SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Nicolas Burq

absence de résonance près du réel pour l'opérateur de Schrödinger

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° XVII, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A17_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

ABSENCE DE RÉSONANCE PRÈS DU RÉEL POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER

par

Nicolas Burq

Résumé. — On donne dans cet exposé des bornes inférieures universelles, en limite semiclassique, de la hauteur des résonances de forme associées aux opérateurs de Schrödinger à l'exterieur d'obstacles avec des conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann et des potentiels analytiquement dilatables et tendant vers 0 à l'infini. Ces bornes inférieures sont exponentiellement petites par rapport à la constante de Planck.

1. Introduction, hypothèses

Le but de cet exposé est l'étude de la localisation des résonances pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique. Nous nous proposons de montrer que les résonances ne peuvent pas s'accumuler sur l'axe réel plus vite qu'exponentiellement (par rapport à l'inverse de la constante de Planck).

On considère un obstacle (éventuellement vide), $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^∞ et dont le complémentaire, Ω, est connexe. Soit P un opérateur de Schrödinger semi-classique, elliptique et autoadjoint :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha (x, h) (hD_x)^\alpha \tag{1.1}$$

à coefficients de classe C^∞ sur Ω et vérifiant les conditions suivantes :

1. On suppose que $\partial\Theta$ est union disjointe de deux composantes connexes, Γ_1 and Γ_2 (éventuellement vides) et que les fonctions du domaine de P vérifient $u \mid_{\Theta_D} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Theta_N} = 0$.
2. Comme dans [**Sjö97**], on suppose que P est analytiquement dilatable : Il existe $\theta_0, \varepsilon > 0$ et $R_0 > 0$ tels que les fonctions a_α sont

holomorphes dans

(1.2)
$$\left\{r\omega; \omega \in \mathbb{C},\ \operatorname{dist}\left(\omega, \mathbb{S}^{d-1}\right) < \varepsilon,\ r \in \mathbb{C},\ |r| > C,\ \arg(r) \in [-\theta_0, \theta_0]\right\}$$

3. On suppose que les fonctions $a_\alpha(x,h) \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ sont indépendantes de h pour $|\alpha| = 2$ et $a_\alpha(x,h) = a_\alpha(x) + hb_\alpha(x,h)$ pour $|\alpha| \neq 2$. Enfin l'opérateur P est supposé proche de $-h^2\Delta$ quand $x \to +\infty$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $h \in]0, h_0[$, $|\xi| = 1, x \in$ (1.2) (en notant $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$)

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \geq \frac{|\xi|^2}{C} \tag{1.3}$$

$$\Big|\sum_{\alpha=2} a_\alpha(x,h)\,\xi^\alpha - |\xi|^2\Big| \leq C\langle x\rangle^{-\varepsilon}, \tag{1.4}$$

$$|a_\alpha(x,h)| \leq C\langle x\rangle^{-\varepsilon}, \forall \alpha, |\alpha| \leq 1 \tag{1.5}$$

Il a été démontré par J. Sjöstrand [**Sjö97**] que sous ces hypothèses, on peut définir les résonances de l'opérateur semi-classique P dans tout secteur de la forme $S_{\theta_1} = \{z \in \mathbb{C}; z = e^{-i\theta}r,\ r \geq 0, \theta \in [0, \theta_1]\}$, $\theta_1 < \theta_0$ (voir la deuxième partie de cet exposé) et que les résonances forment un ensemble discret. Le résultat principal présenté dans cet article est le suivant :

Théorème 1. — *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+^*$ il existe $\varepsilon, C, h_0 > 0$ tels que pour tout $0 < h < h_0$, l'opérateur $P(h)$ n'a pas de résonance dans l'ensemble :*

$$\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{dist}(z, K) \leq \varepsilon e^{-C/h}\} \tag{1.6}$$

En fait nous obtenons un résultat plus précis : les résonances sont définies comme les valeurs propres de certains opérateurs non autoadjoint. Nous donnons une estimation (exponentiellement large) de la norme de la résolvante de ces opérateurs qui implique, par un argument de perturbation l'absence de résonance.

Notre résultat était connu antérieurement dans quatre cas particuliers : le tout premier résultat a été obtenu par Harrel [**Har82**] pour l'opérateur de Schrödinger plat en dimension 1 d'espace et pour un potentiel à support compact ; ce résultat a été étendu par Helffer et Sjöstrand [**HS86**] pour les potentiels analytiquement dilatables ayant un minimum unique non dégénéré (cas du puits dans une ile). Le résultat a ensuite été démontré par Fernandez et Lavine [**FL90**] en dimension quelconque d'espace pour l'opérateur de Schrödinger plat et un potentiel à support compact. Enfin l'auteur [**Bur98**] a démontré le résultat pour l'opérateur de Helmoltz en dehors d'un compact (avec des conditions au bord de Dirichlet).

Une question naturelle serait de déterminer la meilleure constante C près d'une énergie fixée. Dans le cas de la dimension 1 ou pour un problème invariant par rotation, il est possible de retrouver par notre méthode les résultats classique et d'exprimer C en termes de la distance d'Agmon. Cependant dans le cas général, l'étude du résonateur de Helmoltz et des résultats de Martinez sur l'effet tunnel pour un double puits [**Mar98**] section 7, donnent à penser que cette constante s'exprime plus probablement en termes micro-locaux que locaux.

Le point de départ de la preuve est le même que dans [**Bur98**] : on démontre des inégalités de Carleman pour traiter les régions où on possède peu d'information (toute région compacte). Ensuite, on utilise le fait que pour $|x|$ grand l'opérateur P est proche de $-h^2\Delta$ et des estimations de commutateurs pour choisir des phases qui croissent lentement ($\varphi'(x) = O(h)$ au lieu de $O(1)$, ce qui permet finalement de conclure en faisant la dilatation analytique.

2. Rappels sur la dilatation analytique dans le cadre semi-classique

Nous donnons ici la définition des résonances par Sjöstrand [**Sjö97**]. Soient ε_0, $r_0 > 0$ et $f_\theta(t) : [0,\pi] \times [0,+\infty[\to \mathbb{C}$, injective pour tout θ telle que

(i) $f_\theta(t) = t$ pour $0 \leq t \leq r_0$

(ii) $0 \leq \arg(f_\theta(t)) \leq \theta, \partial_t f_\theta \neq 0$

(iii) $\arg(f_\theta(t)) \leq \arg(\partial_t f_\theta(t)) \leq \arg(f_\theta(t)) + \varepsilon_0$

(iv) $f_\theta(t) = e^{i\theta}t$ pour $t \geq T_0$ ou T_0 dépend seulement de ε_0 et r_0.

(v) $\arg(f_\theta(t))$ est une fonction croissante de θ et t.

On considère l'application $\kappa_\theta : \mathbb{R}^d \ni x = t\omega \mapsto f_\theta(t)\,\omega \in \mathbb{C}^d, t = |x|$. Alors l'image de κ_θ, Γ_θ, est une variété qui coïncide avec $\mathbb{R}^d$ sur $B(0, r_0)$.

On définit

$$\mathcal{H}_{0,\theta} = \{u \in H^1(\Gamma_\theta)\,;\; u\,|_{\Gamma_D} = 0\} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{D}_\theta = \{u \in H^2(\Gamma_\theta)\,; u\,|_{\Gamma_D} = 0, \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma_N} = 0 \tag{2.2}$$

ou $H^2(\Gamma_\theta)$ et $H^1(\Gamma_\theta)$ sont munis de leurs normes semi-classiques naturelles. On considère l'opérateur $P_\theta(h)$ sur $L^2(\Gamma_\theta \setminus \Theta)$ de domaine $\mathcal{D}_\theta$ qui sur $B(0, r_0)$ coïncide avec $P(h)$ et en dehors est (en coordonnées polaires) égal à

$$P_\theta(h) = P(f_\theta(t)\,\omega, f'_\theta(t)\,D_t, D_\omega) \tag{2.3}$$

On a alors [**Sjö97**] (lemma 5.1 and 5.2)

Lemme 2.1. — *Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\arg(z) \neq -2\theta$ l'opérateur $P_\theta - z$ de $\mathcal{D}_\theta$ dans $L^2(\Gamma_\theta)$ est un opérateur de Fredholm d'indice* 0. *De plus si* $\arg(z) < -2\theta_1 \leq -2\theta_2$ *alors dim Ker* $(P_{\theta_1} - z) =$ *dim Ker* $(P_{\theta_2} - z)$

Ce résultat et la théorie de Fredholm analytique montrent que le spectre de P_θ dans $\mathbb{C} \setminus e^{-2i\theta}[0, +\infty[$ est discret et inclus dans $]-\infty, 0] \cup e^{-2i[0,\theta[}[0, +\infty[$, la partie dans $]-\infty, 0]$ étant les valeurs propres de $P(h)$.

Definition 2.2. — *On dit que $z \in e^{-2i[0,\theta[}[0, +\infty[$ est une résonance de l'opérateur $P(h)$ si et seulement si $z \in \sigma(P_\theta)$ pour un (et donc pour tout) $\theta > -\arg(z)/2$ (puisque P est d'indice* 0 *il est équivalent de dire que z est une valeur propre).*

Le théorème 1 est une conséquence immédiate du résultat suivant :

Théorème 2. — *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+^*$ il existe $r_0, \theta_0, C, C', h_0 >$ 0 tels que pour tout $0 < h < h_0$ et tout $E \in K$ l'opérateur $P_{\theta_0}(h) - E\mathrm{Id}$ est inversible sur $L^2(\Gamma_{\theta_0})$ et vérifie*

$$\|\,(P_{\theta_0}(h) - E\mathrm{Id})^{-1}\,\|_{L^2(\Gamma_{\theta_0})} \leq Ce^{C'/h} \tag{2.4}$$

3. Une idée de la preuve du théorème 2

La preuve de la relation (2.4) repose sur deux type d'estimations : d'une part une estimation de Carleman qui permet de traiter la région où on ne fait pas de dilatation analytique ($|x| < r_0$) et d'autre part une estimation de type elliptique qui permet de traiter la région après la dilatation ($|x| > r_0$). Le point remarquable est que les restes de l'estimation de Carleman dans ($|x| \geq r_0$) sont absorbés par l'estimation elliptique et vice versa.

Pour simplifier l'exposition, nous allons nous limiter au cas où l'obstacle Θ est topologiquement une boule et l'opérateur égal à $-h^2\Delta+V(x,h)$ (le cas d'une topologie plus compliquée se traite en utilisant plusieurs phases dans les estimations de Carleman et les hypothèses 1.3 permettent, via l'introduction d'un système de coordonnées géodésiques radiales de se ramener essentiellement au cas du Laplacien). On supposera aussi que $K=\{1\}$. On identifiera, *via* l'application κ_θ $\Gamma_\theta\setminus\Theta$ et Ω. Pour une phase $\varphi(x)$, on notera

$$P_\varphi=e^{\varphi(x)/h}Pe^{-\varphi(x)/h},\quad P_{\theta,\varphi}=e^{\varphi(x)/h}P_\theta e^{-\varphi(x)/h} \tag{3.1}$$

$$(f,g)=\int_\Omega f(x)\,\overline{g}(x)\,dx,\quad \|f\|^2=(f,f) \tag{3.2}$$

et

$$|||u|||^2=\|u\|^2+\|h\nabla u\|^2. \tag{3.3}$$

3.1. Estimation de Carleman. —

Lemme 3.1. — *Il existe $R_0<R_1<R_2<R_3,h_0>0$ et une fonction $\varphi(x,h)$ de classe C^∞, définie pour $0<h<h_0$ et vérifiant*

1. *La fonction φ est radiale pour $|x|\geq R_0$*
2. *la fonction φ est nulle sur $\partial\Omega$ et sa dérivée normale intérieure strictement positive sur $\partial\Omega$, $\partial\varphi/\partial n\mid_{\partial\Omega}>0$*
3. $\varphi(x,h)=\varphi_0(x)+\frac{h}{\left(h^{1/2}+C(r-R_1)^2\right)}\chi(r)+h\varphi_1(r)$ *où*
   (a) φ_0 *est à support dans* $r\leq R_1$, φ_1 *est à support dans* $r\geq R_1-1$, χ *est à support dans* $R_1-1\leq r\leq R_1+1$
   (b) $\varphi_1=Cr^2$ *pour* $R_3\geq r\geq R_2$
   (c) $\varphi_1'=0$ *pour* $r\geq R_3+1$
4. *Il existe $C>0$ tel que pour toute fonction $u\in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\cap B(0,R_3)\right)$ et tout $0<h<h_0$,*

$$\|(P_\varphi-1)\,u\|^2+|Re\left((P_\varphi-1)\,u,u\right)|\geq C_0h\int\frac{\varphi'}{r}\left(|u|^2+|h\nabla u|^2\right) \tag{3.4}$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise les estimations de Carleman jusqu'au bord de Lebeau et Robbiano [**Leb96, LR95**]. Le point de départ est la relation

$$(3.5)\quad \|\left(P_\varphi-1\right)u\|^2=\|\mathrm{Re}\left(P_\varphi-1\right)u\|^2\|\mathrm{Im}\left(P_\varphi-1\right)u\|^2 \\ +i\left(\left[\mathrm{Re}\left(P_\varphi-1\right),\mathrm{Im}\left(P_\varphi-1\right)\right]u,u\right)+\text{termes de bord}$$

où $\mathrm{Re}\left(P_\varphi-1\right)=\left(P_\varphi-1+P_\varphi^*-1\right)/2$ et $\mathrm{Im}\left(P_\varphi-1\right)=\left(P_\varphi-P_\varphi^*\right)/2i$ et les termes de bord sont (dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet) positifs (on utilise ici $\partial\varphi/\partial n\mid_{\partial\Omega}>0$). On construit alors φ_0 de telle façon que si on note p_φ le symbole principal semi-classique de l'opérateur P_φ, on a

$$(3.6)\qquad p_\varphi=\mathrm{Re}p_\varphi+i\mathrm{Im}p_\varphi=0\Rightarrow\left\{\mathrm{Re}p_\varphi,\mathrm{Im}p_\varphi\right\}>0$$

Le relation (3.5) et l'inégalité de Gårding permettent alors de démontrer une inégalité du type (3.4). Pour vérifier (3.6) on est amenés à choisir une fonction φ_0 définie dans une première boule $B\left(0,r_0\right)$ qui croît très rapidement quand on s'éloigne de l'obstacle ; cependant des calculs explicites (voir [**Bur98**]) montrent qu'on peut ensuite, en imposant à la fonction φ_0 d'être radiale loin de l'obstacle stabiliser son comportement en lui imposant une dérivée arbitrairement pour r proche d'une valeur $r_1>r_0$. Il reste à calculer explicitement les termes du commutateur pour $r>r_1$ pour montrer qu'on peut choisir φ de la forme annoncée (c'est à dire obtenir finalement $\varphi'\sim h$ et plus seulement $\varphi'<\varepsilon$; il ne s'agit plus alors a proprement parler d'estimations de Carleman). Le terme $|\mathrm{Re}\left(\left(P_\varphi-1\right)u,u\right)|$ sert à microlocaliser le problème près de la variété caractéristique de l'opérateur $\mathrm{Re}P_\varphi$: $\rho^2+\eta^2/r^2=\left(\varphi'\right)^2+1$.

R_2 étant ainsi fixé, on peut faire la dilatation analytique : on choisit une fonction $\Psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^+\right)$ vérifiant

1. $\Psi\mid_{r\leq R_2}=0$
2. $\Psi\mid_{r\geq R_2+1}=1$
3. Ψ croissante
4. $\Psi^2+\left(\Psi'\right)^2+\left(\Psi''\right)^2+\left(\Psi'''\right)^2\leq C\Psi$

et on choisit comme déformations la famille

$$(3.7)\qquad r\mapsto re^{i\theta\Psi(r)},\ \theta\in[0,\theta_0]$$

On a alors le résultat suivant

Lemme 3.2. — *Avec le même choix de phase qu'au lemme 3.1, il existe $C>0$ tel que pour toute fonction $u\in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\cap B\left(0,R_3\right)\right)$ et tout*

$0 < h < h_0$,

$$(3.8)\quad \| (P_{\theta,\varphi} - 1)\, u\|^2 + |Re\,((P_{\theta,\varphi} - 1)\, u, u)\,|$$
$$\geq C_0 h \int \frac{\varphi'}{r} \left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right) - C_1 h \int \theta\,(|\Psi'| + |\Psi''|) \left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right)$$

Ce résultat se démontre comme le précédent, le terme d'erreur venant de termes parasites dus à la dilatation analytique. Il faut remarquer ici que le terme d'erreur n'est pas *a priori* plus petit que le terme principal, puisque sur le support de Ψ', on a $\varphi' = O\,(h)$. Pour traiter ce terme d'erreur, on va démontrer une estimation elliptique.

3.2. Estimation elliptique. —

Lemme 3.3. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in D_\theta$ on a (avec $u = e^{\varphi} v$)*

(3.9)
$$- Im\left((P_\theta - Id)\, v, e^{-i\theta\Psi} v\right)_{L^2} = -Im\left((P_{\theta,\varphi} - Id)\, u, e^{-i\theta\Psi - 2\varphi/h} u\right)_{L^2}$$
$$\geq C\theta \int \Psi \left(|v|^2 + |h\nabla v|^2\right) - C'\theta h \int (|\Psi'| + |\Psi''|) \left(|v|^2 + |h\nabla v|^2\right)$$

Ce résultat se démontre facilement par intégrations par parties. Il faut remarquer qu'ici encore le terme de reste n'est pas *a priori* plus petit que le terme principal, puisque près de R_2, on peut avoir $\Psi' >> \Psi$.

On fixe maintenant $0 < \theta < \theta_0$. Du lemme 3.3 et de l'hypothèse 4 sur Ψ on déduit, par Cauchy Schwartz,

$$(3.10)\quad \int \Psi \left(|v|^2 + |h\nabla v|^2\right)$$
$$\leq Ch \left(\int \Psi \left(|v|^2 + |h\nabla v|^2\right)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{supp}(\Psi')} |v|^2 + |h\nabla v|^2\right)^{1/2} + C\| (P_{\theta,\varphi} - Id)\, u\| \|u\|$$

d'où, puisque pour $r \geq R_2$, $(\varphi\,(x) - \varphi\,(R_2)\,/h)$ est bornée uniformément par rapport à h,

$$(3.11)\quad \int \Psi \left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right)$$
$$\leq Ch^2 \int_{\mathrm{supp}(\Psi')} |u|^2 + |h\nabla u|^2 + Ce^{2\varphi(R_2)/h} \| (P_{\theta,\varphi} - Id)\, u\| \|u\|$$

et

$$(3.12)\quad C_1h\int\left(|\Psi'|+|\Psi''|\right)\left(|u|^2+|h\nabla u|^2\right)$$
$$\leq C_1h\left(\int\Psi\left(|v|^2+|h\nabla v|^2\right)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathrm{supp}(\Psi')}|u|^2+|h\nabla u|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq C_1h\times Ch\left(\int_{\mathrm{supp}(\Psi')}|u|^2+|h\nabla u|^2\right)$$
$$+C_1hCe^{\varphi(R_2)/h}\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|\|u\|\times\left(\int_{\mathrm{supp}(\Psi')}|u|^2+|h\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

Soit $\chi\in C_0^\infty\left(B\left(0,R_3\right)\right)$, égale à 1 sur $B\left(0,R_{2+1}\right)$. On va appliquer le lemme 3.2 à la fonction χu. On remarque d'abord que

$$(3.13)\quad \|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)\chi u\|^2+|\mathrm{Re}\left(\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)\chi u,\chi u\right)|$$
$$\leq\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|^2+\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|\|u\|+Ch\int_{R_2+1\leq r\leq R_3}|u|^2+|h\nabla u|^2,$$

ce qui implique, d'après (3.8), (3.11) et (3.12),

$$(3.14)\quad \int\Psi\left(|u|^2+|h\nabla u|^2\right)+h\int\frac{\varphi'}{r}\left(|\chi u|^2+|h\nabla\chi u|^2\right)$$
$$\leq Ch^2\int_{\mathrm{supp}(\Psi')}|u|^2+|h\nabla u|^2+Ce^{2\varphi(R_2)/h}\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|\|u\|$$
$$+Che^{\varphi(R_2)/h}\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|\|u\|\times\left(\int_{\mathrm{supp}(\Psi')}|u|^2+|h\nabla u|^2\right)^{1/2}$$
$$+C\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|^2+C\|\left(P_{\theta,\varphi}-Id\right)u\|\|u\|+Ch\int_{R_2+1\leq r\leq R_3}|u|^2+|h\nabla u|^2$$

Le dernier terme d'erreur, $Ch\int_{R_2+1\leq r\leq R_3}|u|^2+|h\nabla u|^2$ se contrôle par le premier terme de la première ligne, puisque sur l'ensemble $R_2+1\leq r\leq R_3$, on a $\Psi=1$. Le terme d'erreur $Ch^2\left(\int_{\mathrm{supp}(\Psi')}|u|^2+|h\nabla u|^2\right)$ est contrôlé par le deuxième terme de la première ligne, puisque $\chi=1$ sur le support de Ψ'. On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}(3.15)\quad & \|(P_{\theta,\varphi}-Id)\,u\|^2 + ChCe^{\varphi(R_2)/h}\|(P_{\theta,\varphi}-Id)\,u\|\,|||u|||^{3/2} \\ & \qquad + Ce^{2\varphi(R_2)/h}\|(P_{\theta,\varphi}-Id)\,u\|\,|||u||| \\ & \geq C'\int \Psi\left(|u|^2+|h\nabla u|^2\right) + C'h\int \frac{\varphi'}{r}\left(|\chi u|^2+|h\nabla\chi u|^2\right) \geq Ch|||u|||^2\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(3.16)\qquad |||u|||^2 \leq Ce^{C'/h}\|(P_{\theta,\varphi}-Id)\,u\|^2$$

et démontre, en revenant à v, l'estimation (2.4) et donc le théorème 2

Références

[Bur98] N. Burq. Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonnance au voisinage du réel. *Acta Mathematica*, 180 :1–29, 1998.

[FL90] C. Fernandez and R. Lavine. Lower bounds for resonance width in potential and obstacle scattering. *Communications in Mathematical Physics*, 128 :263–284, 1990.

[Har82] E. Harrel. General lower bounds for resonances in one dimension. *Communications in Mathematical Physics*, 86 :221–225, 1982.

[HS86] B. Helffer and J. Sjöstrand. Resonances en limite semi-classique. *Mémoire de la S.M.F.*, 114(24-25), 1986.

[Leb96] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. In A. Boutet de Monvel and V. Marchenko, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[LR95] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Prépublications de l'université de Paris-Sud*, 95-40, 1995.

[Mar98] A. Martinez. Estimation de l'effet tunnel pour le double puits ii, états hautement excités. *Bull. Soc. math. France*, 116 :199–229, 1998.

[Sjö97] J. Sjöstrand. A trace formula and review of some estimates for resonances. In *Microlocal Analysis and Spectral Theory*, volume 490 of *NATO ASI series C*, pages 377–437. Kluwer, 1997.

Nicolas Burq, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau (URA 169 du CNRS) • *E-mail :* burq@math.polytechnique.fr