



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz



ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

# Equations aux Dérivées Partielles

## 1999-2000

Sylvia Serfaty

**Vorticité dans les équations de Ginzburg-Landau de la supraconductivité**

*Séminaire É. D. P.* (1999-2000), Exposé n° VI, 14 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_1999-2000\\_\\_\\_\\_A6\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A6_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Vorticité dans les équations de Ginzburg-Landau de la supraconductivité

Sylvia Serfaty

## I Présentation du modèle

On étudie le modèle de Ginzburg et Landau, selon lequel l'énergie d'un supraconducteur soumis à un champ magnétique  $h_{ex}$  s'écrit (après renormalisations) :

$$(1) \quad J(u, A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_A u|^2 + |h - h_{ex}|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (1 - |u|^2)^2.$$

Cette fonctionnelle a suscité de nombreux travaux mathématiques, on peut citer, sans exhaustivité, les travaux de Berger, Chen, Sternberg, Rubinstein, Chapman, Schatzman, Baumann, Phillips, Bethuel, Riviere, Lin, Du, Bolley, Helffer, Bonnet, Monneau... Cependant la compréhension du comportement de ses points critiques, selon les valeurs du paramètre  $h_{ex}$ , n'est pas achevée. Pour une présentation mathématique, on peut se référer à [BR2] ou [Ru].

### I.1 Notations

Le supraconducteur est assimilé à un cylindre vertical de section  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , domaine régulier, borné et simplement connexe. Le champ appliqué est supposé vertical, uniforme et constant d'intensité  $h_{ex}$ . Le champ magnétique induit dans le matériau est  $h = \text{rot } A$ ,  $A$  étant le potentiel-vecteur associé, qui appartient à  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , tandis que  $\nabla_A = \nabla - iA$  est le gradient covariant.

$u$  est une fonction à valeurs complexes de  $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ , appelée "paramètre d'ordre", qui décrit l'état local du supraconducteur. D'un point de vue microscopique,  $|u(x)|$  est la densité locale de "paires de Cooper", les paires d'électrons supraconducteurs par lesquels on explique la supraconductivité. L  où  $|u(x)| \simeq 1$ , on est dans la "phase supraconductrice", tandis que, là où  $|u(x)| \simeq 0$ , dans la "phase normale".

$\kappa$  est le paramètre de Ginzburg-Landau, constante adimensionnée qui ne dépend que du matériau. Ici, on se restreint aux grands  $\kappa$  (limite de London), ce qui implique que le supraconducteur est de type-II.  $\kappa$  est souvent assez grand dans la réalité (de l'ordre de 50 pour les supraconducteurs à haute température critique). On pose donc

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa}$$

et on considérera le régime asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ceci renforce en particulier la discrimination  $|u| \simeq 0$  ou  $|u| \simeq 1$ .

La fonctionnelle d'énergie (1) est invariante de jauge (c'est une théorie de jauge abélienne), c'est-à-dire que pour tout  $\Phi \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,

$$J(ue^{i\Phi}, A + \nabla\Phi) = J(u, A).$$

Les seules quantités physiques sont celles qui sont invariantes de jauge : par exemple l'énergie  $J$ , le champ magnétique  $h$ , le courant  $j = (iu, \nabla_A u)$ , et les zéros (ou "vortex") de  $u$ .

On adopte la notation  $\nabla^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ . Les équations de Ginzburg-Landau associées à la recherche de points critiques de  $J$  sont

$$(G.L) \begin{cases} -\nabla_A^2 u = \kappa^2 u(1 - |u|^2) \\ -\nabla^\perp h = (iu, \nabla_A u). \end{cases}$$

avec les conditions de bord

$$\begin{cases} (\nabla_A u) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On peut déjà remarquer que ce système admet toujours une solution triviale telle que  $(u \equiv 0, h \equiv h_{ex})$ , qui correspond à l'état normal (absence de supraconductivité).

## I.2 Comportement physique

Les supraconducteurs ont la particularité d'avoir, au-dessous d'une certaine température critique  $T_c$ , une résistivité nulle, et ainsi de laisser circuler des courants permanents sans perte d'énergie. De plus, les supraconducteurs de type-II ont des propriétés particulières en présence de champ magnétique.

Il existe deux valeurs critiques  $H_{c_1} = O(|\log \varepsilon|)$  et  $H_{c_2} = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$  du champ appliqué pour lesquelles des transitions de phase se produisent. Pour résumer, on peut dire que le supraconducteur peut être essentiellement dans trois états différents :

**premier état :**  $0 \leq h_{ex} < H_{c_1}$ .  $u$  est environ égal à une constante de module 1. Le supraconducteur est partout en phase supraconductrice. Le champ magnétique extérieur est repoussé par création d'un contre-champ par des courants supraconducteurs (effet Meissner). Il ne pénètre qu'en surface sur une profondeur de pénétration normalisée à 1. Le champ induit vérifie approximativement l'équation de London :

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta h + h = 0 & \text{dans } \Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**deuxième état :**  $H_{c_1} \leq h_{ex} < H_{c_2}$ . Le supraconducteur est dans la phase supraconductrice sauf dans de petites zones de taille caractéristique  $\varepsilon = \frac{1}{\kappa}$  appelées vortex (ou tourbillons) qui sont des filaments verticaux aux centres desquels le matériau est en phase normale.

Chacun de ces vortex est entouré par un courant supraconducteur et porte un flux de champ magnétique quantifié. La charge topologique — ou degré — du vortex est le degré topologique de l'application à valeurs  $S^1$ ,  $\frac{u}{|u|}$ , définie sur un petit cercle  $C$  autour du zéro.

C'est aussi  $\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$  si  $\varphi$  est la phase de  $u$ . Elle est en général égale à 1.

Le champ magnétique est maximal dans les vortex. Plus précisément, appelant  $a_i$  les centres des vortex, il vérifie formellement (dans la limite  $\kappa \rightarrow +\infty$ ) l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta h + h = 2\pi \sum_i \delta_{a_i} & \text{dans } \Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Lorsque  $h_{ex} = H_{c_1}$ , les premiers vortex deviennent favorables; puis, lorsque  $h_{ex}$  augmente, ils sont de plus en plus nombreux, et tendent, pour minimiser leur répulsion, à s'organiser en réseau triangulaire (réseau d'Abrikosov).

**troisième état :**  $H_{c_2} \leq h_{ex}$ . La supraconductivité disparaît,  $u = 0$  partout et  $h = h_{ex}$ . (La solution minimisante est la solution normale).

Pour plus de détails concernant l'aspect physique, on renvoie à [dG, SST, T, TT].

## II Rappel de quelques résultats autour de $H_{c_1}$

### II.1 Calcul de $H_{c_1}$

$H_{c_1}$  est défini comme la plus petite valeur de  $h_{ex}$  pour laquelle l'énergie minimale des configurations à 1 vortex de degré 1 devient inférieure ou égale à l'énergie des configurations sans vortex.

On définit  $\xi_0$  comme étant l'unique solution de

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta \xi_0 + \xi_0 = -1 & \text{dans } \Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\xi_0$  est régulière, ne dépend que du domaine  $\Omega$ , et  $-1 < \xi_0 \leq 0$ . C'est la fonction qui permet de tenir compte des effets de bord. On pose  $C_1 = (2 \max |\xi_0|)^{-1}$ .

**Théorème 1 (voir [S1])**

$$H_{c_1} = \frac{1}{2 \max |\xi_0|} |\log \varepsilon| + O(1) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ce résultat avait été conjecturé dans [BR2]. On a ainsi un développement asymptotique cohérent avec celui des physiciens (en  $O(\log \kappa)$ ) et la dépendance implicite de  $H_{c_1}$  en fonction du domaine (de sa taille, sa forme...). Dans tous les cas  $C_1 > \frac{1}{2}$ , et  $C_1 \rightarrow \frac{1}{2}$  quand la taille du domaine tend vers l'infini. (La constante  $\frac{1}{2}$  coïncide avec le calcul d'Abrikosov fait pour  $\mathbb{R}^2$ .) Le théorème de [S1], ainsi qu'un résultat de [S3], fournissent aussi l'existence d'une solution sans vortex (solution Meissner), pour  $h_{ex} \leq H_{c_1}$ , mais aussi pour  $H_{c_1} < h_{ex} < \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$  (pour un certain  $\alpha > 0$ ). Cette solution est très proche de  $(1, h_{ex} \nabla^\perp \xi_0)$ ,

et est unique au sens où elle est la seule qui minimise l'énergie parmi les configurations sans vortex (cf. [S3]). On a de plus obtenu avec E. Sandier le résultat suivant :

**Théorème 2 (Sandier-S, voir [SS1])** *Il existe  $H'_{c_1} \sim H_{c_1}$  tel que pour  $h_{ex} < H'_{c_1}$ , si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, l'unique minimiseur global de l'énergie est la solution sans vortex mentionnée ci-dessus.*

## II.2 Existence de branches de solutions

Dans le cas modèle où  $\Omega$  est un disque, on a pu prolonger l'étude au-delà de  $H_{c_1}$ , en utilisant le fait qu'alors  $\xi_0$  est connu explicitement. (Si  $\Omega$  n'est pas un disque, les résultats doivent être qualitativement semblables) En cherchant à minimiser localement l'énergie parmi les configurations à  $n$  vortex, pour  $n$  entier donné, on a obtenu l'existence de solutions stables de (G.L) à  $n$  vortex.

**Théorème 3 (voir [S3])** *On suppose que  $\Omega = B(0, R)$  et que  $h_{ex}(\varepsilon)$  est une fonction quelconque vérifiant*

$$h_{ex} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \quad h_{ex} \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha},$$

où  $\alpha$  est un certain réel positif (petit) fixé. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $\varepsilon_0(n)$ , tel que,  $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ , il existe une solution stable  $(u, A)$  de (G.L), qui vérifie :

1.  $u$  a exactement  $n$  vortex de degré 1, centrés aux points  $a_i^\varepsilon$ .
2.  $|a_i^\varepsilon| \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et si l'on pose  $\tilde{a}_i = a_i^\varepsilon \sqrt{h_{ex}}$ , la famille des  $\tilde{a}_i$  tend (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) à minimiser

$$w(x_1, \dots, x_n) = -\pi \sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j| + \pi \xi_0''(0) \sum_i |x_i|^2.$$

3. Les énergies des solutions à  $n - 1$  et  $n$  vortex sont égales pour  $h_{ex} = H_n$ , où

$$H_n \sim \frac{1}{2 \max |\xi_0|} (|\log \varepsilon| + (n - 1) \log |\log \varepsilon|).$$

On obtient donc l'existence de branches de solutions stables (au sens où elles minimisent localement l'énergie) à  $n$  vortex, pour des valeurs de  $h_{ex}$  bien inférieures à  $H_{c_1}$  et bien supérieures à  $H_{c_1}$ , d'où l'existence de multiples solutions à  $h_{ex}$  fixé. Ces branches se croisent aux  $H_n$  et l'expression de l'énergie le long de ces branches est connue. Les vortex de ces solutions sont concentrés autour du centre du domaine, à l'échelle  $\frac{1}{\sqrt{h_{ex}}}$ , et leurs positions sont régies par l'“énergie renormalisée”  $w$ , fonction explicite de  $n$  variables. Les minimiseurs de  $w$  sont des formes régulières: polygones réguliers pour les petites valeurs de  $n$ , puis “étoiles” régulières, puis des formes telles que celles de la figure 1.

Ces formes sont aussi celles qui sont observées (dans les supraconducteurs et superfluides), et calculées par les physiciens. Elles peuvent constituer, en quelque sorte, la “naissance” du réseau d'Abrikosov. En outre, bien qu'ils ne concernent que le cas où  $\kappa$  est grand, ces résultats (description de branches de solutions et de leurs vortex) sont en bon accord avec des études récentes effectuées sur les supraconducteurs à  $\kappa$  de l'ordre de 1 ([SPS, AM]).

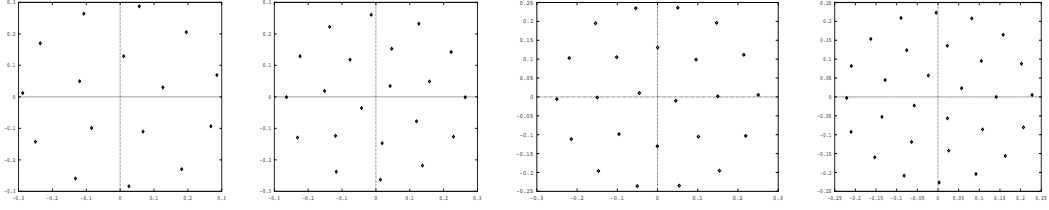


FIG. 1: Résultats de l'optimisation numérique de  $[GS]$  pour  $w$ , cas  $n = 16, 21, 24, 29$

### III Étude des minimiseurs globaux de l'énergie

L'approche précédente était essentiellement valable pour étudier des situations où le nombre de vortex restait borné tandis que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ce qui, pour les minimiseurs de l'énergie, est le cas lorsque  $h_{ex}$  reste très proche de  $H_{c1}$ . La borne a priori sur le nombre de vortex permettait d'utiliser des techniques de construction, et d'analyse, de vortex, inspirées de [BBH] et [AB]. L'étape suivante consiste donc à étudier les minimiseurs globaux de l'énergie pour lesquels le nombre de vortex ne reste pas en général borné quand  $\varepsilon$  tend vers 0. L'approche adoptée, notamment dans la construction d'une bonne "structure de vortex" est donc différente.

#### III.1 Mise en évidence d'un problème limite

Pour  $h_{ex} < H_{c1}$ , on sait déjà que l'unique minimiseur de l'énergie est la solution sans vortex. Il reste à élucider le cas de  $h_{ex} \geq H_{c1}$ . On considère toujours que le champ magnétique appliqué  $h_{ex}(\varepsilon)$  est une fonction de  $\varepsilon$ , et on suppose que

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\log \varepsilon|}{h_{ex}(\varepsilon)}$$

existe et est finie. (Cela permet de mesurer le champ extérieur en échelle de  $|\log \varepsilon|$ .) Soit maintenant  $(u, A)$  un minimiseur de l'énergie (dépendant de  $\varepsilon$ ) et  $h = \text{rot } A$  le champ magnétique induit associé.

$(u, A)$  est solution de (G.L), et grâce à une méthode inspirée de [Sa], on peut lui définir des vortex de la façon suivante :

**Proposition 1** Pour  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , on peut construire une famille de boules disjointes  $(B_i) = (B(a_i, r_i))$  telle que

$$\left\{ x / |u(x)| \leq \frac{1}{2} \right\} \subset \cup_i B_i$$

$$\sum_i r_i \leq \frac{1}{|\log \varepsilon|^6}$$

$$\frac{1}{2} \int_{B_i} |\nabla h|^2 \geq \pi |d_i| |\log \varepsilon| (1 - o(1)).$$

où  $d_i = \deg(u, \partial B_i)$  si  $\overline{B_i} \subset \Omega$ , et 0 sinon.

**Définition 1**

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\pi}{h_{ex}} \sum_i d_i \delta_{a_i}.$$

On définit ainsi une mesure de vorticité pour la solution, dont on cherche à déterminer le comportement asymptotique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dans la suite,  $\mathcal{M}$  désigne l'ensemble des mesures de Radon bornées sur  $\Omega$ , et  $\mathcal{L}$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ .

On définit sur  $V = \{f \in H_1^1(\Omega), -\Delta f + f \in \mathcal{M}\}$ , la fonctionnelle

$$(5) \quad E(f) = \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |-\Delta f + f| + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla f|^2 + |f - 1|^2.$$

**Théorème 4 (Sandier-S, voir [SS3])** Soit  $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$  minimisant  $J$ , et  $h_\varepsilon = \text{rot } A_\varepsilon$ , alors, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\frac{h_\varepsilon}{h_{ex}} \rightarrow h_* \quad \text{faiblement dans } H_1^1(\Omega) \text{ et fortement dans } W^{1,q}(\Omega) (\forall q < 2)$$

où  $h_*$  est l'unique minimiseur de  $E$ .  $h_*$  est  $C^{1,\alpha}(\Omega)$  ( $\forall \alpha < 1$ ), et est solution du problème de l'obstacle suivant (où l'on note  $\mu_* = -\Delta h_* + h_*$ ):

$$(P) \quad \begin{cases} h_* = 1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \mu_* \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ h_* \geq 1 - \frac{\lambda}{2} & \text{sur } \Omega \\ \mu_* \left( h_* - \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \right) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Définissant  $\omega_\lambda = \{x \in \Omega / h_*(x) = 1 - \frac{\lambda}{2}\}$ , on a  $\mu_* = (1 - \frac{\lambda}{2}) \mathcal{L}|_{\omega_\lambda}$ . De plus,

$$(6) \quad \frac{\min J}{h_{ex}^2} = \min_V E + o(1) = E(h_*) + o(1).$$

Si  $\lambda = 0$ , alors  $h_* = 1$ ,  $\min E = 0$ , et la convergence de  $\frac{h_\varepsilon}{h_{ex}}$  vers 1 est forte dans  $H^1(\Omega)$ . Dans le cas général, la convergence n'est pas forte  $H^1$ , et le défaut de convergence forte est décrit par une mesure de défaut :

$$\left| \nabla \left( \frac{h_\varepsilon}{h_{ex}} \right) \right|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |\nabla h_*|^2 + \lambda \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M}.$$

**Théorème 5 (Sandier-S, [SS3])** *Si  $\lambda > 0$ , on a aussi*

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\pi}{h_{ex}} \sum_i d_i \delta_{a_i} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M},$$

$$\frac{2\pi}{h_{ex}} \sum_i |d_i| \delta_{a_i} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M}.$$

Le Théorème 4 permet donc d'identifier  $E$  comme la fonctionnelle limite de  $\frac{J}{h_{ex}}$ .  $E$  est plus simple que  $J$ , et contrairement à  $J$ , est convexe, donc admet  $h_*$  pour seul point critique. De plus, on en déduit que l'énergie se scinde essentiellement en deux parties de même ordre lorsque  $\lambda > 0$ :  $\frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\mu_*|$  correspondant à l'énergie qui se concentre dans les vortex; et  $\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2$  à l'énergie extérieure aux vortex.

Les problèmes de l'obstacle du type de (P) ont été bien étudiés dans la littérature (cf [R]). On sait notamment que le "domaine de coïncidence"  $\omega_\lambda = \{x \in \Omega / h_*(x) = 1 - \frac{\lambda}{2}\}$  n'a pas nécessairement un bord régulier (néanmoins, c'est le cas pour presque toute valeur de  $\lambda$  d'après un récent résultat de Bonnet et Monneau [BM]). Si  $\partial\omega_\lambda$  est régulier, on peut réécrire (P) de la façon suivante :

$$(P) \begin{cases} -\Delta h_* + h_* = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega_\lambda \\ h_* = 1 - \frac{\lambda}{2} & \text{dans } \omega_\lambda \\ \frac{\partial h_*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega_\lambda \\ h_* = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On voit alors que  $\omega_\lambda$  est déterminé de façon unique par ce système, car il est surdéterminé par la condition de Neumann + Dirichlet au bord de  $\omega_\lambda$ .

Le Théorème 5 donne la convergence de la mesure de vorticité, et indique que la plupart des vortex sont de degré positif. L'interprétation concrète et qualitative de ces résultat est que, lorsque  $\varepsilon$  est petit, il y a dans l'échantillon une zone centrale  $\omega_\lambda$  remplie de vortex (de degré positif) avec une densité  $\sim \frac{1}{2\pi}(h_{ex} - \frac{1}{2}|\log \varepsilon|)$ , entourée d'une région sans vortex. Lorsque  $h_{ex}$  augmente,  $\lambda$  diminue, et la taille de la zone à vortex  $\omega_\lambda$  augmente, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à  $\Omega$ , lorsque  $h_{ex} \gg |\log \varepsilon|$ . On peut considérer que cette densité uniforme de vortex correspond au réseau d'Abrikosov.

*Remarques :*

1. Le problème à frontière libre (P) est du même type que celui qui a été dérivé de manière formelle à partir de (G.L) dans [CRS].
2. En étudiant plus attentivement (P), on obtient que  $\omega_\lambda = \emptyset$  si et seulement si

$$\lambda > 2\max|\xi_0| \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h_{ex}}{|\log \varepsilon|} < \frac{1}{2\max|\xi_0|},$$

et lorsque  $\lambda > 2\max|\xi_0|$ ,  $h_* = \xi_0 + 1$ . On retrouve ainsi l'estimation de  $H_{c1}$  donnée au Théorème 1, ainsi que le résultat du Théorème 2.



### III.2 Le cas $\lambda = 0$

Dans le cas  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire  $h_{ex} \gg |\log \varepsilon|$ , on a vu que  $\frac{h}{h_{ex}}$  converge vers 1 dans  $H_1^1(\Omega)$  et, d'après (6), que  $\min J = o(h_{ex}^2)$ . On a en fait pu obtenir le résultat plus précis suivant

**Théorème 6 (Sandier-S, voir [SS2])** *Supposons que*

$$H_{c_1} \ll h_{ex} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$$

*Si  $(u, A)$  minimise  $J$ , alors,  $|\cdot|$  désignant l'aire,*

$$J(u, A) \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} |\Omega| h_{ex} \log \frac{1}{\varepsilon \sqrt{h_{ex}}},$$

*et pour tout ouvert  $V$  de  $\Omega$ , si  $J_V$  désigne la fonctionnelle restreinte à  $V$ ,*

$$J_V(u, A) \sim \frac{1}{2} |V| h_{ex} \log \frac{1}{\varepsilon \sqrt{h_{ex}}}.$$

On a également un résultat analogue au théorème de convergence de la mesure de vorticité :

**Théorème 7 (Sandier-S, voir [SS2])** *Sous les mêmes hypothèses, pour  $\varepsilon$  assez petit, on peut trouver une famille de boules fermées disjointes  $B_i$  centrées aux  $a_i$ , de rayon  $< \frac{1}{\sqrt{h_{ex}}}$ , telle que*

- $|u| > \frac{1}{2}$  sur  $\partial B_i$
- si  $d_i = \text{deg}(u, \partial B_i)$ ,

$$\mu_\varepsilon := \frac{1}{h_{ex}} 2\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}|_\Omega \quad \text{au sens } \mathcal{M}.$$

*En outre,*

$$2\pi \sum_i |d_i| \sim 2\pi \sum_i d_i \sim h_{ex} |\Omega|,$$

*et la plupart de l'énergie est contenue dans ces boules :*

$$J_{\Omega \setminus \cup B_i}(u, A) \ll J(u, A).$$

On obtient donc bien, dans ce cas, la convergence de la vorticité vers une mesure uniforme de densité  $h_{ex}$ , malgré une analyse plus délicate (en effet,  $h_{ex}$  peut devenir très grand et le nombre de vortex diverge en  $h_{ex}$ , il est donc plus difficile d'isoler des "boules de vortex").

### III.3 Méthode de la preuve du Théorème 4

On traite ici uniquement le cas  $\lambda > 0$ .

*Étape 1 :*

On dispose tout d'abord, par comparaison avec  $(u \equiv 1, A \equiv 0)$ , d'une majoration a priori de l'énergie minimale  $\min J \leq Ch_{ex}^2$ . De plus  $(u, A)$  minimisant  $J$  est solution de (G.L) donc, si l'on note formellement  $u = \rho e^{i\varphi}$ , on a

$$(7) \quad -\nabla^\perp h = (iu, \nabla_A u) = \rho^2(\nabla\varphi - A),$$

Mais ainsi  $|\nabla_A u|^2 \geq \rho^2|\nabla\varphi - A|^2 = \frac{|\nabla h|^2}{\rho^2} \geq |\nabla h|^2$ , car, par principe du maximum,  $\rho \leq 1$ . De la sorte,

$$Ch_{ex}^2 \geq J(u, A) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 + |h - h_{ex}|^2.$$

On déduit de l'inégalité précédente que  $\frac{h}{h_{ex}}$  est borné dans  $H_1^1(\Omega)$ , donc a une limite faible dans  $H_1^1$ , (quitte à extraire une sous-suite), que l'on note  $h_0$ .

*Étape 2 :*

Utilisant le résultat de la Proposition 1, on peut minorer  $J$  ainsi :

$$\begin{aligned} Ch_{ex}^2 \geq J(u, A) &\geq \frac{1}{2} \sum_i \int_{B_i} |\nabla h|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \cup_i B_i} |\nabla h|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |h - h_{ex}|^2 \\ &\geq \pi \sum_i |d_i| |\log \varepsilon| (1 - o(1)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \cup_i B_i} |\nabla h|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |h - h_{ex}|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} |\mu_\varepsilon| = \frac{2\pi}{h_{ex}} \sum_i |d_i| \leq C \frac{h_{ex}}{|\log \varepsilon|} \leq \frac{C}{\lambda},$$

donc  $(\mu_\varepsilon)$  est une famille bornée de mesures de Radon, et donc, à extraction d'une suite près, admet une limite faible au sens des mesures, notée  $\mu_0$ . En prenant le rotationnel de l'équation (7), on montre que  $\mu_0 = -\Delta h_0 + h_0$ .

*Étape 3 :*

On poursuit la minoration de  $J$  :

$$\frac{J(u, A)}{h_{ex}^2} \geq \frac{1}{2} \frac{|\log \varepsilon|}{h_{ex}} \int_{\Omega} |\mu_\varepsilon| + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \cup_i B_i} \left| \nabla \left( \frac{h}{h_{ex}} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{h}{h_{ex}} - 1 \right|^2 + o(1).$$

En utilisant la convergence faible de  $\mu_\varepsilon$  vers  $\mu_0$ , et de  $\frac{h}{h_{ex}}$  vers  $h_0$ , ainsi que la convexité des termes en jeu, on arrive à obtenir que

$$\begin{aligned} \frac{J(u, A)}{h_{ex}^2} &\geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mu_0| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla h_0|^2 + |h_0 - 1|^2 + o(1) \\ &\geq E(h_0) + o(1) \geq \min E + o(1). \end{aligned}$$

*Étape 4 :*

Il faut alors étudier le problème de la minimisation de  $E$ , ce qui se fait indépendamment, de manière variationnelle. On aboutit à un unique minimiseur  $h_*$  solution de (P), associé à la mesure  $\mu_* = -\Delta h_* + h_*$ .

*Étape 5 :*

On majore l'énergie minimale en construisant une configuration-test adaptée. Connaissant  $\mu_*$ , on construit une famille de points  $a_i$  et des mesures  $\mu_\varepsilon^i$  qui sont les mesures uniformes de masse  $2\pi$  portées par les cercles  $C(a_i, \varepsilon)$ , et telles que

$$\frac{\sum_i \mu_\varepsilon^i}{h_{ex}} \rightarrow \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M}.$$

(Les  $a_i$  sont des points répartis uniformément dans  $\omega_\lambda$  à des distances en  $\frac{1}{\sqrt{h_{ex}}}$ .)  $G$  étant le noyau de Green solution de

$$\begin{cases} -\Delta_x G(x, y) + G(x, y) = \delta_y & \text{sur } \Omega \\ G(x, y) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

on définit  $h_\varepsilon$  comme étant solution de

$$\begin{cases} -\Delta h_\varepsilon + h_\varepsilon = \sum_i \mu_\varepsilon^i = \nu_\varepsilon & \text{sur } \Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On peut reconstituer à l'aide de  $h_\varepsilon$  une configuration  $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$  qui aura un vortex de degré 1 en chaque  $a_i$ . Pour ce faire, on trouve facilement un  $A_\varepsilon$  tel que  $\text{rot } A_\varepsilon = h_\varepsilon$ , et on définit  $\varphi_\varepsilon$  par  $\nabla \varphi_\varepsilon = -\nabla^\perp h_\varepsilon + A_\varepsilon$  hors des  $B(a_i, \varepsilon)$ . Les mesures  $\mu_\varepsilon^i$  étant exactement de masse  $2\pi$ , il est possible de donner un sens à  $\varphi_\varepsilon$  à  $2\pi\mathbb{Z}$  près et donc de définir  $u_\varepsilon = e^{i\varphi_\varepsilon}$  hors des  $B(a_i, \varepsilon)$ . Dans chaque  $B(a_i, \varepsilon)$ , on complète  $u_\varepsilon$  de manière continue en l'annulant en  $a_i$ .

*Étape 6 :*

L'énergie de la configuration ainsi construite est environ

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon, A_\varepsilon) &\sim \int_\Omega |\nabla h_\varepsilon|^2 + |h_\varepsilon - h_{ex}|^2 = \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) d(\nu_\varepsilon(x) - h_{ex}) d(\nu_\varepsilon(y) - h_{ex}) \\ &\sim \sum_i \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) d\mu_\varepsilon^i(x) d\mu_\varepsilon^i(y) + \sum_{i \neq j} \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) d\mu_\varepsilon^i(x) d\mu_\varepsilon^j(y) \\ &\quad - 2h_{ex} \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) d\nu_\varepsilon(x) dy + h_{ex}^2 \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

On sépare ainsi les termes diagonaux des non-diagonaux. Comme  $G$  a une singularité en  $\log|x - y|$ , la contribution des termes diagonaux est équivalente à  $\pi|\log \varepsilon|$  multiplié par le nombre de points  $a_i$ , et est  $\sim \frac{1}{2} \int_\Omega |\nu_\varepsilon| |\log \varepsilon| \sim \lambda \frac{h_{ex}^2}{2} \int_\Omega |\mu_*|$ . Par convergence faible de  $\frac{\nu_\varepsilon}{h_{ex}}$  vers  $\mu_*$ , la contribution des termes non-diagonaux est équivalente à

$h_{\varepsilon x}^2 \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) d(\mu_*(x) - 1) d(\mu_*(y) - 1)$ . On trouve au total que

$$\begin{aligned} \frac{J(u_\varepsilon, A_\varepsilon)}{h_{\varepsilon x}^2} &\leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mu_*| + \int_{\Omega} |\nabla h_*|^2 + |h_* - 1|^2 + o(1) \\ &\leq E(h_*) + o(1) = \min_V E + o(1). \end{aligned}$$

En réalité, on sait réaliser cette construction non seulement pour  $\mu_*$ , mais pour n'importe quelle mesure  $\mu$ .

*Étape 7:*

En comparant la minoration et la majoration obtenues, on voit que  $\frac{\min J}{h_{\varepsilon x}^2}$  converge vers  $E(h_*)$ , et que  $h_0$  doit être égal à  $h_*$ , et  $\mu_0$  à  $\mu_*$ . Ceci donne l'essentiel du résultat.

## IV Quelques problèmes ouverts

Outre la question d'étudier la fonctionnelle hors de la limite  $\kappa \rightarrow \infty$ , il reste de nombreux problèmes ouverts dans cette limite. Un premier problème est d'obtenir le terme suivant du développement asymptotique de l'énergie donné dans les Théorèmes 4 (équation (6)) et 6. Une autre question est d'étudier plus précisément les degrés des vortex des minimiseurs : sont-ils tous égaux à 1? (Ceci pose la question de savoir si l'on peut bien isoler les vortex à l'échelle  $\frac{1}{|\log \varepsilon|^6}$ .)

Un second problème, abordé dans [ASS], est d'inclure dans la fonctionnelle un "poids" positif, c'est-à-dire de remplacer  $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2$  par  $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon(x) - |u|^2)^2$ . Ceci permet de modéliser le "pinning" des vortex, qui se retrouvent attirés vers les points de minimum de  $a_\varepsilon$ . Nous avons étudié la fonctionnelle ainsi modifiée dans [ASS] et avons obtenu les analogues des Théorèmes 4 et 5, en incluant la possibilité que  $a_\varepsilon$  oscille de plus en plus lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dans ce cas, on a mis en évidence un phénomène d'homogénéisation.

Reste ensuite la question de l'étude des points critiques de  $J$ , et non plus seulement de ses minimiseurs. Cette question est d'autant plus intéressante que, comme on l'a vu,  $E$  n'a qu'un point critique correspondant au minimum de  $J$ . Si  $\lambda > 0$ , et  $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$  est une famille de points critiques de  $J$  telle qu'on ait l'estimation  $J(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq Ch_{\varepsilon x}^2$ , alors, on peut toujours définir des vortex pour  $u$ , et quitte à extraire, on peut supposer que

$$\begin{aligned} \frac{h_\varepsilon}{h_{\varepsilon x}} &\rightharpoonup h_* \quad \text{dans } H^1 \\ \mu_\varepsilon &\rightarrow \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M} \end{aligned}$$

Que vérifient alors  $h_*$  et  $\mu_*$ ? On conjecture (c'est un travail en cours, en collaboration avec E. Sandier) que  $(\nabla h_*)\mu_* = 0$  partout (en un sens à préciser). Il existerait de nouveau un sous-domaine  $\omega_\lambda$  où  $h_*$  serait constant, la vorticité limite  $\mu_*$  aussi, tandis que  $\mu_*$

serait nul hors de  $\omega_\lambda$ , et  $\nabla h_*$  continu. On conjecture qu'alors,  $h_*$  minimiserait  $E$  à  $\int_\Omega \mu_*$  fixé.

On peut se poser les mêmes questions pour l'étude des équations de Ginzburg-Landau dépendant du temps. Les équations de Ginzburg-Landau d'évolution sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + iu\Phi = \nabla_A^2 u + \kappa^2 u(1 - |u|^2) \\ -\nabla^\perp h = (iu, \nabla_A u) - E \end{cases}$$

où le champ électrique  $E$  est défini par  $E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi$ , et  $\Phi$  est une fonction réelle. De nouveau, si l'on suppose que  $(u, A)$  est une famille de solutions de ces équations vérifiant  $J(u, A) \leq Ch_{\varepsilon x}^2$ , on peut supposer que  $\frac{h}{h_{\varepsilon x}} \rightarrow h_*$  et  $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu_*$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Que vérifient alors  $h_*$  et  $\mu_*$ ? Si l'on en croit le modèle de [CRS], l'évolution de la vorticit   à la limite serait donnée par le syst  me :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_*}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu_* \nabla h_*) = 0 \\ \mu_* = -\Delta h_* + h_* - \frac{\partial h_*}{\partial t}. \end{cases}$$

## Références

- [A] A. Abrikosov, On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Type, *Soviet Phys. JETP* 5, (1957), 1174-1182.
- [AB] L. Almeida et F. Bethuel, Topological Methods for the Ginzburg-Landau Equations, *J. Math. Pures Appl.*, 77, (1998), 1-49.
- [AM] E. Akkermans et K. Mallick, Vortices in mesoscopic superconductors, et Vortices in Ginzburg-Landau billiards, à paraître dans *J. Phys. A*, (1999).
- [ASS] A. Aftalion, E. Sandier et S. Serfaty, Pinning Phenomena in the Ginzburg-Landau Model of Superconductivity, en préparation.
- [BBC] H. Berestycki, A. Bonnet et J. Chapman, A Semi-Elliptic System Arising in the Theory of Type-II Superconductivity, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 1, n° 3, (1994), 1-21.
- [BBH] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, (1994).
- [BM] A. Bonnet et R. Monneau, Existence of a smooth free-boundary in a superconductor with a Nash-Moser inverse function theorem argument, à paraître dans *Interfaces and Free Boundaries*.
- [BR] F. Bethuel et T. Rivière, Vortices for a Variational Problem Related to Superconductivity, *Annales IHP, Analyse non linéaire*, 12, (1995), 243-303.
- [BR2] F. Bethuel et T. Rivière, Vorticité dans les modèles de Ginzburg-Landau pour la supraconductivité, *Séminaire E.D.P de l'École Polytechnique*, exposé XVI, (1994).
- [CRS] S. J. Chapman, J. Rubinstein, et M. Schatzman, A Mean-field Model of Superconducting Vortices, *Eur. J. Appl. Math.*, 7, No. 2, (1996), 97-111.
- [dG] P.-G. DeGennes, *Superconductivity of Metal and Alloys*, Benjamin, New York and Amsterdam, 1966.
- [GS] S. Gueron et I. Shafrir, On a Discrete Variational Problem Involving Interacting Particles, *SIAM J. Appl. Math.*
- [R] J.F. Rodrigues, *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, Mathematical Studies, North Holland, (1987).
- [Ru] J. Rubinstein, Six Lectures on Superconductivity, Proc. of the CRM School on "Boundaries, Interfaces, and Transitions".
- [Sa] E. Sandier, Lower Bounds for the Energy of Unit Vector Fields and Applications, *J. Functional Analysis*, 152, No 2, (1998), 379-403.

- [SS1] E. Sandier et S. Serfaty, Global Minimizers for the Ginzburg-Landau Functional below the First Critical Magnetic Field, à paraître dans *Annales IHP, Analyse non linéaire*.
- [SS2] E. Sandier et S. Serfaty, On the Energy of Type-II Superconductors in the Mixed Phase, à paraître dans *Reviews in Math. Phys.*
- [SS3] E. Sandier et S. Serfaty, A Rigorous Derivation of a Free-Boundary Problem Arising in Superconductivity, à paraître dans *Annales Scientifiques de l'ENS*.
- [SPS] V. A. Schweigert, F. M. Peeters et P. Singha Deo, Vortex Phase Diagram for Mesoscopic Superconducting Disks, *Phys. Rev. Letters*, vol 81, n. 13, (1998).
- [SST] D. Saint-James, G. Sarma et E.J. Thomas, *Type-II Superconductivity*, Pergamon Press, (1969).
- [S1] S. Serfaty, Local Minimizers for the Ginzburg-Landau Energy near Critical Magnetic Field, part I, *Comm. Contemporary Mathematics*, 1, No. 2, (1999), 213-254.
- [S2] S. Serfaty, Local Minimizers for the Ginzburg-Landau Energy near Critical Magnetic Field, part II, *Comm. Contemporary Mathematics*, 1, No. 3, (1999), 295-333.
- [S3] S. Serfaty, Stable Configurations in Superconductivity: Uniqueness, Multiplicity and Vortex-Nucleation, *Arch. for Rat. Mech. Anal.*, 149, No 4, (1999), 329-365.
- [T] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2d edition, McGraw-Hill, 1996.
- [TT] D. Tilley et J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, 2d edition, Adam Hilger Ltd., Bristol, (1986).

S. Serfaty,  
 CMLA, ENS Cachan,  
 61 av du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex.  
 serfaty@cmla.ens-cachan.fr  
<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Utilisateurs/serfaty>