc logique d'avoir à "nettoyer" les quasiminima avant de pouvoir parler de bonnes propriétés de régularité de leur frontière. Et l'ouvert G_0 donné par le théorème 1.10 est encore un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume. En d'autres termes, ce théorème nous dit donc que l'on peut toujours se ramener à des quasiminima qui sont des ouverts à frontière Ahlfors-régulière et qui vérifient la condition B avec de plus des constantes de régularité universelles. Dans toute la suite nous appellerons quasiminima normalisés de tels quasiminima.

• **1.14** L'unicité provient du fait que deux ouverts équivalents qui vérifient tous deux la condition B sont égaux.

• **1.15** Le point essentiel dans le théorème 1.10 est que l'on peut trouver des constantes de régularité dans (1.11) et (1.12) *universelles*, c'est-à-dire qui ne dépendent que des données du problème et pas du quasiminimum particulier considéré.

• **1.16** On peut imposer une contrainte supplémentaire aux quasiminima (ainsi qu'aux bons candidats à la compétition dans (1.3)). On se fixe une boule $B_R = B(0, R)$ telle que $|B_R| \geq 2m$ et on dit que G est un $Q.M.V.$ de B_R si $G \subset B_R$, $|G| = m$ et G vérifie (1.3) pour tout $G' \subset B_R$ tel que $|G'| = m$. Les conclusions du théorème 1.10 sont encore vérifiées pour les $Q.M.V.$ de B_R avec des constantes de régularité qui ne dépendent toujours que de n, m et g, mais ni du quasiminimum considéré ni du rayon R de la boule B_R. Nous utiliserons cette remarque dans l'exemple du paragraphe 2.

La difficulté majeure de la démonstration du théorème 1.10 consiste à s'affranchir de manière adéquate de la contrainte de volume. Nous y reviendrons dans le paragraphe 3 en essayant de donner les grandes lignes de la démonstration. Signalons quand même tout de suite que dès que l'on dispose de bonnes informations de régularité sur la frontière des quasiminima, ceci ne sera plus un problème. Une fois le théorème 1.10 acquis, on montre en effet que l'on peut totalement s'affranchir de cette contrainte de volume et les quasiminima normalisés avec contrainte de volume vérifient le même type de condition de quasiminimalité que (1.3) pour n'importe quelle petite perturbation, *y compris celles qui ne préservent pas le volume*. Plus précisément, si G est un quasiminimum normalisé avec contrainte de volume, alors

$$P(G, B(x,r)) \leq (1+\omega(r))P(G', B(x,r)), \tag{1.17}$$

pour tout $x \in \partial G$, tout $r \leq r_0$, où r_0 est universel, et tout G' tel que $G \triangle G' \subset\subset B(x,r)$, avec une fonction ω qui ne dépend que de n, m et g et qui vérifie $\omega(r) = o(1)$ au voisinage de 0. Par exemple si $g(t) = Ct^p$ avec $p > (n-1)/n$, on a $\omega(r) = C'r^{2\alpha}$ avec $2\alpha = \min(np - (n-1), 1)$. On dispose alors de résultats de régularité partielle ([2], [13], [12] auxquels on peut se reporter pour d'autres formes de la fonction ω pour lesquelles on a aussi des résultats de régularité partielle).

Théorème 1.18 ([11], [12]) *Si $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > (n-1)/n$, alors il existe une constante $C' > 0$, qui ne dépend que de n, m et g, telle que, si G est un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume normalisé, B une boule centrée sur ∂G de rayon $r \leq 1$, alors il existe une boule $\tilde{B} \subset B$ centrée sur ∂G, de rayon $\geq C'r$ telle que $\partial G \cap \tilde{B}$ soit un graphe $(n-1)$-dimensionnel de classe $C^{1,\alpha}$ avec des constantes de régularité $C^{1,\alpha}$ universelles et avec $2\alpha = \min(np - (n-1), 1)$.*

Ce théorème ne dit pas que ∂G est un graphe de classe $C^{1,\alpha}$ au voisinage de chacun de ses points et en général elle ne l'est pas. Signalons cependant que l'on sait que l'ensemble des points de singularité de ∂G est de dimension de Hausdorff au plus $n-8$ et que l'on dispose de résultats de régularité complète en dimension $n \leq 7$ (voir [12]).

Théorème 1.19 ([11], [12]) *Si $n \leq 7$ et $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > (n-1)/n$, alors il existe $r_0 > 0$ qui ne dépend que de n, m et g, tel que si G est un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume normalisé et $x \in \partial G$, il existe $r \geq r_0$ tel que $\partial G \cap B(x,r)$ soit un graphe $(n-1)$-dimensionnel de classe $C^{1,\alpha}$ avec des constantes de régularité $C^{1,\alpha}$ universelles et avec $2\alpha = \min(np - (n-1), 1)$.*

Pour finir cette rapide présentation des propriétés des quasiminima avec contrainte de volume, signalons que l'on peut obtenir un peu plus que le théorème 1.10 (on ne suppose plus ici que $g(t) = Ct^p$). On montre en particulier que chacune des composantes connexes W d'un quasiminimum normalisé G (ainsi que celles de l'intérieur de son complémentaire) sont des sous-ensembles normalisés de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'elles ont une frontière Ahlfors-régulière et vérifient la condition B avec des constantes universelles. Couplé aux hypothèses à caractère global que l'on a faites sur nos quasiminima (à savoir qu'ils sont à périmètre fini et ont une mesure de Lebesgue égale à m), ce résultat permet d'obtenir la description suivante.

Théorème 1.20 ([11]) *Il existe $\delta_0 > 0$ universel tel que, si G est un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume normalisé et W est une composante connexe de G ou $\mathbb{R}^n \backslash \overline{G}$, alors $|W| \geq \delta_0$. De plus, il existe $N_0 > 0$ universel tel que G et $\mathbb{R}^n \backslash \overline{G}$ aient au plus N_0 composantes connexes. D'autre part, on a*

$$H^{n-1}(\partial W \cap \partial W') = 0,$$

où W et W' sont deux composantes connexes distinctes de G ou de $\mathbb{R}^n \backslash \overline{G}$.

Nous reviendrons dans le paragraphe 2 sur cette description des composantes connexes dans le cas particulier où $g(t) = Ct^p$ dans lequel on a quelques informations supplémentaires.

2 Une application

Des exemples de quasiminima pour le périmètre avec contrainte de volume sont donnés par les solutions de certains problèmes variationnels dans lesquels entrent en compétition des énergies de surface et de volume. C'est d'ailleurs un modèle physique décrit par F. Otto ([10]) qui nous a servi de motivation initiale: une goutte de fluide visqueux ferromagnétique et incompressible est placée entre deux lamelles horizontales très proches (pour rendre le problème plan), on lui applique un champ magnétique vertical et on cherche à décrire ce qui se passe à l'équilibre, c'est-à-dire quand le minimum d'énergie est atteint. F. Otto s'était quant à lui intéressé au problème dynamique.

Mathématiquement, on se place en dimension $n \geq 2$ quelconque et l'énergie est donnée par:

$$E(G) = P(G, \mathbb{R}^n) + \iint_{G \times G} K(x-y)\, dx\, dy,$$

pour $G \subset \mathbb{R}^n$, où $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. Le premier terme correspond à la tension superficielle et est un terme de cohésion. Le second correspond à l'effet du champ magnétique et est un terme de dispersion. Si $m > 0$ est le volume initial de la goutte, on cherche à décrire les minima à volume fixé m de cette énergie E correspondant à l'infimum:

$$I := \inf\{E(G);\ |G| = m\}.$$

Théorème 2.1 *L'infimum I est atteint. Si $G \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $|G| = m$ et $E(G) = I$, alors G est un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte volume avec une fonction $g(t) = 2\|K\|_{L^1} t$.*

Si l'on croit à l'existence de minima, il est facile de voir qu'ils sont alors des quasiminima pour le périmètre avec contrainte de volume. En effet, si G réalise I et si $G' \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $|G'| = m$, on a $E(G) \leq E(G')$ et on en déduit

$$\begin{aligned} P(G, \mathbb{R}^n) &\leq P(G', \mathbb{R}^n) + \iint_{G' \times G'} K(x-y)\, dx\, dy - \iint_{G \times G} K(x-y)\, dx\, dy \\ &\leq P(G', \mathbb{R}^n) + 2\|K\|_{L^1} |G \triangle G'|. \end{aligned}$$

Quitte à nettoyer les minima de E, on sait donc qu'ils possèdent de bonnes propriétés de régularité (voir le paragraphe précédent) et l'on dispose aussi d'une description de leur composantes connexes. Très grossièrement parlant, le théorème 1.20 dit qu'à l'équilibre la goutte a éclaté en un certain nombre de gouttelettes qui ne sont cependant jamais trop nombreuses et relativement bien séparées les unes des autres. De plus ici $g(t) = 2\|K\|_{L^1} t$ et l'on peut obtenir une propriété un peu plus forte sur la position relative des composantes connexes:

$$H^s(\partial W \cap \partial W') = 0 \quad \text{pour tout } s > n - 8,$$

et si $n \leq 7$ (et donc en particulier dans le cas $n = 2$),

$$\mathrm{dist}(W, W') \geq d_0,$$

où d_0 est une constante universelle et W et W' désignent deux composantes connexes distinctes d'un minimum normalisé pour E (voir la remarque 4.3.4 de [11]).

Reste à montrer que l'infimum I est atteint. Signalons que si le noyau K n'est pas supposé à support compact (comme dans le modèle originel de F. Otto), il n'y a pas existence de minima en général. Ici, nous allons l'obtenir en utilisant le contrôle universel dont on dispose sur les constantes de régularité pour les $Q.M.V.$ de B_R (voir la remarque (1.16)), l'invariance par translation du noyau $K(x - y)$ et le fait que K est à support compact.

Classiquement, pour obtenir l'existence de minima, on considère une suite minimisante $(G_k)_{k \geq 1}$ telle que $|G_k| = m$ et $E(G_k) \leq I + 1/k$, et on cherche à montrer que à la limite (quitte à extraire une sous-suite) on obtient un ensemble G solution du problème, c'est-à-dire tel que $|G| = m$ et $E(G) = I$. Des théorèmes classiques de compacité et de semi-continuité dans l'espace BV des fonctions à variation bornée assurent que, à extraction d'une sous-suite près, on peut toujours supposer que

$$\begin{gathered} \mathbf{1}_{G_k} \longrightarrow \mathbf{1}_G \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \\ P(G, \mathbb{R}^n) \leq \liminf_{k \to +\infty} P(G_k, \mathbb{R}^n), \end{gathered}$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de $A \subset \mathbb{R}^n$. Ne disposant que d'une convergence dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, rien ne dit que $|G| = m$ (on peut même imaginer des cas où $G = \emptyset$) et on ne peut conclure directement.

Pour contourner cet obstacle, on se restreint dans un premier temps à des candidats inclus dans une boule fixe B_R, de rayon $R > 0$, telle que $|B_R| \geq 2m$, et on pose:

$$I(R) := \inf\{E(G);\ |G| = m,\ G \subset B_R\}.$$

On peut appliquer les théorèmes de compacité et de semi-continuité évoqués plus haut pour obtenir l'existence d'ensembles optimaux $G_R \subset B_R$ tels que $|G_R| = m$ et $E(G_R) = I(R)$. Et G_R est un $Q.M.V.$ de B_R avec $g(t) = 2\|K\|_{L^1} t$. En utilisant le théorème 1.10 et la remarque 1.16, on peut donc supposer que G_R est ouvert, à frontière Ahlfors-régulière et vérifie la condition B avec des constantes implicites dans ces propriétés qui ne dépendent que de n, m et $\|K\|_{L^1}$. Le contrôle universel sur la constante qui intervient dans l'Ahlfors-régularité permet d'estimer indépendamment de R le nombre maximal de boules B_i de rayon 1 qu'il faut pour recouvrir ∂G_R:

$$\partial G_R \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_i$$

avec $p \leq C(n, m, \|K\|_{L^1})$. Ensuite, en utilisant le fait que K est à support compact et l'invariance par translation de $(x, y) \mapsto K(x - y)$, on montre que, quitte à réordonner les B_i et à les translater, on peut se ramener au cas où

$$\mathrm{dist}(B_i, \cup_{j<i} B_j) \leq C,$$

où C ne dépend que de n, m, $\|K\|_{L^1}$ et diam(supp K). En d'autres termes, on vient de construire à partir de G_R un candidat $\tilde{G}_R$ tel que

$$\mathrm{diam}(\tilde{G}_R) \leq C'(n, m, \|K\|_{L^1}) \quad \text{et} \quad E(\tilde{G}_R) = E(G_R) = I(R).$$

On en déduit alors facilement que $I(R)$ stationne si R est assez grand puis que $I(R) = I$ pour R assez grand. Et finalement que I est atteint. On peut se reporter au chapitre 5 de [11] pour plus de détails sur cet exemple.

3 Quelques idées de démonstration

Nous allons essayer de donner les principales idées de la démonstration du théorème 1.10 en évitant de trop rentrer dans les détails techniques. Nous allons nous limiter ici au cas où $g(t) = C_0 t$ et G désignera dans toute la suite un quasiminimum pour le périmètre avec contrainte de volume.

La technique générale pour obtenir les informations qui nous intéressent est la suivante. On fait subir à G des petites perturbations puis on utilise la condition de quasiminimalité (1.3) pour conclure. Toute la difficulté vient du fait que l'on ne s'autorise que des perturbations qui préservent le volume. Le point essentiel sera donc de réussir à modifier à volume constant le quasiminimum G tout en gardant un bon contrôle sur la variation du périmètre, c'est-à-dire avec des estimations où n'interviennent que des constantes universelles.

Dans toute la suite, la lettre C désignera une constante strictement positive dont la valeur pourra changer à chaque occurrence.

Une première propriété facile à obtenir est l'inégalité de droite dans l'Ahlfors-régularité que nous allons démontrer avec $\mu = P(G, .)$ (voir (1.8)). On considère $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \leq 1$ et on pose

$$G' = (G \backslash B(x, r)) \cup B,$$

où $B \subset B(x, r)$ est une boule telle que $|B| = |G \cap B(x, r)|$. On a

$$\begin{aligned} P(G', \mathbb{R}^n) &\leq P(G, \mathbb{R}^n) - P(G, B(x, r)) + P(B(x, r), \mathbb{R}^n) + P(B, \mathbb{R}^n) \\ &\leq P(G, \mathbb{R}^n) - P(G, B(x, r)) + C r^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$|G' \triangle G| \leq |B(x, r)| \leq C r^{n-1} \qquad (\text{car } r \leq 1).$$

En utilisant (1.3), on en déduit que

$$P(G, B(x, r)) \leq C r^{n-1}, \tag{3.1}$$

avec une constante C qui ne dépend que de la dimension et de g, ce qui est exactement ce que l'on voulait.

L'inégalité de gauche dans l'Ahlfors-régularité et la condition B sont plus délicates à obtenir. On introduit pour cela une fonction h qui mesure la proportion de G et de son complémentaire dans une boule $B(x, r)$ et qui est définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ par

$$h(x, r) := r^{-n} \min(|G \cap B(x, r)|, |B(x, r) \backslash G|).$$

Le lemme clé est le suivant:

Lemme 3.2 *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *et* $r_0 \leq 1$*, ne dépendant que de* n*,* m *et* g*, tels que, pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et tout* $r \leq r_0$*,*

$$h(x,r) \leq \varepsilon_0 \;\Rightarrow\; h(x,r/2) \leq h(x,r)/2.$$

Avant de donner les grandes lignes de la démonstration de ce lemme, expliquons rapidement comment on en déduit le théorème 1.10. Il s'agit d'un résultat général qui n'utilise plus la propriété de quasiminimalité de G: si G est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie (3.1) et le lemme 3.2, alors il existe un ouvert équivalent à G dont la frontière est Ahlfors-régulière et qui vérifie la condition B, avec des constantes dans ces deux propriétés qui ne dépendent que de la dimension, de la constante C de (3.1) et des constantes ε_0 et r_0 du lemme 3.2.

En effet, une première conséquence automatique du lemme 3.2 est que

$$r \leq 2r_0 \text{ et } h(x,r) \leq \varepsilon_1 \;\Rightarrow\; |G \cap B\,(x,r/2)| = 0 \text{ ou } |B\,(x,r/2) \setminus G| = 0, \tag{3.3}$$

où ε_1 ne dépend que de n et de la constante ε_0 du lemme 3.2. On l'obtient en appliquant le lemme 3.2 aux couples $(y, r/2^k)$, $y \in B(x,r/2)$, $k \geq 1$, pour montrer que $B(x,r/2)$ ne contient soit aucun point de densité de Lebesgue de G soit aucun point de densité de Lebesgue du complémentaire. On pose ensuite

$$\begin{aligned} G_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \text{il existe } r > 0 \text{ tel que } |B(x,r)\setminus G| = 0\},\\ G_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \text{il existe } r > 0 \text{ tel que } |B(x,r) \cap G| = 0\},\\ S &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x,r) > \varepsilon_1 \text{ pour tout } r \leq 2r_0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que G_0 et G_1 sont ouverts. En utilisant (3.3) et des résultats classiques sur les points de densité de Lebesgue, on montre que G_0, G_1 et S forment une partition de $\mathbb{R}^n$ et que

$$\begin{gathered} |G \triangle G_0| = |(\mathbb{R}^n \setminus G) \triangle G_1| = 0,\\ S = \partial G_0 = \partial G_1. \end{gathered}$$

Le fait que S est Ahlfors-régulière découle de (3.1) (on a $P(G,.) = P(G_0,.)$) et, pour l'autre inégalité, de la définition de S et de l'inégalité de Sobolev-Poincaré qui nous dit ici que

$$C(r^n h(x,r))^{\frac{n-1}{n}} \leq P(G, B(x,r)),$$

où C ne dépend que de la dimension. Enfin on obtient la condition B en utilisant l'Ahlfors-régularité de S et un argument de recouvrement. Et G_0 est l'ouvert qui répond à la question.

Nous allons maintenant nous concentrer sur la démonstration du lemme 3.2. Ce qui suit n'en est en aucun cas une démonstration complète et rigoureuse. On peut se reporter à [11] pour plus de détails. La démonstration se fait en deux temps. On va d'abord obtenir le lemme 3.2 avec des constantes ε_0 et r_0 qui dépendent de G. Cela permettra d'obtenir l'ouvert équivalent à G qui a les propriétés qui nous intéressent mais avec des constantes de régularité qui dépendent a priori du quasiminimum particulier dont on est parti. Dans un second temps on montre que l'on peut en fait trouver des constantes de régularité universelles.

On se fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \leq r_0$, où $r_0 \leq 1$ sera choisi petit plus tard. Pour fixer les idées, nous n'allons considérer que le cas où

$$h(x,r) = r^{-n}|G \cap B(x,r)| \leq \varepsilon_0,$$

où ε_0 sera choisi petit plus tard.

Comme la proportion de G dans $B(x,r)$ est petite, il est naturel de chercher à éliminer $G \cap B(x,r)$. Pour bien contrôler la surface supplémentaire ajoutée par cette manipulation au bord de la boule $B(x,r)$, on choisit d'abord $t \in [r/2, r]$ tel que

$$P(G \backslash B(x,t), \mathbb{R}^n) = P(G, \mathbb{R}^n) - P(G, B(x,t)) + H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)),$$

et

$$H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)) \leq C \frac{|G \cap B(x,r)|}{r} \leq C r^{n-1} h(x,r).$$

La première égalité est vérifiée pour presque tout $t > 0$ et on obtient la seconde inégalité en utilisant Fubini et Tchebytchev et C ne dépend que de la dimension. On pose

$$G' = G \backslash B(x,t).$$

On a $|G'| = m - \nu$ avec $\nu = |G \cap B(x,t)|$ et G' n'est pas un bon candidat à la comparaison. On va donc maintenant chercher à rajouter la masse ν manquante loin de $B(x,r)$ pour pouvoir utiliser (1.3). On veut donc construire à partir de G' un ensemble G'' de la forme $G'' = G' \cup A$ tel que $|G''| = m$. Si $\Delta = P(G'', \mathbb{R}^n) - P(G', \mathbb{R}^n)$, on aura, par choix de t,

$$\begin{aligned} P(G'', \mathbb{R}^n) &= \Delta + P(G', \mathbb{R}^n) \\ &\leq \Delta + P(G, \mathbb{R}^n) - P(G, B(x,t)) + H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)) \\ &\leq \Delta + P(G, \mathbb{R}^n) - P(G, B(x,t)) + C r^{n-1} h(x,r), \end{aligned}$$

et

$$|G'' \triangle G| \leq |G'' \triangle G'| + |G' \triangle G| \leq 2\nu \leq C r^{n-1} h(x,r) \qquad (\text{car } r \leq 1).$$

En utilisant (1.3), on en déduit

$$P(G, B(x,t)) \leq \Delta + C r^{n-1} h(x,r).$$

Et en utilisant l'inégalité de Sobolev-Poincaré en supposant ε_0 assez petit (en fonction uniquement de la dimension), on aura

$$C_n \nu^{\frac{n-1}{n}} \leq P(G, B(x,t)) \leq \Delta + C r^{n-1} h(x,r),$$

où C_n ne dépend que de la dimension. Si l'on arrive à construire G'' tel que

(3.4)
$$\Delta \leq \frac{C_n}{2} \nu^{\frac{n-1}{n}},$$

on pourra en déduire que

$$(r/2)^n h(x, r/2) \leq \nu \leq C r^n h(x,r)^{\frac{n}{n-1}} \leq C \varepsilon_0^{\frac{1}{n-1}} r^n h(x,r),$$

ce qui donne exactement la conclusion du lemme 3.2 pourvu que ε_0 soit choisi assez petit.

Il reste donc à montrer que si ε_0 et r_0 sont assez petits, on peut construire G'' vérifiant (3.4), avec de plus ε_0 et r_0 qui ne dépendent que des données du problème pour obtenir des constantes de régularité universelles.

Nous allons commencer par décrire un cas simple (et irréaliste) dans lequel on arrive à construire G''. Bien que l'on n'ait aucune chance de se trouver dans cette situation idéale, elle va nous permettre d'expliquer quels genres d'endroits on veut trouver pour construire G'' et comment on le fait. Pour fixer les idées, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$. On suppose que l'on a trouvé une boule B centrée en 0, de rayon s, telle que $B\cap B(x,r)=\emptyset$ et $G\cap B=\{(z,u)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,;\ u\leq 0\}\cap B$. On va rajouter à $G\cap B$ la masse ν sous la forme du sous-graphe d'une fonction f bien choisie. On pose

$$A:=\{(z,u)\in B^s_{n-1}\times\mathbb{R}\,;\ 0<u<f(z)\},$$

où B^s_{n-1} désigne la boule $(n-1)$-dimensionnelle de rayon s et f est une fonction cloche définie de la manière suivante. On se fixe $\tilde f\in C_0^\infty(B^{1/2}_{n-1})$, $0\leq\tilde f\leq 1$, et on pose

$$f(z)=\lambda\tilde f(z/s)\quad\text{avec}\quad\lambda\int_{B^{1/2}_{n-1}}\tilde f=\nu/s^{n-1},$$

c'est-à-dire que λ est choisi de telle sorte que $|A|=\nu$. On veut s'assurer dans un premier temps que $A\subset B$. Pour cela il suffit de vérifier que $\lambda\leq Cs$ avec $C<1$ qui ne dépend que de la dimension, c'est-à-dire

$$\nu\leq\delta s^n,\tag{3.5}$$

où δ est une petite constante qui ne dépend que de la dimension et de la fonction $\tilde f$ que l'on s'est fixée. On pose alors

$$G'':=G'\cup A.$$

On a bien $|G''|=m$. Evaluons maintenant Δ. On a en utilisant (3.5),

$$\Delta=\int_{B^s_{n-1}}\left(\sqrt{1+|\nabla f(z)|^2}-1\right)\,dz\leq C\|\nabla f\|_\infty s^{n-1}\leq C\delta^{\frac{1}{n}}\nu^{\frac{n-1}{n}},$$

et on en déduit (3.4) pourvu que δ soit assez petit.

En d'autres termes, ce qu'il faut retenir de ce qui précède est que si l'on arrive à trouver un endroit de taille s où ∂G est "suffisamment plate", on peut rajouter la masse ν avec un contrôle sur la variation du périmètre comme dans (3.4) et ceci pourvu que (3.5) soit vérifié, c'est-à-dire que ν soit beaucoup plus petit que s^n.

Dans un premier temps, on utilise les propriétés générales des ensembles à périmètre fini pour trouver un tel endroit. Il existe pour ces ensembles une notion de frontière réduite, et les points de cette frontière réduite sont les points en lesquels on peut définir une normale généralisée à la frontière (voir par exemple [8]). De manière très grossière, si y est un point de la frontière réduite de G, on peut trouver un petit voisinage de y dans lequel on va pouvoir effectuer l'ajout de masse voulu (pas exactement de manière aussi simple que dans le cas décrit plus haut, mais, au moins moralement, il s'agit du même genre de manipulation). Le problème est que l'on ne dispose pas d'informations a priori sur la taille de ce voisinage, qui dépend en particulier de la géométrie de G. On ne pourra donc conclure que si ε_0 et r_0 sont assez petits en fonction de la taille de ce voisinage (voir l'énoncé du lemme 3.2 et (3.5)). On en déduit quand même la première partie du théorème 1.10, c'est-à-dire l'existence d'un ouvert G_0 équivalent à G, dont la frontière est Ahlfors-régulière et qui vérifie la condition B. Mais les constantes implicites qui interviennent dans ces deux propriétés dépendent a priori du quasiminimum G de départ.

Pour alléger les notations, continuons d'appeler G le quasiminimum G_0 que l'on vient de construire à partir du quasiminimum de départ et qui vérifie les propriétés de régularité qui nous intéressent avec pour l'instant de mauvaises constantes. La dernière étape consiste maintenant à montrer que l'on peut en fait trouver deux constantes ε_0 et r_0 universelles dans le lemme 3.2. On raisonne par l'absurde et on montre que l'on peut trouver ε_0 et r_0 *universels* telles que si $x \in \mathbb{R}^n$, $r \le r_0$ et si

$$h(x,r) \le \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad h(x,r/2) > h(x,r)/2, \tag{3.6}$$

alors il existe $r_1 \in (r/2, 5r/8)$ et $r_2 \in (7r/8, r)$ tels que

$$G \cap (\overline{B}(x,r_2) \backslash B(x,r_1)) = \emptyset. \tag{3.7}$$

C'est une manière quantitative de dire que si G rencontre $B(x,r/2)$, si $G \cap B(x,r)$ n'est pas tros gros, et si ∂G quasiminimise la surface de la frontière à volume fixé, alors ∂G ne peut rencontrer le bord de $B(x,r)$. L'étape cruciale pour démontrer ce résultat est la proposition 3.2.1 de [11]. Son énoncé ainsi que sa démonstration sont assez techniques et nous n'allons pas rentrer dans le détail ici. Disons juste que les ingrédients essentiels de la preuve sont le fait que l'on sait déjà que G vérifie (1.11) et (1.12) (même si ce n'est qu'avec des mauvaises constantes) et bien sûr la propriété de quasiminimalité de G. Celle-ci permet notamment de se ramener au cas d'ensembles quasi-isopérimétriques (voir le lemme 3.8 pour la définition). On utilise alors une approximation des ensembles quasi-isopérimétriques par des boules, qui sont des ensembles très réguliers, ce qui est bien pour nous en vue des ajouts de masse. Cette approximation est donnée par le lemme suivant:

Lemme 3.8 ([11, Lemme 1.3.13]) *Pour tout $0 < \delta < 1$, il existe $\varepsilon > 0$, ne dépendant que de n et de δ, tel que pour tout $F \subset \mathbb{R}^n$ ε-quasi-isopérimétrique, c'est-à-dire tel que*

$$|F| < +\infty \quad et \quad P(F,\mathbb{R}^n) \le C_n(1+\varepsilon)|F|^{\frac{n-1}{n}},$$

il existe une boule B centrée sur F telle que $|B| = |F|$ et telle que $|F \triangle B| \le \delta |F|$.

Ici C_n est la constante isopérimétrique, $C_n = |B(0,1)|^{(1-n)/n} P(B(0,1),\mathbb{R}^n)$. Si $\varepsilon = 0$, alors F est, à un ensemble de mesure nulle près, une boule. On démontre ce lemme grâce à un argument de type concentration-compacité.

Appelons "mauvais couple" un couple $(x,r) \in \mathbb{R}^n \times (0,r_0)$ qui vérifie (3.6). Une fois (3.7) acquis, on montre que loin d'un mauvais couple (x,r), il n'y en a aucun autre. En effet si (x',r') est un mauvais couple tel que $B(x,r) \cap B(x',r') = \emptyset$ et si r_1 et r_2 sont associés à (x,r) et r'_1 et r'_2 à (x',r') par (3.7), on peut toujours se ramener au cas où $G \cap B(x,r_1)$ et

$G \cap B(x', r_1')$ sont quasi-isopérimétriques. Sinon, on remplace $G \cap B(x, r_1)$ (resp. $G \cap B(x', r_1')$) par une boule de même mesure dans $B(x, r_1)$ (resp. $B(x', r_1')$) et on utilise la condition de quasiminimalité (1.3) pour contredire (3.6). On utilise ensuite l'approximation du lemme 3.8 pour trouver des endroits dans $B(x, r_1)$ et $B(x', r_1')$ où ∂G est relativement plate (ce qui signifie ici que ∂G est proche d'une portion de sphère au sens des mesures de surface) et surtout dont on contrôle la taille de manière universelle. Le fait que l'on dispose de couronnes autour de x et x' de taille comparable à respectivement r et r' qui sont vides assure d'autre part que l'on dispose d'assez d'espace autour de ces points pour effectuer des ajustements de masse. Finalement si par exemple $|G \cap B(x', r_1')| \leq \tau |G \cap B(x, r_1)|$ avec $\tau < 1$ universel, on élimine $G \cap B(x', r_1')$ et l'on peut maintenant rajouter la masse perdue dans $B(x, r_2)$ avec le contrôle qui nous intéresse sur la variation du périmètre. On déduit ensuite de la condition de quasiminimalité une contradiction avec (3.6). Les autres cas se traitent de manière similaire.

On sait donc maintenant que si (x, r) est un mauvais couple, alors on a la conclusion du lemme 3.2 pour tout x' tel que $\mathrm{dist}(x', x) \geq 2r_0$ et tout $r' \leq r_0$ avec un ε_0 et un r_0 *universels.* On en déduit alors que l'on dispose de constantes de régularité universelles pour ces bons couples. Il ne reste plus qu'à utiliser les propriétés des ensembles dont la frontière est Ahlfors-régulière et qui vérifient la condition B pour trouver hors de $B(x, r)$ des endroits où ∂G est relativement plate (voir ce qu'on appelle la situation standard dans [11, figure 1.3]). Le point essentiel est que l'on en contrôle la taille en fonction des constantes de régularité qui sont maintenant universelles aux endroits qui nous intéressent. On peut se reporter au lemme 4.1.2 de [11] pour voir précisément comment on effectue dans ce cas les ajustements de masse. Pour en revenir au mauvais couple (x, r), on élimine alors $G \cap B(x, r_1)$ et l'on rajoute la masse perdue dans l'un des bons endroits que l'on vient de trouver. Et on utilise (1.3) pour contredire (3.6). Ce qui signifie qu'il n'y a en fait aucun mauvais couple, et que l'on dispose donc de constantes ε_0 et r_0 universelles dans le lemme 3.2. Et ceci achève ce que l'on voulait dire de la démonstration du théorème 1.10.

References

[1] F. J. Almgren, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Amer. Math. Soc. **4** (1976), no. 165, viii+199pp.

[2] L. Ambrosio and E. Paolini, *Partial regularity for quasi minimizers of perimeter*, Ricerche Mat. **48** (1999), 167–186.

[3] G. David and S. Semmes, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 38, Amer. Math. Soc., 1993.

[4] ———, *Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 2, 855–889.

[5] ———, *Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension*, Mem. Amer. Math. Soc. **144** (2000), no. 687, viii+132 pp.

[6] E. De Giorgi, *Frontiere orientate di misura minima*, Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1960-1961.

[7] H. Federer, *The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two arbitrary codimension*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 767–771.

[8] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, vol. 80, Birkhäuser, 1984.

[9] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 1, 25–37.

[10] F. Otto, *Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids: a mean-field theory*, Arch. Rational Mech. Anal. **141** (1998), no. 1, 63–103.

[11] S. Rigot, *Ensembles quasi-minimaux avec contrainte de volume et rectifiabilité uniforme*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **82** (2000), v+104pp.

[12] ———, *Uniform partial regularity of quasi minimizers for the perimeter*, Cal. Var. Partial Differential Equations **10** (2000), no. 4, 389–406.

[13] I. Tamanini, *Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Quaderni Del Dipartimento Di Matematica Dell' Universita' Di Lecce, 1984.

[14] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, 1989.