SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Jean-Michel Bony

Caractérisations des opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° XXIII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A23_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Dans le cadre général du calcul de Weyl-Hörmander, dont nous rappelons les traits essentiels au §1, peut-on caractériser les opérateurs pseudo-différentiels A (de poids 1) par le fait que des commutateurs itérés de A sont bornés sur L^2? Le modèle de ces résultats est le célèbre théorème de R. Beals relatif aux éléments de $\mathrm{Op}(S^0_{00})$, dont nous ne résistons pas au plaisir de donner une nouvelle démonstration au §2. Nous rappelons également au §3 la caractérisation, obtenue dans [B&C], en termes de commutateurs localisés.

Aux §§4 et 5, sous des hypothèses supplémentaires sur la métrique (tempérance géodésique et lenteur renforcée), nous montrons que la réponse à la question ci-dessus est affirmative (théorème 4.3). Nous montrons également que les fonctions d'un opérateur pseudo-différentiel, et notamment son inverse s'il existe en tant qu'opérateur borné sur L^2, sont elles-même des opérateurs pseudo-differentiels (corollaires 4.4 et 4.5, théorème 4.6).

1 Rappels sur le calcul de Weyl-Hörmander

La quantification de Weyl associe à toute distribution a sur $\mathbf{R}^{2n}$ l'opérateur a^w, appliquant $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, défini par

$$a^w u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a\Big(\tfrac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y)\, dy\, d\xi/(2\pi)^n \,.$$

Pour $X = (x, \xi)$ et $Y = (y, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, nous noterons $[X, Y] = y\cdot\xi - x\cdot\eta$ la forme symplectique. Lorsqu'il est défini, le produit de composition $a\#b$ de deux symboles est donné par

$$(a\#b)(X) = \iint e^{-2i[X-Y, X-Z]} a(Y) b(Z)\, dY\, dZ/\pi^{2n} \,, \tag{1}$$

et on a $(a\#b)^w = a^w \circ b^w$.

Les classes de symboles de Hörmander [Hö1] [Hö2] sont associées à une métrique riemannienne g sur $\mathbf{R}^{2n}$. Pour chaque $X \in \mathbf{R}^{2n}$, on définit g^σ_X qui est la meilleure (i.e. la plus petite) forme quadratique sur $\mathbf{R}^{2n}$ telle que l'on ait

$$|[S, T]| \le g^\sigma_X(S)^{1/2} g_X(T)^{1/2} \,.$$

Il s'agit en fait de l'inverse de la forme quadratique g_X, l'espace $\mathbf{R}^{2n}$ étant identifié à son dual par la forme symplectique. On introduit également λ et Λ qui sont les meilleures fonctions sur $\mathbf{R}^{2n}$ telles que l'on ait

$$\lambda(X)^2 g_X \le g^\sigma_X \le \Lambda(X)^2 g_X \,.$$

Dans des coordonnées symplectiques où g_X se diagonalise sous la forme

$$g_X(dx, d\xi) = \sum \frac{dx_i^2}{a_i^2} + \frac{d\xi_i^2}{\alpha_i^2} \,,$$

on a $g_X^\sigma = \sum \alpha_i^2 dx_i^2 + a_i^2 d\xi_i^2$, les produits $a_i\alpha_i$ ne dépendent pas des coordonnées choisies et

$$\lambda(X) = \min_i a_i\alpha_i \quad ; \quad \Lambda(X) = \max_i a_i\alpha_i \,.$$

On dit que g est une *métrique de Hörmander* si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- *Principe d'incertitude* : $\lambda(X) \geq 1$.
- *Lenteur* : Il existe $\overline{C} > 0$ tel que

$$g_Y(X-Y) \leq \overline{C}^{-1} \Rightarrow \Big(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot)\Big)^{\pm 1} \leq \overline{C} \,. \tag{2}$$

- *Tempérance* : il existe des constantes $\overline{C} > 0$ et $\overline{N} \in \mathbf{N}$ telles que

$$\Big(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot)\Big)^{\pm 1} \leq \overline{C}\Big(1 + g_Y^\sigma(Y-X)\Big)^{\overline{N}} \,. \tag{3}$$

Un *poids relatif à* g est une fonction strictement positive sur $\mathbf{R}^{2n}$ qui vérifie, pour $\overline{C}$ et $\overline{N}$ convenables,

$$\Big(M(Y)/M(X)\Big)^{\pm 1} \leq \begin{cases} \overline{C} & \text{pour } g_Y(X-Y) \leq 1/\overline{C} \\ \overline{C}\Big(1 + g_Y^\sigma(Y-X)\Big)^{\overline{N}} & \text{pour } X, Y \in \mathbf{R}^{2n} \,. \end{cases} \tag{4}$$

Les *classes de symboles* $S(M,g)$ sont constituées des fonction $a(X)$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{2n}$ telles que les semi-normes suivantes sont finies :

$$\|a\|_{k\,;S(M,g)} = \sup_{l\leq k\,;\,X\,;\,T_j} \frac{|\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_l}a(X)|}{M(X)} \quad \text{pour } X \in \mathbf{R}^{2n} \text{ et } g_X(T_j) \leq 1 \,, \tag{5}$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $a \mapsto \langle da, T\rangle$.

Sous les hypothèses ci-dessus, pour $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et, si $M = 1$, de L^2 dans lui-même. En outre, l'adjoint formel de a^w est $\overline{a}^w$ et on a

$$S(M_1, g)\#S(M_2, g) \subset S(M_1M_2, g) \,.$$

On note $\Psi(M,g)$ l'espace des opérateurs a^w avec $a \in S(M,g)$.

Un exemple typique est celui des métriques $g_X = \langle\xi\rangle^{2\delta}dx^2 + \langle\xi\rangle^{-2\rho}d\xi^2$ qui vérifient les conditions ci-dessus pour $\delta \leq \rho \leq 1$ et $\delta < 1$. Pour $M(X) = \langle\xi\rangle^m$, l'espace $S(M,g)$ correspondant est l'espace classique $S^m_{\rho,\delta}$.

On désigne par $B_{Y,r}$ la g_Y-boule de centre Y et de rayon r. *L'espace* $\mathrm{Conf}(g,Y,r)$ *des symboles confinés* [B&L] *dans* $B_{Y,r}$ est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la suite de semi-normes

$$\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} = \sup_{\substack{l\leq k\,;\,X\in\mathbf{R}^{2n}\\ g_Y(T_j)\leq 1}} |\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_l}a(X)|\,(1+g_Y^\sigma(X-B_{Y,r}))^{k/2}\,.$$

Une famille (a_Y), indexée par $Y\in\mathbf{R}^{2n}$, est dite *uniformément confinée* si, pour tout k, on a $\|a_Y\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}\leq C_k$, les C_k étant indépendants de Y.

Il existe des partitions de l'unité

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y\,|g_Y|^{1/2}\,dY = 1\;, \tag{6}$$

où les φ_Y sont uniformément confinés dans $B_{Y,r}$ et où $|g_Y|$ est le déterminant de la forme quadratique g_Y. Il existe aussi (voir [B&C]) des partitions de l'unité du type

$$\sum_{\nu\in\mathbf{N}}\int_{\mathbf{R}^{2n}} \psi_{Y,\nu}\#\theta_{Y,\nu}\,|g_Y|^{1/2}\,dY = 1\;, \tag{7}$$

où, pour tout N, les $\nu^N\psi_{Y,\nu}$ et $\nu^N\theta_{Y,\nu}$ sont uniformément confinés dans $B_{Y,r}$.

2 Cas d'une métrique constante

Si γ est une métrique constante sur $\mathbf{R}^{2n}$ vérifiant $\gamma\leq\gamma^\sigma$, l'espace $S(1,\gamma)$ n'est autre que l'espace $S^0_{0,0}$ des fonctions bornées ainsi que toutes leurs dérivées, mais muni de la suite spécifique de semi-normes $\|\cdot\|_{k\,;S(1,\gamma)}$ données par (5). Le théorème suivant de [B&C] est la caractérisation classique, due à R. Beals [Be], de $\mathrm{Op}\,S^0_{0,0}$, dont l'uniformité en γ est explicitée. Nous noterons $\mathrm{ad}\,A\cdot B$ le commutateur $AB-BA$.

Théorème 2.1 (a) *Un opérateur A est de la forme $A=a^w$ avec $a\in S^0_{0,0}$ si et seulement si les commutateurs itérés* $\mathrm{ad}\,L_1^w\ldots\mathrm{ad}\,L_p^w\cdot A$ *sont bornés sur L^2 lorsque les fonctions $L_j(X)=[T_j,X]$ sont des formes linéaires.*
(b) *Il existe des constantes C_k et $l(k)$, uniformes en γ, telles que l'on ait*

$$\|a\|_{k\,;S(1,\gamma)}\leq C_k\sup_{p\leq l(k);T_j}\left\|\mathrm{ad}\,L_1^w\ldots\mathrm{ad}\,L_p^w\cdot A\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}\qquad\text{pour }\gamma(T_j)\leq 1\,.$$

C'est en fait une conséquence directe du lemme suivant, qui relève purement de la théorie des distributions.

Lemme 2.2 *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach contenu dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$, l'injection étant continue. On suppose que $\mathcal{B}$ est invariant par translation : si $b\in\mathcal{B}$ et*

$x_0 \in \mathbf{R}^\nu$, alors $b(\cdot - x_0)$ appartient aussi à $\mathcal{B}$ et a la même norme. Il existe alors C et N tels que

$$\|a\|_{L^\infty} \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha a\|_{\mathcal{B}}$$

pour tout $a \in \mathcal{S}'$ tel que le membre de droite soit fini.

2.3 *Démonstration du théorème 2.1 .* On peut d'abord faire un changement de coordonnées symplectiques de telle sorte que γ s'écrive $\sum(dx_i^2 + d\xi_i^2)/a_i^2$ avec $a_i \geq 1$. Les vecteurs de la base symplectique ont ainsi une norme (pour γ) inférieure ou égale à 1.

L'espace $\mathcal{B}$ des symboles tels que $\|b\|_{\mathcal{B}} = \|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ soit fini vérifie les hypothèses du lemme : on a $b(\cdot - X_0)^w = U^\star b^w U$ où l'opérateur U (une translation de phase) est unitaire. Il existe donc C et N tels que

$$\|b\|_{L^\infty} \leq C \sup_{|\alpha|+|\beta|\leq N} \left\| \left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b\right)^w \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sup_{q\leq N\,;\,T_j} \left\| \operatorname{ad} L_1^w \ldots \operatorname{ad} L_q^w \cdot b^w \right\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

pour $\gamma(T_j) \leq 1$, les commutateurs de b^w avec L^w pour $L(X) = x_i$ ou ξ_i ayant pour symbole les dérivées partielles de b.

Il ne reste plus qu'à appliquer cette inégalité à $\operatorname{ad} L_1^w \ldots \operatorname{ad} L_p^w \cdot b^w$, dont le symbole est $\partial_{T_1} \ldots \partial_{T_p} b$ pour obtenir le résultat avec $l(k) = k + N$.

2.4 *Démonstration du lemme 2.2 .* La boule unité de $\mathcal{B}$ est un borné de $\mathcal{S}'$, et il existe donc des constantes C_1 et N_1 avec $|\langle b, \varphi\rangle| \leq C_1 \|b\|_{\mathcal{B}} \|\varphi\|_{N_1,\mathcal{S}}$ en posant $\|\varphi\|_{N_1,\mathcal{S}} = \sup \left\|x^\beta \partial^\alpha \varphi\right\|_{L^\infty}$ pour $|\alpha| + |\beta| \leq N_1$. On a d'autre part $b\star\varphi(x) = \langle b(\cdot + x), \check{\varphi}\rangle$ et donc

$$\|b \star \varphi\|_{L^\infty} \leq C_1 \|b\|_{\mathcal{B}} \|\varphi\|_{N_1,\mathcal{S}} \ .$$

Choisissons maintenant $\chi \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier est égale à 1 près de 0, et formons l'approximation de l'identité $\chi_\varepsilon = \varepsilon^{-\nu}\chi(\cdot/\varepsilon)$. On a $\partial\chi_\varepsilon/\partial\varepsilon = \varepsilon^{-\nu-1}\psi(\cdot/\varepsilon)$ où $\widehat{\psi}$ s'annule près de 0. On peut écrire, pour N à choisir ci-dessous, $\widehat{\psi}(\xi) = \sum_{|\alpha|=N} (i\xi)^\alpha \widehat{\theta}_\alpha(\xi)$ et donc $\psi = \sum_{|\alpha|=N} \partial^\alpha \theta_\alpha$. On a ainsi

$$(\partial/\partial\varepsilon)\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{N-1} \sum (\partial^\alpha/\partial x^\alpha)(\theta_{\alpha\varepsilon}(x)) \ .$$

D'autre part, on a

$$\|\theta_{\alpha\varepsilon}\|_{N_1,\mathcal{S}} \leq \varepsilon^{-\nu-N_1} \sup_{\beta,\gamma\leq N_1} \left|y^\beta \partial^\gamma \theta_\alpha(y)\right| \ .$$

$$a \star \chi_1 - a \star \chi_\delta = \int_\delta^1 (\partial/\partial\varepsilon)\left\{a \star \chi_\varepsilon\right\} d\varepsilon = \int_\delta^1 \varepsilon^{N-1} \sum (\partial^\alpha a) \star \theta_{\alpha\varepsilon}\, d\varepsilon \ ,$$

$$\|a \star \chi_\delta\|_{L^\infty} \leq \|a \star \chi_1\|_{L^\infty} + \mathrm{C^{te}} \int_\delta^1 \varepsilon^{N-1-\nu-N_1} \sum_{|\alpha|=N} \|\partial^\alpha a\|_{\mathcal{B}}\, d\varepsilon \ .$$

En choisissant $N > \nu + N_1$, on obtient une borne des $\|a \star \chi_\delta\|_{L^\infty}$ indépendante de δ, et le résultat en faisant tendre δ vers 0.

3 Commutateurs localisés

Le résultat suivant est démontré dans [B&C], l'ingrédient essentiel étant l'application du théorème 2.1, pour la métrique constante g_Y, à l'opérateur (micro)localisé $\theta^w_{Y,\nu} \circ A$ ci-dessous.

Théorème 3.1 *Soient g une métrique de Hörmander, M un g-poids et A un opérateur appliquant $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*
(a) *$A \in \Psi(M, g)$.*
(b) *Pour toute famille (φ_Y) uniformément confinée, on a*

$$\|\mathrm{ad}\, L_1 \ldots \mathrm{ad}\, L_p \cdot (\varphi^w_Y \circ A)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_p M(Y) \prod_1^p g_Y(T_j)^{1/2} ,$$

pour $L_j(X) = [T_j, X]$, les C_p ne dépendant pas de Y et des T_j.
(c) *Pour une famille $\theta_{Y,\nu}$ figurant dans une partition de l'unité (7), on a*

$$\left\|\mathrm{ad}\, L_1 \ldots \mathrm{ad}\, L_p \cdot \left(\theta^w_{Y,\nu} \circ A\right)\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_p M(Y) \prod_1^p g_Y(T_j)^{1/2}$$

avec des constantes indépendantes de Y, ν et des T_j.

Nous allons donner une reformulation de ce théorème qui n'est ni plus simple ni plus facile à utiliser. Elle présente néanmoins deux avantages. D'une part, elle ne fait pas appel aux formes linéaires sur $\mathbf{R}^{2n}$ et conserve son sens si on compose les symboles avec une transformation canonique de l'espace des phases, ce qui permet de l'utiliser (voir [Bo]) pour définir les opérateurs intégraux de Fourier. D'autre part, elle n'utilise que des commutateurs de l'opérateur A lui-même. Nous aurons besoin du concept suivant.

Définition 3.2 *Si M est un g-poids, on note $S^+(M, g)$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^{2n}$ telles que les semi-normes suivantes soient finies pour $k = 0, 1, \ldots$*

$$\|a\|_{k,S^+(M,g)} = \sup_{l\,,X\,,S\,,T_j} M(X)^{-1} \left|\partial_S \partial_{T_1} \ldots \partial_{T_l} a(X)\right| < \infty$$

$$\text{pour } l \leq k,\ g^\sigma_X(S) \leq 1,\ g_X(T_j) \leq 1 .$$

Remarques **3.3** La condition ne porte que sur les dérivées d'ordre ≥ 1 de a. On a toujours $S(M\lambda, g) \subset S^+(M, g)$ mais l'inclusion est en général stricte. Par exemple, si g est une métrique constante, l'espace $S(\lambda, g)$ n'est autre que l'espace S^0_{00} et est formé de fonctions bornées, alors que les formes linéaires appartiennent à $S^+(1, g)$.

Dans le cas général, une forme linéaire $X \mapsto [T, X]$ appartient à $S^+(\mu_T, g)$, avec $\mu_T(X) = g_X(T)^{1/2}$.

Théorème 3.4 (a) *Si* $a \in S^+(M_1, g)$ *et* $b \in S(M_2, g)$ *alors* $a\#b - b\#a \in S(M_1 M_2, g)$.
(b) *Si* $a \in S^+(M_1, g)$ *et* $b \in S^+(M_2, g)$ *alors* $a\#b - b\#a \in S^+(M_1 M_2, g)$. *On a de plus*

$$a\#b - b\#a \equiv -i\,\{a, b\} \quad (\mathrm{mod}\; S(M_1 M_2, g))$$

où $\{a, b\}$ *est le crochet de Poisson et*

$$\{a, b\} \in S^+(M_1 M_2, g) \cap S(M_1 M_2 \Lambda, g)\,.$$

La démonstration repose sur la formule suivante, qui se déduit de (1)

$$\begin{aligned} a\#b(X) &= a(X)b(X) \\ &\quad + \int_0^1 \iint e^{-2i[X-Y, X-Z]/\theta}\, \tfrac{1}{2i}[\partial_Y, \partial_Z] a(Y) b(Z)\, dY\, dZ/(\pi\theta)^{2n}\, d\theta \end{aligned} \tag{8}$$

où l'opérateur $[\partial_Y, \partial_Z]$ s'écrit $\sum \partial^2/\partial y_j \partial\zeta_j - \partial^2/\partial z_j \partial\eta_j$ dans toute base symplectique. Un point X_0 étant fixé, on peut ainsi écrire

$$[\partial_Y, \partial_Z] = \sum_{k=1}^{2n} \langle S_k, \partial_Y\rangle \langle T_k, \partial_Z\rangle \quad \text{avec} \quad g^\sigma_{X_0}(S_k) \leq 1 \text{ et } g_{X_0}(T_k) \leq 1\,.$$

On a alors $a\#b - ab = \frac{1}{2i} \sum \int_0^1 \partial_{S_k} a \#_\theta \partial_{T_k} b\, d\theta$, en posant

$$\alpha \#_\theta \beta(X) = \iint e^{-2i[X-Y, X-Z]/\theta} \alpha(Y) \beta(Z)\, dY\, dZ/(\pi\theta)^{2n}\,.$$

Les estimations valables pour la loi de composition # sont aussi valables, uniformément en θ, pour $\#_\theta$, qui “interpole” le produit usuel (pour $\theta \to 0$) et le produit de composition (pour $\theta = 1$). Les fonctions $\partial_{S_k} a$ appartenant à $S(\mu, g)$, où μ est un poids coïncidant avec M_1 près de X_0, le théorème en résulte sans difficulté.

Remarque **3.5** La formule analogue à (8) comportant les deux premiers termes du développement est de la forme

$$a\#b = ab + \tfrac{1}{2i}\,\{a, b\} + R_2(a, b) \tag{9}$$

où l'expression intégrale de R_2 ne porte que sur les dérivées secondes de a et b. La finitude des semi-normes $\|a\|_{k, S^+(M_1, g)}$ et $\|b\|_{k, S^+(M_2, g)}$ pour $k \geq 1$ suffit pour conclure que $R_2(a, b)$ appartient à $S(M_1 M_2, g)$.

Si $E \in \Psi(M^{-1}, g)$ et $B \in \Psi^+(M, g)$, l'application $A \mapsto E\, \mathrm{ad}\, B \cdot A$ opère de $\Psi(1, g)$ dans lui-même. Le théorème 3.1 peut se reformuler comme suit.

Corollaire 3.6 *Pour qu'un opérateur A appartienne à $\Psi(1,g)$, il faut et il suffit que, quels que soient $E_j \in \Psi(M_j^{-1},g)$ et $B_j \in \Psi^+(M_j,g)$, on ait*

$$\|(E_1 \operatorname{ad} B_1)\dots(E_p \operatorname{ad} B_p)\cdot A\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le C \prod_j \|B_j\|_{k\,;\,S(M_j^{-1},g)} \|E_j\|_{k\,;\,S(M_j^{+},g)}$$

les constantes $C = C(p)$ et $k = k(p)$ ne dépendant des M_j que par l'intermédiaire de leurs constantes $\overline{C}$ et $\overline{N}$ dans (4).

On se ramène au théorème en choisissant $M_j(X) = \mu_{T_j}(X)$ et les opérateurs B_j et E_j ayant pour symbole respectivement $[T_j, X]$ et $\mu_{T_j}(Y)^{-1}\theta_{Y,\nu}$, en remarquant que les poids μ_T ont des constantes $\overline{C}$ et $\overline{N}$ indépendantes de T.

Remarque **3.7** Dans le corollaire précédent, il suffit donc de considérer des poids M_j du type μ_{T_j} et de demander que les constantes ne dépendent pas des M_j. On trouvera dans [B&C] des hypothèses sur g rendant inutile la vérification de cette condition d'uniformité.

4 Résultats

Les opérateurs $E \operatorname{ad} B$, appliqués à l'inverse (ou à une fonction) d'un opérateur ne possèdent pas les propriétés algébriques des vrais commutateurs. Il est donc souhaitable de pouvoir caractériser les opérateurs pseudo-différentiels à l'aide de leurs commutateurs avec les éléments B de $\Psi^+(1,g)$. La propriété d'inversion (un élément de $\Psi(1,g)$ est inversible dans $\Psi(1,g)$ s'il l'est dans $\mathcal{L}(L^2)$) en sera une conséquence directe.

Les symboles $b \in S^+(1,g)$ sont des fonctions g^σ-lipschitziennes, et il n'est pas surprenant de voir la *distance géodésique d^σ relative à g^σ* jouer un rôle important.

Dans le cas particulier des métriques symplectiques ($g = g^\sigma$), la tempérance géodésique a été introduite par A. Unterberger [Un] et a permis à F. Bruyant [Br] de démontrer dans ce cas la propriété d'inversion. Dans les hypothèses de [B&C] permettant de prouver cette même propriété, la nécessité de disposer d'une vraie distance, vérifiant l'inégalité du triangle (ce qui n'est pas le cas du “gain” dû à la tempérance), apparaissait pour une autre raison. Il serait aussi possible, dans le cas symplectique, d'adapter un théorème de Jaffard et Journé [Ja] sur l'inversion des matrices infinies, dans lequel l'inégalité triangulaire est également requise.

Définition 4.1 (tempérance géodésique) *On dit que g est géodésiquement tempérée, si g est tempérée et si l'on a*

$$\Big(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot)\Big)^{\pm 1} \le \overline{C}\Big(1 + d^\sigma(Y,Z)\Big)^{\overline{N}} . \tag{10}$$

La propriété (10) à elle seule n'entraîne pas la tempérance, comme le montre l'exemple de la métrique $e^{-2|\xi|}dx^2 + e^{2|\xi|}d\xi^2$ en dimension 1. Il est vraisemblable qu'il existe des métriques de Hörmander qui ne sont pas géodésiquement tempérées, mais nous n'en connaissons pas d'exemple. Les métriques de type (ρ, δ) sont géodésiquement tempérées.

Si g est géodésiquement tempérée, il n'est pas difficile de montrer que l'on a

$$C^{-1}\Big(1 + d^\sigma(Y,Z)\Big)^{1/N} \le 1 + g_Y^\sigma(Y-Z) \le C\Big(1 + d^\sigma(Y,Z)\Big)^N .$$

La seconde propriété dont nous aurons besoin peut sembler (à tort, voir le n°5.5) purement technique. Cela dit, pour la plupart des métriques effectivement utilisées, et notamment pour les métriques de type (ρ, δ), on a $g^\sigma = \lambda^2 g$ et la lenteur renforcée se réduit à la lenteur usuelle. Rappelons que $\Lambda(X)^2 = \sup_T g_X^\sigma(T)/g_X(T)$.

Définition 4.2 (lenteur renforcée) *Une métrique g possède cette propriété s'il existe $\overline{C}$ tel que*

$$g_Y^\sigma(X-Y) \le \overline{C}^{\,-1}\Lambda(Y)^2 \implies \Big(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot)\Big)^{\pm 1} \le \overline{C}\ .$$

Notre résultat principal, dont on trouvera la démonstration au §5, est le suivant.

Théorème 4.3 *On suppose que g possède les propriétés de tempérance géodésique et de lenteur renforcée. Pour qu'un opérateur A appartienne à $\Psi(1,g)$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\mathrm{ad}\, B_1 \ldots \mathrm{ad}\, B_p \cdot A \in \mathcal{L}(L^2) \tag{11}$$

quels que soient les $B_j \in \Psi^+(1,g)$.

Corollaire 4.4 *Sous les mêmes hypothèses sur la métrique g, si A appartient à $\Psi(1,g)$ et est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$, on a $A^{-1} \in \Psi(1,g)$.*

On a en effet $\mathrm{ad}\, B \cdot A^{-1} = -A^{-1}(\mathrm{ad}\, B \cdot A)\, A^{-1}$. Plus généralement, $\mathrm{ad}\, B_1 \ldots \mathrm{ad}\, B_p \cdot A^{-1}$ s'écrit comme somme de produits de termes égaux à A^{-1} ou à des commutateurs itérés des B_j et de A, et est donc borné sur L^2.

Corollaire 4.5 *On suppose toujours que g possède les deux propriétés ci-dessus.*
(a) *Soit $a \in S(1,g)$ à valeurs réelles et soit $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Alors l'opérateur $f(a^w)$, au sens du calcul fonctionnel sur les opérateurs autoadjoints, appartient à $\Psi(1,g)$.*
(b) *Soit $M \ge 1$ un g-poids, et $a \in S(M,g)$ un symbole à valeurs réelles tel que a^w soit elliptique. Soit $f \in C^\infty(R)$ vérifiant $\left|f^{(k)}(t)\right| \le C_k(1+|t|)^{p-k}$. Alors, l'opérateur $f(a^w)$ appartient à $\Psi(M^p, g)$.*

Dans cet énoncé, "elliptique" signifie que l'on a l'estimation suivante, utilisant les espaces de Sobolev $H(M,g)$ (voir [B&C]) :

$$\forall u \in H(M,g)\ , \quad \|u\|_{H(M,g)} \leq C(\|a^w u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})\ .$$

Dans le cas où $M(X)$ est majoré par une puissance de $\lambda(X)$, cette propriété équivaut à $1 + |a(X)| \geq C^{-1}M(X)$.

La démonstration repose sur le fait que les resolvantes $(z-A)^{-1}$ sont, pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, des opérateurs pseudo-différentiels dont on peut estimer les semi-normes, et sur la formule de Helffer-Sjöstrand [H&S] :

$$f(A) = -\pi^{-1} \iint_{\mathbf{C}} \overline{\partial}\tilde{f}(z)(z-A)^{-1}\, dx\, dy\ ,$$

où $\tilde{f}$ est une extension presque analytique de f.

Ces derniers résultats sont en fait valables sous des hypothèses plus générales que celles permettant de démontrer le théorème 4.3.

Théorème 4.6 *On suppose que g est une métrique de Hörmander vérifiant de plus*

$$\Big(g_Y(\cdot)/g_Z(\cdot)\Big)^{\pm 1} \leq \overline{C}\Big(1 + D(Y,Z)\Big)^{\overline{N}}\ ;\ \ D{:=}\ \textit{distance géodésique pour}\ \lambda^2 g. \tag{12}$$

Alors les conclusions des corollaires 4.4 et 4.5 (a) sont valables. Celle du corollaire 4.5 (b) l'est aussi, pourvu que $(M(Y)/M(Z))^{\pm 1}$ soit majoré, pour $\overline{C}$ et $\overline{N}$ convenables, par le membre de droite de (12).

Il existe (voir [Bo]) des hypothèses intermédiaires conduisant au même résultat, faisant intervenir la distance géodésique pour une métrique comprise entre $\lambda^2 g$ et g^σ, et une lenteur "un peu renforcée".

5 Esquisse des démonstrations

Nous nous plaçons donc sous les hypothèses du théorème 4.3 : la métrique g possède les propriétés de tempérance géodésique et de lenteur renforcée et l'opérateur A, ainsi que ses commutateurs itérés avec les éléments de $\Psi^+(1,g)$, est borné sur L^2.

5.1 Première étape *A tout couple de points (Y,Z), nous allons associer $p = p_{YZ} \in S^+(1,g)$ tel que*

$$X \in B_{Y,r} \Rightarrow p(X) = 0 \quad ; \quad X \in B_{Z,r} \Rightarrow p(X) = \delta := d^\sigma\left(B_{Y,Cr}, B_{Z,Cr}\right)\ ,$$

avec C et des bornes des semi-normes de p_{YZ} indépendantes de (Y,Z).

On définit d'abord la fonction $q(X) = \min\{\delta\,,\ d^\sigma(X, B_{Y,Cr})\}$ qui est g^σ-lipschitzienne de rapport 1. L'hypothèse de lenteur renforcée permet de régulariser g et de se ramener au cas où on a

$$\langle T_1, \partial X\rangle \ldots \langle T_p, \partial X\rangle\, g_X(V) \leq \mathrm{C^{te}} g_X(V)\Lambda(X)^{-p} \prod g^\sigma(T_j)^{1/2}\,.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} p(X) &= \int q(U)\Phi_r\left(g_X(X-U)^{1/2}\right) |g_X|^{1/2}\, dU && (13)\\ &= \int q(X - R_X V)\Phi_r(|V|)\, dV\,, && (14)\end{aligned}$$

où $V \mapsto \Phi_r(|V|)$ est une fonction C^∞ d'intégrale 1 à support dans la boule euclidienne de rayon r, et où R_X applique cette boule dans la g_X-boule de même rayon.

Le point important est d'estimer $\langle S, \partial_X\rangle\, p$ pour $g^\sigma_X(S) \leq 1$. La dérivation sous le signe somme dans (14) fait apparaître $\partial_S q$ qui est majoré par 1, mais aussi des termes en $\partial_{S_j} q$ provenant de la dérivation de R_X. Grâce à la lenteur renforcée, on a $g_X(S_j) \leq \mathrm{C^{te}}\Lambda(X)^{-2} g^\sigma_X(S)$ et donc $g^\sigma_X(S_j) \leq \mathrm{C^{te}}$.

Les fonctions $\langle S, \partial_X\rangle\, p$ sont donc bornées et un changement de variable les met sous une forme analogue à (13) où $q(U)$ est remplacé par une fonction bornée. Il est alors immédiat d'obtenir des bornes uniformes des $\prod \langle T_j, \partial_X\rangle\, \langle S, \partial_X\rangle\, p$ pour $g_X(T) \leq 1$. Enfin, pourvu que C soit assez grand par rapport à la constante de lenteur, on a bien $q = 0$ ou δ dans les g-boules de rayon r centrées en Y ou Z.

5.2 Seconde étape *Sous les hypothèses du théorème 4.3, si α_Y et β_Z sont respectivement confinés dans $B_{Y,r}$ et $B_{Z,r}$, on a*

$$\delta\, \alpha^w_Y A \beta^w_Z = \sum_{j=1}^{3} \alpha^w_{jY} A_j \beta^w_{jZ} \qquad (15)$$

où α_{jY} et β_{jZ} sont confinés dans les mêmes boules et où A_j vérifie (11), avec bien entendu un contrôle uniforme des semi-normes.

On écrit

$$\delta\, \alpha^w_Y A \beta^w_Z = \alpha^w_Y A(\delta - p)^w \beta^w_Z - \alpha^w_Y(\mathrm{ad}\, p^w \cdot A)\beta^w_Z + \alpha^w_Y p^w A \beta^w_Z\,.$$

Les opérateurs A et $\mathrm{ad}\, p^w \cdot A$ vérifient (11), et il reste à montrer le confinement de $\alpha_Y \# p$ (et de $(\delta - p)\#\beta_Z$ qui est du même type). Le confinement de $\alpha_Y\#p - \alpha_Y p$ résulte facilement de la démonstration du théorème 3.4 et, pour prouver le confinement du produit, on montre que les g-dérivées de p en X sont contrôlées par des puissances de la g^σ-distance géodésique de X à $B_{Y,r}$.

Une récurrence évidente montre que (15) est encore valable en remplaçant δ par δ^N au membre de gauche. En notant maintenant $\delta = \delta_{YZ}$, on en déduit l'estimation

$$\|\alpha_Y^w A \beta_Z^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_N (1 + \delta_{YZ})^{-N}\,, \tag{16}$$

les constantes C_N étant uniformes pour des α_Y et β_Z uniformément confinés.

5.3 Troisième étape Il s'agit de traiter, en n'utilisant en fait que (16), la partie de l'opérateur A "microlocalisée loin de la diagonale". On a le résultat suivant.

Soient (α_Y) et (β_Y) uniformément confinées. Pour $g_Y^\sigma(Y - Z) \geq Cr^2\Lambda(Y)^2$, on a (en notant a le symbole de A)

$$\|\alpha_Y \# a \# \beta_Z\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C_{k,N}(1 + \delta_{YZ})^{-N}\,.$$

D'après [B&C], on peut écrire α_Y comme somme rapidement convergente de produits $\alpha'_{Y,\nu} \# \alpha''_{Y,\nu}$ de symboles confinés, et on se ramène donc à estimer le confinement de termes du type $\alpha'_Y \# \alpha''_Y \# a \# \beta'_Z \# \beta''_Z$ que l'on réécrira $\alpha'_Y \# a_{YZ} \# \beta''_Z$.

On sait que la norme de a_{YZ}^w comme opérateur dans L^2 décroît comme $(1 + \delta_{YZ})^{-N}$ pour tout N. D'autre part, dans la région considérée, on a $\Lambda(Y) + \Lambda(Z) \leq \mathrm{C^{te}}\delta_{YZ}$. Le résultat est alors conséquence directe des deux ingrédients suivants (valables pour Y, Z quelconques et $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$).
Comparaison des semi-normes de confinement en deux points différents :

$$\|\beta\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C\,\|\beta\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Z,r)}\,(1 + \delta_{YZ})^N \Lambda(Z)^N\,,$$

avec C, N ne dépendant que de k.
Microlocalisation d'un opérateur borné sur L^2 :

$$\|\alpha \# a \# \beta\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C\,\|a^w\|_{\mathcal{L}(L^2)}\,\|\alpha\|_{l\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}\,\|\beta\|_{l\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}\,\Lambda(Y)^N\,,$$

avec C, l, N ne dépendant que de k.

5.4 Dernière étape Notre but est d'utiliser le théorème 3.1 pour montrer que A appartient à $\Psi(1, g)$. On peut écrire, en utilisant une partition de l'unité (6),

$$\theta_{Y,\nu}^w A = \int_{g_Y^\sigma(Y-Z) \leq Cr^2\Lambda(Y)^2} \theta_{Y,\nu}^w A \varphi_Z^w\,|g_Z|^{1/2}\,dZ + r_{Y,\nu}\,.$$

Nous laisserons tomber l'indice ν, ainsi que le terme $r_{Y,\nu}$ (l'intégrale sur $g_Y^\sigma(Y - Z) \geq Cr^2\Lambda(Y)^2$) qui, d'après l'étape précédente, est uniformément confiné. Nous allons donc montrer que, si $L(X) = [T, X - Y]$ avec $g_Y(T) \leq 1$, la norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de $\operatorname{ad} L \cdot (\theta_Y^w A)$ est bornée uniformément en Y, le même argument s'appliquant aux commutateurs itérés.

Soit $\Phi_Y(X) = \Phi\left(\frac{g_Y^\sigma(X-Y)}{Cr^2\Lambda(Y)^2}\right)$, où $\Phi(t)$ vaut 1 pour $t \leq 2$ et 0 pour $t \geq 3$, et posons

$$L(X) = \Phi_Y(X)L(X) + (1 - \Phi_Y(X))L(X) = l(X) + m(X)\,.$$

Il est clair que, avec des semi-normes indépendantes de Y, on a $l \in S^+(1, g)$ et $m \in S^+(\mu_T, g)$ et que m est nulle dans $B_{Z,r}$ si $g_Y^\sigma(Y - Z) \leq Cr^2\Lambda(Y)^2$. Pour un tel Z, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{ad} L^w \cdot (\theta_Y^w A \varphi_Z^w) = (\operatorname{ad} l^w \cdot \theta_Y^w) A \varphi_Z^w + \theta_Y^w A (\operatorname{ad} l^w \cdot \varphi_Z^w)&\\ + \theta_Y^w (\operatorname{ad} l^w \cdot A) \varphi_Z^w + m^w \theta_Y^w A \varphi_Z^w - \theta_Y^w A \varphi_Z^w m^w\,.&\end{aligned}$$

Ces cinq termes sont du type ${\theta'_Y}^w A' {\varphi'_Z}^w$ où les θ'_Y, φ'_Z sont uniformément confinés et où A' possède les mêmes propriétés de commutation avec les éléments de $S^+(1, g)$: pour les deux premiers, il s'agit du fait que $S^+(1, g)$ opère par commutation sur les espaces de symboles confinés ; pour le troisième, c'est une évidence ; en ce qui concerne les deux dernier, l'argument déjà utilisé dans la seconde étape montre le confinement des produits $m\#\theta_Y$ et $\varphi_Z\#m$. Il en résulte que la norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de $\operatorname{ad} L \cdot (\theta_Y^w A \varphi_Z^w)$ est majorée par $\mathrm{C^{te}}(1 + \delta_{YZ})^{-N}$, et donc que $\operatorname{ad} L \cdot (\theta_Y^w A)$ est borné sur L^2. Le cas des commutateurs itérés s'ensuit par récurrence.

5.5 Sur le rôle de la lenteur renforcée Cette propriété est intervenue à deux reprises pour montrer qu'il y a assez de symboles dans $S^+(1, g)$. Elle permet d'en construire qui varient suffisamment (dans la première étape), ou qui coïncident localement avec des fonctions linéaires (dans la dernière étape). Nous allons montrer sur un exemple que la conclusion du théorème 4.3 peut être fausse si cette propriété n'est pas vérifiée.

Considérons, en dimension 2, la métrique g suivante :

$$g_X(dx, d\xi) = dx_1^2 + \langle\xi\rangle dx_2^2 + \frac{d\xi_1^2}{\langle\xi\rangle^2} + \frac{d\xi_2^2}{\langle\xi\rangle}\,.$$

C'est une métrique de Hörmander géodésiquement tempérée et elle ne semble pas particulièrement pathologique. Toutefois, la lenteur renforcée n'est pas vérifiée : on a en effet

$$g_X^\sigma(dx, d\xi) = \langle\xi\rangle^2 dx_1^2 + \langle\xi\rangle dx_2^2 + d\xi_1^2 + \frac{d\xi_2^2}{\langle\xi\rangle}\,, \quad \lambda(X) = 1\,, \quad \Lambda(X) = \langle\xi\rangle$$

et, dans une g^σ-boule de rayon $r\Lambda(X)$ centrée en $(0, 0; 0, \xi_2)$, la variation de ξ_2 est de l'ordre de $\xi_2^{3/2}$.

La définition 3.2 se traduit par

$$b \in S^+(1,g) \Longleftrightarrow \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b\right| \leq \begin{cases} \mathrm{C^{te}} \langle\xi\rangle^{-\alpha_1-\alpha_2/2+\beta_2/2} & \text{pour } \alpha_2+\beta_2 > 0 \\ \mathrm{C^{te}} \langle\xi\rangle^{1-\alpha_1} & \text{pour } \alpha_2=\beta_2=0\,;\ \alpha_1+\beta_1 > 0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Les boules $B_{Y,r}$ sont très loin d'être géodésiquement convexes pour g^σ et le fait que b vérifie les estimations ci-dessus dans tout l'espace implique des conditions plus restrictives. On a

$$\left|\partial_{x_1}^{\beta_1} b(X)\right| \leq \left|\partial_{x_1}^{\beta_1} b(x;\xi_1,0)\right| + \int_0^{\xi_2} \left|\partial_{\xi_2}\partial_{x_1}^{\beta_1} b(x;\xi_1,t)\right| dt\,,$$

et donc

$$\left|\partial_{x_1}^{\beta_1} b(X)\right| \leq \mathrm{C^{te}} \left(\langle\xi_1\rangle + \langle\xi_2\rangle^{1/2}\right) \tag{18}$$

Pour analyser les commutateurs avec les éléments de $S^+(1,g)$, il est commode d'utiliser $\gamma = \langle\xi\rangle dx^2 + d\xi^2/\langle\xi\rangle$ (la métrique de type $(1/2,1/2)$) et le γ-poids $\mu(X) = \langle\xi\rangle^{-1/2}\left(\langle\xi_1\rangle + \langle\xi_2\rangle^{1/2}\right)$. On a

$$b \in S^+(\mu,\gamma) \Longleftrightarrow \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b\right| \leq \frac{\langle\xi_1\rangle+\langle\xi_2\rangle^{1/2}}{\langle\xi\rangle^{1/2}} \langle\xi\rangle^{(|\beta|-|\alpha|)/2} \text{ pour } |\alpha|+|\beta|>0\,. \tag{19}$$

On s'aperçoit alors que (17) et (18) entraînent toutes les estimations (19), à l'exception de celle portant sur $\partial b/\partial\xi_1$, et qu'elles garantissent que $\partial b/\partial\xi_1$ appartient à $S(1,\gamma)$. Enfin, les $\partial^k b/\partial x_1^k$ appartiennent également à $S^+(1,g)$ et jouissent donc des mêmes propriétés que b.

En vertu de la remarque 3.5, pour $b \in S^+(1,g)$, on peut écrire

$$\mathrm{ad}(b)a = -i\tfrac{\partial b}{\partial \xi_1}\tfrac{\partial a}{\partial x_1} + R(b,a)$$

où $R(b,a) \in S(M\mu,\gamma)$ lorsque $a \in S(M,\gamma)$; nous avons regroupé dans $R(b,a)$ les termes $R_2(a,b)$ et $R_2(b,a)$ de (9) ainsi que les composantes restantes du crochet de Poisson $\{b,a\}$.

En remarquant que $\partial_{x_1} R(b,a) = R(\partial_{x_1} b, a) + R(b, \partial_{x_1} a)$, et en utilisant le fait que $\partial_{x_1}^k \partial_{\xi_1} b \in S(1,\gamma)$, on arrive à l'énoncé suivant :
Si on a $\partial_{x_1}^k a \in S(M,\gamma)$ pour tout k, il en résulte que $\partial_{x_1}^k (b\#a - a\#b)$ appartient à $S(M\mu,\gamma)$ pour tout k.

Considérons la fonction $a(X) = \Phi(\mu(X))$ où $\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Elle n'appartient pas à $S(1,g)$, du fait que $\partial_{\xi_1} a$ ne décroît que comme $\langle\xi\rangle^{-1/2}$. Par contre, elle appartient à $S(1,\gamma)$ et même à $S(\mu^{-N},\gamma)$ pour tout N, la fonction μ étant de l'ordre de 1 sur le support de a. Quant aux $\partial_{x_1}^k a$, ils sont nuls. On en déduit par récurrence sur p que $\partial_{x_1}^k\left(\mathrm{ad}(b_1)\ldots\mathrm{ad}(b_p)a\right)$ appartient à

$S(\mu^{-N},\gamma)$, pour $b_j \in S^+(1,g)$, quels que soient p, k et N. L'opérateur a^w vérifie donc les hypothèses du théorème 4.3 sans être un opérateur pseudo-différentiel relatif à g.

On notera que les hypothèses du théorème 4.6 sont vérifiées pour la métrique g ci-dessus et la propriété d'inversion est donc valable. Nous ne connaissons pas de métrique de Hörmander pour laquelle cette propriété ne soit pas satisfaite.

5.6 Démonstration du théorème 4.6

On va d'abord utiliser le fait que l'opérateur A^{-1} et ses commutateurs itérés par les éléments de $\Psi^+(1,g)$ sont bornés sur L^2. Cela permet de reproduire les deux premières étapes ci-dessus, mais δ_{YZ} désigne cette fois-ci la $(\lambda^2 g)$-distance géodésique de $B_{Y,Cr}$ et $B_{Z,Cr}$. On commence donc par définir $q(X)$ à l'aide de cette distance géodésique, et l'argument de régularisation conduisant à p ne nécessite que la lenteur "ordinaire". La seconde étape conduisant à

$$\left\|\alpha_Y^w A^{-1} \beta_Z^w\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_N (1+\delta_{YZ})^{-N}, \tag{20}$$

peut être reproduite mot pour mot.

On va maintenant se ramener au corollaire 3.6 et notre objectif est de prouver que $E \,\mathrm{ad}\, B \cdot A^{-1}$ appartient à $\mathcal{L}(L^2)$, avec une norme contrôlée, pour $E \in \Psi(M^{-1},g)$ et $B \in \Psi^+(M,g)$ (le cas des commutateurs itérés suivra par récurrence). Grâce à la remarque 3.7 et à l'hypothèse (12), on peut supposer que les poids M vérifient uniformément

$$(M(Y)/M(Z))^{\pm 1} \leq C\,(1+\delta_{YZ})^N . \tag{21}$$

D'autre part, pour tout poids M, il existe [B&C] des éléments de $\Psi(M^{-1},g)$ ayant un inverse dans $\Psi(M,g)$ et il est clair qu'il suffit de considérer le cas où E est de ce type. On a

$$E \,\mathrm{ad}\, B \cdot A^{-1} = -\left(EA^{-1}E^{-1}\right)(E \,\mathrm{ad}\, B \cdot A)\,A^{-1},$$

et il nous suffit donc de montrer que $EA^{-1}E^{-1}$ est borné sur L^2, ou encore que A^{-1} est borné de l'espace de Sobolev $H(M,g)$ dans lui-même. Ce dernier point est une conséquence directe de (20) (il s'agit essentiellement du lemme classique de Schur), les propriétés requises sur δ_{YZ} étant d'une part (21) et d'autre part le fait que $\sup_Y \int (1+\delta_{YZ})^{-N} |g_Z|^{1/2}\, dZ < \infty$ pour N assez grand, ce qui n'est pas difficile à vérifier.

Bibliographie

[Be] R. Beals, Characterization of pseudodifferential operators, *Duke Math. J.* **44** (1977) 45–57.

[Bo] J.-M. Bony, Fourier integral operators and Weyl-Hörmander calculus, in *New Trends in Microlocal Analysis*, Springer-Verlag Tokyo (1997) 3–22.

[B&C] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, *Bull. Soc. Math. France* **122** (1994) 77–118.

[B&L] J.-M. Bony et N. Lerner, Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 4^{e} série **22** (1989) 377–433.

[Br] F. Bruyant, Estimations pour la composition d'un grand nombre d'opérateurs pseudo-différentiels et applications, *Thèse Univ. Reims* (1979).

[H&S] B. Helffer et J. Sjöstrand, Equation de Harper, *Lect. Notes in Physics* **345**, Springer (1989) 118–197.

[Hö1] L. Hörmander, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 359–443.

[Hö2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag (1985).

[Ja] S. Jaffard, Propriétés des matrices "bien localisées" près de leur diagonale et quelques applications, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Lineaire* **7** n°5 (1990) 461–476.

[Un] A. Unterberger, Les opérateurs métadifférentiels, *Lecture Notes in Physics* **126**, Springer (1980) 205–241.

Centre de mathématiques
École Polytechnique
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
91128 Palaiseau cedex, France

bony@math.polytechnique.fr