

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F. KLOPP

**Développement asymptotique de la densité d'états pour des
opérateurs de Schrödinger aléatoires singuliers**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 4,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A4_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Unité de Recherche Associée D 0169

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA DENSITE D'ETATS POUR DES OPERATEURS DE SCHRÖDINGER ALEATOIRES SINGULIERS

F. KLOPP

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA DENSITÉ D'ÉTATS POUR DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER ALÉATOIRES SINGULIERS

FRÉDÉRIC KLOPP

0. INTRODUCTION

Dans cet exposé nous nous proposons d'étudier la densité d'états de certains opérateurs de Schrödinger aléatoires singuliers. Les modèles que nous étudions ont pour origine la physique des solides. Ce sont des hamiltoniens associés à des solides cristallins comportant des impuretés (voir, par exemple, [15]).

Les opérateurs de Schrödinger aléatoires ont fait l'objet de nombreuses études physiques et mathématiques durant ces dernières années (voir par exemple [1], [15] pour la littérature physique et [3], [17] pour celle mathématique). Une des premières notions qui s'est dégagée de ces travaux est celle d'ergodicité pour les opérateurs aléatoires; sous cette hypothèse d'ergodicité (et de quelques hypothèses supplémentaires le cas échéant), on peut démontrer, par exemple, l'existence d'un spectre presque sûr pour la famille d'opérateurs concernée, d'un type spectral presque sûr, d'une densité d'états déterministe (i.e presque sûrement indépendante de la réalisation de l'opérateur). C'est à cette dernière grandeur que nous nous intéresserons ici.

1. LES MODÈLES - GÉNÉRALITÉS

Commençons par introduire les modèles qui nous intéressent; ceux-ci sont simples et c'est dans ce cadre restreint que nous parlerons des propriétés plus générales évoquées ci-dessus.

Dans la suite V désignera une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$\exists \eta > 0, C > 0 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^d, |V(x)| \leq Ce^{-\eta|x|}.$$

Nous ne considérerons ici que deux familles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires que nous appellerons respectivement le modèle de Bernoulli et le modèle de Poisson.

1.1. Le modèle de Bernoulli. Soit W , une fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique et bornée sur $\mathbb{R}^d$. On définit l'opérateur de Schrödinger périodique $H_0 = -\Delta + W$. Il est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$; de plus il est semi-borné inférieurement.

Soient $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$, des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre μ (c'est-à-dire $P(\omega_0 = 1) = \mu$ et $P(\omega_0 = 0) = 1 - \mu$ où $\mu \in]0, 1[$). On notera ω , le vecteur $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$. Celui-ci vit dans $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ induisent naturellement une structure d'espace de probabilité sur Ω .

On définit l'opérateur de Schrödinger aléatoire suivant

$$H_\omega^B = H_0 + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \omega_\gamma V_\gamma \text{ où } V_\gamma(x) = V(x - \gamma). \quad (1)$$

Comme les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ sont bornées, H_ω^B est une perturbation bornée de H_0 . Donc H_ω^B est essentiellement auto-adjoint de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$.

A proprement parler, l'opérateur de Schrödinger aléatoire est défini par l'espace de probabilité Ω et la donnée de l'application de Ω à valeurs dans les opérateurs auto-adjoints donnée par (1).

1.2. Le modèle de Poisson. Posons $H_0 = -\Delta$ et soit $m(\omega, dx)$, une mesure aléatoire de Poisson de concentration μ . Plus précisément, si on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^d$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tel que

1. m est une application de $\Omega \times \mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$,
2. pour B dans $\mathcal{B}$, $\omega \mapsto m(\omega, B)$ est une variable aléatoire de distribution

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_\omega(\{\omega; m(\omega, B) = n\}) = e^{-\mu|B|} \frac{(\mu|B|)^n}{n!},$$

3. pour $B_1, \dots, B_n$ des boréliens deux à deux disjoints, les variables aléatoires $m(\omega, B_1), \dots, m(\omega, B_n)$ sont indépendantes.

On définit alors le potentiel et l'opérateur de Schrödinger aléatoire

$$V_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^d} V(x - y) m(\omega, dy) \text{ et } H_\omega^P = H_0 + V_\omega.$$

Dans le modèle de Poisson, V_ω est non borné presque sûrement; néanmoins on montre que, presque sûrement H_ω^P est essentiellement auto adjoint (voir [10]).

1.3. Ergodicité. Pour en simplifier l'exposé, la discussion de la notion d'ergodicité et de ses conséquences premières ne sera faite que pour le modèle de Bernoulli.

Sur Ω , on définit le groupe des décalages $\Theta = \{\tau_\gamma; \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ où τ_γ est défini par

$$\forall \omega = (\omega_\beta)_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega, \quad \tau_\gamma(\omega) = (\omega_{\beta - \gamma})_{\beta \in \mathbb{Z}^d}.$$

Comme les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ sont identiquement distribuées, la mesure de probabilité P qu'elles induisent sur Ω est stationnaire (i.e invariante par Θ). Comme elles sont de plus supposées indépendantes, le groupe Θ est ergodique pour P (i.e, si E est un évènement invariant par Θ alors $P(E) = 0$ ou $P(E) = 1$.)

A ce groupe de décalage est naturellement associé un groupe d'opérateurs unitaires agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$; c'est le groupe des $\{T_\gamma; \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ où T_γ est défini par

$$\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad T_\gamma(\varphi)(\cdot) = \varphi(\cdot - \gamma).$$

En effet, comme W est $\mathbb{Z}^d$ -périodique, on a la relation suivante

$$\forall \gamma \in \mathbb{Z}^d, \quad T_\gamma H_\omega T_\gamma^* = H_{\tau_\gamma(\omega)}. \quad (2)$$

Sous ces hypothèses, L. Pastur a démontré (dans un cadre plus général) qu'il existe Σ , un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}$ tel que, presque sûrement, Σ est le spectre de H_ω . D'un point de vue formel, ce résultat peut se justifier ainsi; d'après (2), le spectre de H_ω est invariant sous l'action du groupe Θ . Par ergodicité, il est donc presque sûrement constant. Pour une preuve complète, on pourra consulter [17]. Le résultat précédent est valide dans une beaucoup plus large généralité, entre autre dans le cas du modèle de Poisson.

De même on montre que le type spectral est presque sûrement constant. Du point de vue probabiliste ceci permet d'assimiler l'étude spectrale de toute la famille d'opérateurs H_ω à celle d'un opérateur unique.

Dans les deux modèles introduits précédemment, le spectre presque sûr ne dépend pas de la concentration μ ; en effet il ne dépend que des réalisations possibles (voir [9]).

2. LA DENSITÉ D'ÉTATS

2.1. Définitions. Soit l , un réel positif et Λ_l , le cube centré en 0 de côté l . On désigne par $H_{\omega,l}^D$, la restriction de H_ω à Λ_l avec conditions au bord de Dirichlet.

On définit la densité d'états de la façon suivante: pour E , une énergie réelle, on pose

$$\mathcal{N}_\mu(E) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\frac{\#\{\text{valeurs propres de } H_{\omega,l}^D \text{ inférieures ou égales à } E\}}{\text{Vol}(\Lambda_l)} \right). \quad (3)$$

On montre que cette limite existe pour presque tout ω , que c'est une fonction de E continue à droite et croissante. De plus l'ergodicité des modèles considérés nous dit qu'elle est presque sûrement indépendante de ω (on pourra trouver une preuve de ces résultats dans [3] ou [17]). Cette limite est la *densité d'états intégrée* de H_ω .

On peut alors considérer la dérivée au sens des distributions de $\mathcal{N}_\mu$; c'est la *densité d'états* et on la note $N_\mu(dE)$. C'est une mesure positive à croissance

lente; son support est le spectre presque sûr de H_ω . De plus, on obtient la formule suivante [17]

$$N_\mu(dE) = \mathbb{E}_\omega \{ \text{Tr}(\chi_0 E_\omega(dE) \chi_0) \} \quad (4)$$

où $E_\omega(dE)$ est la résolution spectrale de H_ω , χ_0 est la fonction caractéristique de Λ_1 ; $\mathbb{E}_\omega$ est l'espérance calculée par rapport à la mesure de probabilité induite sur Ω par les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ et $\text{Tr}(Op)$ désigne la trace de l'opérateur Op .

2.2. Quelques résultats de régularité. La densité d'états des opérateurs de Schrödinger aléatoires a été largement étudiée depuis de nombreuses années. L'une des propriétés les plus étudiées de la densité d'états est sa régularité en tant que mesure. Les informations connues sur la régularité de N_μ dépendent du modèle considéré, des propriétés de régularité de la mesure de probabilité dont est muni l'opérateur étudié et de la dimension d'espace. Nous n'essayerons pas ici de passer en revue l'ensemble des résultats connus; on pourra pour cela se reporter aux ouvrages de référence [17] ou [3]. Nous allons juste rappeler quelques résultats concernant les modèles de Poisson et de Bernoulli.

Dans le cas du modèle d'Anderson discret (en toute dimension) ou dans le cas des modèles continus (en dimension 1), on montre que la densité d'états intégrée est Log-Hölder continue (voir [6], [5]), ceci sans hypothèses de régularité sur la distribution de probabilité des variables aléatoires ω .

En dimension 1, pour le modèle d'Anderson avec potentiel de Bernoulli, une heuristique simple (cf [7]) peut être suivie pour montrer que la régularité maximale possible pour la densité d'états intégrée décroît quand μ tend vers 0 (cf [19]).

Pour le même modèle, on démontre que la densité d'états admet une composante singulière continue lorsque le désordre est assez grand (cf [2]).

En dimension d supérieure à 1, dans le cas des modèles continus du même type que 1 mais dans le cas où les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ sont i.i.d et admettent une densité intégrable et bornée, grâce à une estimée de Wegner (cf [20]), on montre que $N(dE)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [4] et [13]).

Les physiciens se sont évidemment aussi beaucoup intéressés à la régularité de la densité d'états; on dispose ainsi de nombreux résultats non mathématiquement rigoureux mais très précis sur le comportement local de la densité d'états. Il existe aussi des études numériques. Le lecteur pourra consulter les ouvrages [15] ou [17]. Des modèles voisins des opérateurs de Schrödinger aléatoires ont aussi été étudiés (cf [16]).

3. LE DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE N_μ

Dans le présent travail, nous construisons, de façon rigoureuse, un développement asymptotique en μ (au sens des distributions) pour N_μ . Les termes de ce développement sont exprimés en fonction de certaines fonctions spectrales de Krein. Un tel développement asymptotique avait déjà été écrit et utilisé en physique [15].

3.1. Fonction spectrale de Krein. Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$. On définit $H_A = H_0 + \sum_{\gamma \in A} V_\gamma$. H_A est relativement compact par rapport à H_0 .

Pour φ , une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on sait que l'opérateur $\varphi(H_A) - \varphi(H_0)$ est à trace. On définit alors la distribution tempérée $\zeta'(A)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \langle \zeta'(A), \varphi \rangle = \text{Tr}(\varphi(H_0) - \varphi(H_A)). \quad (5)$$

$\zeta'(A)$ est supportée par le spectre de H_A ; de plus, en dehors du spectre de H_0 , elle est constituée d'une combinaison linéaire de masses de Dirac placées aux valeurs propres de H_A (voir [21]).

3.2. Le théorème principal. On a le

Théorème 3.1. N_μ admet un développement asymptotique dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ quand μ tends vers 0 i.e, il existe une suite de distributions $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que

- pour $k \geq 0$, $n_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,
- pour $N \geq 0$, il existe $|\cdot|_N$, une semi-norme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que, pour φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$|\langle N_\mu, \varphi \rangle - \sum_{k=0}^N \mu^k \langle n_k, \varphi \rangle| \leq \mu^{N+1} |\varphi|_N \quad (6)$$

pour μ dans $[0, 1]$ dans le cas Bernoulli, et μ positif dans le cas Poisson. De plus les distributions $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont données par les formules suivantes:

- n_0 est la densité d'états de H_0 ,
- Cas Bernoulli :
 - pour $k \geq 1$, n_k est donnée par la série convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$n_k = - \sum_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \#\Lambda = k \text{ et } 0 \in \Lambda}} \sum_{A \subset \Lambda} (-1)^{\#\Lambda - \#A} \zeta'(A), \quad (7)$$

- Cas Poisson :
 - si $k = 1$: $n_1 = -\zeta'(0)$,
 - pour $k \geq 2$, n_k est donnée par l'intégrale convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$n_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{\mathbb{R}^{d(k-1)}} \left(\sum_{A \subset \{0, x_1, \dots, x_{k-1}\}} (-1)^{\#A} \zeta'(A) \right) dx_1 \dots dx_{k-1}. \quad (8)$$

Remarque 3.1. Les formules donnant les coefficients du développement asymptotique sont essentiellement les même dans les deux cas. Les $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des distributions dont l'ordre croît avec k . Du point de vue de l'ordre, la série asymptotique est divergente.

On trouvera la preuve de ces résultats dans [11] et [14]. Ces preuves reposent essentiellement sur la nature des mesures de probabilité dont sont munis les modèles considérés. On pourrait démontrer de la même manière des développements asymptotiques pour d'autres quantités spectrales. De même, on peut considérer d'autres opérateurs H_0 .

Pour le modèle de Bernoulli, on peut démontrer que, si on restreint les fonctions tests utilisées à un ensemble de fonctions analytiques dans voisinage conique de l'axe réel et qui satisfont à des hypothèses de décroissance à l'infini, alors le développement donné dans le Théorème 3.1 est convergent et sa somme est égale à la densité d'états (voir [12] pour plus de détails).

4. LE COMPORTEMENT DE LA DENSITÉ D'ÉTATS INTÉGRÉE DANS LES LACUNES DU SPECTRE DE H_0

Le développement asymptotique que nous venons de donner permet d'étudier le comportement de la densité d'états intégrée de H_ω dans les lacunes de H_0 quand μ tend vers 0. Il est clair que, dans les lacunes de H_0 , la densité d'états intégrée tend vers 0 quand μ tend vers 0. On sait aussi qu'elle se concentre autour des éventuelles valeurs propres discrètes de l'opérateur $H_0 + V$ (voir [8]). Nous allons voir qu'en fait, elle se concentre autour de toutes les valeurs propres discrètes créées par un nombre fini de perturbations.

4.1. Modèle de Bernoulli. Soit Λ , un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ et $\sigma(\Lambda)$, le spectre de H_Λ . D'après nos hypothèses sur V , H_Λ est une perturbation relativement compacte de H_0 ; par le Théorème de Weyl, H_Λ n'admet que des valeurs propres discrètes hors du spectre de H_0 . On définit $\Sigma_{\text{disc}}(\Lambda)$ comme l'adhérence du spectre discret de H_Λ ; donc $\Sigma_{\text{disc}}(\Lambda)$ contient les valeurs propres discrètes de H_Λ et, peut-être, certaines extrémités du spectre essentiel de H_0 . On pose la

Définition 4.1. Pour $k \geq 1$, on définit les k -valeurs propres de (H_0, V) comme étant les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_k = \bigcup_{\#\Lambda=k} \Sigma_{\text{disc}}(H_\Lambda)$.

Remarque 4.1. Pour A , un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, $\zeta'(A)$ est supporté par $\sigma(A)$. Donc $\text{supp}(n_k) \subset \sigma(H_0) \bigcup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq k} \mathcal{E}_j \right)$.

On montre la

Proposition 4.1. $\overline{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}_1$ et pour $k \geq 2$, $\overline{\mathcal{E}}_k = \mathcal{E}_k \cup \overline{\mathcal{E}_{k-1}} = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{E}_j$. De plus, pour I , un intervalle fermé contenu dans $\mathbb{R} \setminus \sigma(H)$, les points de $\overline{\mathcal{E}_k \cap I} \setminus \overline{\mathcal{E}_{k-1} \cap I}$ sont isolés dans $\overline{\mathcal{E}_k \cap I}$ ($\overline{I}$ désigne l'adhérence de I).

Remarque 4.2. La preuve de cette proposition repose essentiellement sur la décroissance des fonctions propres associées aux valeurs propres discrètes des perturbations de H_0 (voir [11]).

Pour $I \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(H_0)$, on définit $\mathbf{n}_k(I)$ comme le nombre de k -valeurs propres de (H_0, V) dans I comptées avec leur multiplicité ; plus précisément, si on note $\Pi_\Lambda(E)$ le projecteur spectral de H_Λ associé à la valeur propre E , alors

$$\mathbf{n}_k(I) = \sum_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \#\Lambda = k \text{ et } 0 \in \Lambda}} \sum_{E \in I \cap \sigma(H_\Lambda)} \text{rang}(\Pi_\Lambda(E)).$$

Evidemment, $\mathbf{n}_k(I)$ peut s'annuler ou être infini. Le comportement de la densité d'états intégrée dans les lacunes spectrales de H_0 est alors donné par le

Théorème 4.1. Soit I un intervalle ouvert dont l'adhérence est dans une lacune de $\sigma(H_0)$. Alors

- si $I \cap \mathcal{E}_k \neq \emptyset$ et si, pour $1 \leq j \leq k-1$, $\overline{I} \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ alors $0 < \mathbf{n}_k(I) < +\infty$ et

$$N_\mu(I) = \int_I N_\mu(dE) = \mathbf{n}_k(I) \mu^k (1 + O(\mu)) \quad \text{quand } \mu \rightarrow 0, \mu > 0,$$

- si pour $1 \leq j \leq k$, $\overline{I} \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ alors,

$$N_\mu(I) = \int_I N_\mu(d\lambda) = O(\mu^{k+1}) \quad \text{quand } \mu \rightarrow 0, \mu > 0.$$

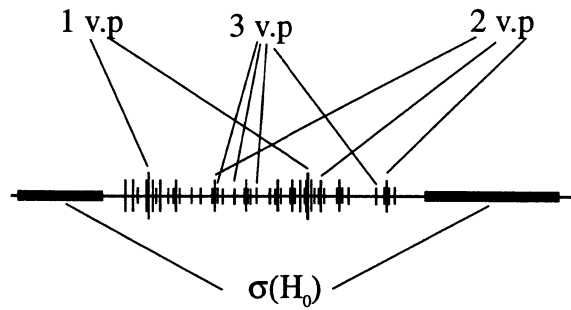


FIGURE 1. Quelques k -valeurs propres

Sur la figure 1, on a représenté l'allure de quelques 1, 2 et 3-valeurs propres. Les barres les représentant sont d'autant plus petites que leur ordre (en tant que valeur propre) est grand. On voit, dans la limite μ tend

vers 0, apparaît une structure “fractale” de la densité d’états. Celle-ci explique la possible présence de singularités. Les raisonnements heuristiques et les expériences numériques tendent à montrer que ces singularités existent en dimension 1 mais sont lissées en dimension supérieure (voir [15], et [2] pour des résultats mathématiques en dimension 1).

4.2. Modèle de Poisson. Pour le modèle de Poisson, l’étude de N_μ dans les lacunes du spectre de H_0 n’a d’intérêt que si $\{x \in \mathbb{R}^d; V(x) < 0\}$ est non vide; en effet, si tel n’est pas le cas, alors le spectre presque sûr est la demi-droite positive c’est-à-dire le spectre de H_0 . Nous supposons donc que $\{x \in \mathbb{R}^d; V(x) < 0\} \neq \emptyset$. On sait qu’alors le spectre presque sûr n’est pas borné inférieurement.

Pour $x_1, \dots, x_k$, k points dans $\mathbb{R}^d$, on définit $\sigma(x_1, \dots, x_k)$ comme le spectre de $H_{\{x_1, \dots, x_k\}}$. Pour B , un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}$, on note $E(B; x_1, \dots, x_k)$ le projecteur spectral associé à B et $H_{\{x_1, \dots, x_k\}}$.

$H_{\{x_1, \dots, x_k\}}$ est continu dans les variables $(x_1, \dots, x_k)$ (au sens de la norme de la résolvante). Soit B un intervalle. D’après [18], on sait que si les bords B ne sont pas des valeurs propre de $H_{\{x_1^0, \dots, x_k^0\}}$, $E(B; x_1, \dots, x_k)$ est continu au voisinage de $(x_1^0, \dots, x_k^0)$. De plus, si $\overline{B} \subset (-\infty, 0)$, alors $E(B; x_1, \dots, x_k)$ est de rang fini. L’application $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \text{rang}(E(B; x_1, \dots, x_k))$ est mesurable.

Pour $k \geq 1$ et B un intervalle ouvert tel que $\overline{B} \subset (-\infty, 0)$, on définit

$$n_k(B) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_{|x_1| \leq R} \cdots \int_{|x_k| \leq R} \text{Tr}(E(B; x_1, \dots, x_k)) dx_1 \dots dx_k}{\text{Vol}(\{|x| \leq R\})} \right).$$

L’invariance par translation de $-\Delta$ nous dit que

$$n_1(B) = \sum_{\lambda \in B \cap \sigma(-\Delta + V)} \text{multiplicité de } \lambda = \text{Tr}(E(B; 0)),$$

et

$$n_k(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \text{Tr}(E(B; 0, x_1, \dots, x_{k-1})) dx_1 \dots dx_{k-1} \text{ si } k \geq 2.$$

Pour $k \geq 1$, soit $\mathfrak{B}_{k+1}$ l’adhérence des réunions des $\sigma(x_1, \dots, x_k)$ quand les points $x_1, \dots, x_k$ parcourent $\mathbb{R}^d$. La décroissance exponentielle des fonctions propres associées à des valeurs propres négatives de $H_{\{x_1, \dots, x_k\}}$ permet de montrer que, si $j \leq k$ alors $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{B}_k$. On montre aussi que $\cup_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_k$ est non borné inférieurement.

Le comportement de la densité d’états intégrée pour des énergies négatives est alors donné par le

Théorème 4.2. *Soit I un intervalle ouvert tel que $\overline{I} \subset (-\infty, 0)$. Pour $k \geq 1$, si $I \cap \mathfrak{B}_k \neq \emptyset$, et si $1 \leq j \leq k-1$, $\overline{I} \cap \mathfrak{B}_j = \emptyset$ alors, on a*

$$0 < n_k(I) \leq n_k(\overline{I}) < +\infty.$$

De plus

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0} [\mu^{-k} N_{\mu}(I)] = \limsup_{\mu \rightarrow 0} \left[\mu^{-k} \int_I N_{\mu}(d\lambda) \right] \leq \frac{n_k(\bar{I})}{k!},$$

et

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} [\mu^{-k} N_{\mu}(I)] = \liminf_{\mu \rightarrow 0} \left[\mu^{-k} \int_I N_{\mu}(d\lambda) \right] \geq \frac{n_k(I)}{k!}.$$

Remarque 4.3. Si $n_k(I) = n_k(\bar{I})$, on obtient $N_{\mu}(I) = \frac{n_k(I)}{k!} \mu^k (1 + o(1))$ quand $\mu \rightarrow 0$. Pour que la condition $n_k(I) = n_k(\bar{I})$ soit satisfaite, il suffit, que pour $\lambda(x_1, \dots, x_k)$, valeur propre négative de $H_{\{x_1, \dots, x_k\}}$, l'ensemble de niveau $\lambda^{-1}(\lambda_0)$ soit de mesure nulle si λ_0 est l'une des extrémités de l'intervalle I .

RÉFÉRENCES

- [1] T. Ando and H. Fukuyama, editors. *Anderson Localization*, volume 28 of *Springer Proceedings in Physics*, Heidelberg, 1988. Springer.
- [2] R. Carmona, A. Klein, and F. Martinelli. Anderson localization for Bernoulli and other random potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 108:41–67, 1987.
- [3] R. Carmona and J. Lacroix. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [4] J. M. Combes, P. D. Hislop, and E. Mourre. Spectral averaging, perturbation of singular spectra and localization. *Preprint E.S.I.*, 124, 1994.
- [5] W. Craig and B. Simon. Log-Hölder continuity of the integrated density of states for stochastic Jacobi matrices. *Communications in Mathematical Physics*, 90:207–218, 1983.
- [6] W. Craig and B. Simon. Subharmonicity of the Ljapunov index. *Duke Mathematical Journal*, 50:551–559, 1983.
- [7] B. Halperin. Properties of a particle in a one-dimensional random potential. *Advances in Chemical Physics*, 13:123–178, 1967.
- [8] R. Hempel and W. Kirsch. On the integrated density of states for crystals with randomly distributed impurities. *Communications in Mathematical Physics*, 159:459–469, 1994.
- [9] W. Kirsch and F. Martinelli. On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential. *Communications in Mathematical Physics*, 85:329–350, 1982.
- [10] W. Kirsch and F. Martinelli. On the essential self-adjointness of stochastic Schrödinger operators. *Duke Mathematical Journal*, 50:1255–1260, 1983.
- [11] F. Klopp. An asymptotic expansion for the density of states of a random Schrödinger operator with Bernoulli disorder. *Random Operators and Stochastic Equations*, 1995. A paraître.
- [12] F. Klopp. The density of states of random Schrödinger operators with singular randomness. In *Proceedings Conference "Spectral Theory of Schrödinger Operators*, Madras, 1995.
- [13] F. Klopp. Localization for some continuous random Schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 167:553–570, 1995.
- [14] F. Klopp. A low concentration asymptotic expansion for the density of states of a random Schrödinger operator with Poisson disorder. *soumis au Journal of Functional Analysis*, 1995.
- [15] I.M. Lifshits, S.A. Gredeskul, and L.A. Pastur. *Introduction to the theory of disordered systems*. Wiley, New-York, 1988.

- [16] Th. M. Nieuwenhuizen and J. M. Luck. Singular behavior of the density of states and the Lyapunov coefficient in binary random harmonic chains. *Journal of Statistical Physics*, 41:745–771, 1985.
- [17] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [18] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol I: Functional Analysis*. Academic Press, New-York, 1980.
- [19] B. Simon and M. Taylor. Harmonic analysis on $sl(2, \mathbf{R})$ and smoothness of the density of states in the one-dimensional Anderson model. *Communications in Mathematical Physics*, 101:1–20, 1985.
- [20] F. Wegner. Bounds on the density of states in disordered systems. *Zeitschrift für Physik B*, 44:9–15, 1981.
- [21] D. R. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory*, volume 105 of *Transaction of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I, 1992.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, BÂT. 425, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, CENTRE D'ORSAY, F-91405 ORSAY CÉDEX, FRANCE