

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

V. PETKOV

**Sur la conjecture de Lax et Phillips pour un nombre fini
d'obstacles strictement convexes**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 11,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996__A11_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SUR LA CONJECTURE DE LAX ET PHILLIPS POUR UN NOMBRE FINI D'OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES

V. PETKOV

Sur la conjecture de Lax et Phillips pour un nombre fini d'obstacles strictement convexes

Vesselin Petkov

1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domaine ouvert et connexe ayant C^∞ frontière $\partial\Omega$ et soit

$$K = \mathbf{R}^3 \setminus \Omega \subset \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq \rho_0\}.$$

Notons par ν la normale extérieure de $\partial\Omega$. Considérons le problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0 & \text{dans } \mathbf{R} \times \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sur } \mathbf{R} \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = f_1(x), \partial_t u(0, x) = f_2(x), \end{cases} \quad (1)$$

avec $\mathcal{B} = Id$ ou $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial \nu}$. On peut associer à (1) un *opérateur de diffusion*

$$S(\lambda) : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

admettant une continuation méromorphe dans $\mathbf{C}$ avec des pôles λ_j , $\Im \lambda_j > 0$ (cf. [LP]). Désignons par Λ l'ensemble des pôles comptés avec leurs multiplicités. L'assertion suivante est connue (cf. [I4], [I5]) comme conjecture modifiée de Lax et Phillips:

(MLPC) Pour chaque obstacle captif K il existe $\delta > 0$ tel que $S(\lambda)$ possède un nombre infini de pôles dans le domaine $D_\delta = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \Im z \leq \delta\}$.

Cette conjecture a été établie dans certains cas ([G], [I2], [I4], [I5], [I6] [F1], [F2]). De plus, quand K est l'union de deux obstacles convexes et disjoints, il y a des résultats précis concernant le minimal $\delta > 0$ pour lequel on a la propriété dans (MLPC) (cf. [G], [I2], [F2]). Dans cet exposé on va supposer que K a la forme

$$K = \cup_{j=1}^Q K_j, \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \text{ for } i \neq j, \quad (2)$$

où K_j sont strictement convexes pour $j = 1, \dots, Q$ et $Q \geq 3$. Ikawa ([I3]) a introduit la condition suivante:

(H) Pour chaque paire $1 \leq i, j \leq Q$, $i \neq j$, l'enveloppe convexe de $\overline{K_i} \cup \overline{K_j}$ n'a pas de points communs avec $\overline{K_l}$, $l \neq i, l \neq j$.

Si la condition (H) est satisfaite, chaque rayon périodique dans Ω est un rayon réfléchissant sans segments tangents à $\partial\Omega$. Sous la condition (H) Ikawa ([I4]) a démontré (MLPC) pour le problème de Neumann, tandis que pour le problème de Dirichlet ce résultat a été démontré ([I6]) dans le cas quand (H) a lieu et K_j sont des boules avec des rayons assez petits (voir aussi

[I4]). D'autre part, dans certains cas (MLPC) a été établie pour des opérateurs hypoelliptiques ([PV]). On a montré dans [PS1] que pour des obstacles ayant la forme (2) dans le cas générique pour tout $\epsilon > 0$ il y a un nombre infini de pôles λ_j dans le domaine

$$\{z \in \mathbf{C} : 0 < \Im z \leq \epsilon \log |\Re z|, |\Re z| \geq C_\epsilon\}.$$

Etant donné un rayon périodique réfléchissant $\gamma \subset \overline{\Omega}$ ayant m_γ réflexions, notons par d_γ la longueur de γ , par T_γ la période primitive de γ et par P_γ l'application linéaire de Poincaré associée à γ . Soit $|\det(I - P_\gamma)| = |I - P_\gamma|$. Il est facile de montrer qu'il existe des constantes $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ telles que

$$e^{2b_1 d_\gamma} \leq |I - P_\gamma| \leq e^{2b_2 d_\gamma}. \quad (3)$$

Soit Ξ l'ensemble de rayons périodiques réfléchissants dans $\overline{\Omega}$ et soit $L_\Omega = \{d_\gamma : \gamma \in \Xi\}$. Introduisons les constantes géométriques

$$d_0 = \min \operatorname{dist}_{i \neq j} (K_i, K_j), \quad d_1 = \max \operatorname{dist}_{i \neq j} (K_i, K_j).$$

La fonction de comptage de longueurs des rayons périodiques satisfait l'estimation

$$\#\{\gamma \in \Xi : d_\gamma \leq q\} \leq e^{a_0 q}$$

avec $a_0 > 0$ (cf. [I3] et Chapitre 2 dans [PS2]). D'autre part, il est bien connu ([M2], [SjZ1], [Vo1]) qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$N(r) = \#\{\lambda_j \in \Lambda : |\lambda_j| \leq r\} \leq Ar^3. \quad (4)$$

Notons que les constantes a_0 , b_1 , b_2 ne dépendent que de la géométrie d'obstacle, tandis que A dépend du diamètre de K et des constantes dans les estimations coercives pour le Laplacien dans Ω . Introduisons les distributions

$$F_D(t) = \sum_{\gamma \in \Xi} (-1)^{m_\gamma} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} \delta(t - d_\gamma),$$

$$F_N(t) = \sum_{\gamma \in \Xi} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} \delta(t - d_\gamma),$$

où D (resp. N) correspond au problème de Dirichlet (resp. Neumann). Ces distributions présentent la somme des singularités principales de la distribution

$$U(t) = \begin{cases} \sum_{\lambda_j \in \Lambda} e^{i\lambda_j t} & \text{for } t > 0, \\ \sum_{\lambda_j \in \Lambda} e^{-i\lambda_j t} & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

(cf. [GM], [M1] et Chapitre 6 dans [PS2]).

Dans cet exposé on se propose d'étudier la fonction de comptage

$$N_{0,\delta}(r) = \#\{\lambda_j \in \Lambda : 0 < \Im \lambda_j \leq \delta, |\Re \lambda_j| \leq r\},$$

où la constante $\delta > 0$ sera convenablement choisie.

2 Borne inférieure de $N_{0,\delta}(r)$

Dans cette section on suppose la condition (H) satisfaite. Notre but est d'obtenir une borne inférieure pour la fonction $N_{0,\delta}(r)$. Soit $\rho(t) \in C_0^\infty(-1, 1)$ une fonction telle que

$$\rho(t) \geq 0, \quad \rho(-t) = \rho(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho(t) = 1 \text{ sur } [-\epsilon_0, \epsilon_0], \quad 0 < \epsilon_0 < 1/2,$$

$$\hat{\rho}(0) = 1, \quad \hat{\rho}(\xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

où $\hat{\rho}(\xi)$ est la transformation de Fourier de $\rho(t)$.

Choisissons θ et μ tels que $0 < \theta < \mu < 1$. Après soient $\nu > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ fixés de telle manière que $-\frac{1}{1-\theta} < k < -1$. Prenons $a > k$ satisfaisant les inégalités $k\theta < a\theta < k+1$. Dans la suite les constantes μ, θ, a, k, ν seront fixées. Soient $\alpha \geq b_2$ et $\beta \geq 2(a_0 d_1 / d_0 + s\alpha)$, où $s > 1$ est fixé. Posons $\kappa = \theta/\beta$ and introduisons

$$\delta = \frac{(3 - k + \nu)}{\kappa}.$$

Le choix de α et β dépend des singularités de $F_D(t)$, $F_N(t)$. Soit $\sigma_j \rightarrow +\infty$ une suite telle que

$$0 < \sigma_{j+1} - \sigma_j \leq d, \quad \sigma_j \in (q_j - 2/3, q_j + 2/3), \quad q_j \in \mathbb{N}, \quad \forall j. \quad (5)$$

Introduisons la fonction

$$\varphi_j(t) = \rho(e^{\beta q_j}(t - \sigma_j))$$

et posons

$$\widehat{\varphi_j U}(\lambda) = \langle U(t), e^{i\lambda t} \varphi_j(t) \rangle.$$

Farhy [F1], [F2] a développé la méthode de Sjöstrand et Zworski [SjZ2] concernant les bornes inférieures des fonctions de comptages de pôles. En suivant la preuve du Théorème 2.4 dans [F2], on obtient

Proposition 1. *Soit $\sigma_j \rightarrow +\infty$ une suite satisfaisant (5) et soit $b_\pm = \kappa \ln r \pm B$. Alors pour $r \geq R_0$ on a l'estimation*

$$N_{0,\delta}(r) > C_0 \min_{\sigma_j \in [b_-, b_+]} \int_1^{C_1 r} |\widehat{\varphi_j U}(\lambda)| d\lambda - C_2, \quad (6)$$

où les constantes positives B, R_0, C_0, C_1, C_2 dépendent de $\beta, \delta, d, \theta, \mu$ et de la constante A dans (4).

Afin de remplacer dans cette proposition $U(t)$ par la partie principale $F_{\mathcal{A}}(t)$, où $\mathcal{A} = D, N$, on doit estimer la transformation de Fourier $\widehat{\varphi_j V}(\lambda)$, où $V(t) = U(t) - F_{\mathcal{A}}(t)$. Pour cela on prouve le suivant

Théorème 2. *Supposons la condition (H) satisfaite. Alors pour tout $0 < \epsilon < 1$ il existe une constante $C_3 > 0$, dépendant seulement de K et ϵ , et $J_1(\alpha, \beta, \epsilon) > 0$ tels que pour $|\lambda| \leq e^{\beta q_j}$ et $j \geq J_1(\alpha, \beta, \epsilon)$ on a*

$$|\widehat{\varphi_j V}(\lambda)| \leq C_3 \exp\left(\left(\frac{a_0 d_1}{d_0} - \epsilon\beta\right)\sigma_j\right). \quad (7)$$

La démonstration de (7) suit les mêmes lignes et les mêmes constructions comme dans le Théorème 2.4 dans [I5]. Le point essentiel est l'analyse des solutions asymptotiques effectuée

dans [I1], [I2], [I3] et [Bu]. Le but est de décrire la singularité principale et d'estimer le reste dans la formule de trace (cf. [BGR], [M1])

$$\widehat{\varphi_j U}(\lambda) = 2\text{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \varphi_j(t) \left(\cos(t\sqrt{-\Delta}) \oplus 0 - \cos(t\sqrt{-\Delta_0}) \right) dt.$$

Ici Δ_0 désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^3$, tandis que Δ est le Laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet ou Neumann sur ∂K et $\cos(t\sqrt{-\Delta}) \oplus 0$ s'applique comme 0 sur $L^2(K)$. Soit $E_0(t, x, y)$ le noyau de l'opérateur $\cos(t\sqrt{-\Delta_0})$, soit $E(t, x, y)$ le noyau de $\cos(t\sqrt{-\Delta})$ et soit

$$\tilde{E}(t, x, y) = \begin{cases} E(t, x, y), & (x, y) \in \Omega \times \Omega, \\ 0 & \text{for } (x, y) \notin \Omega \times \Omega. \end{cases}$$

D'après le résultat de Melrose [M1] on sait que

$$\langle \tilde{E}(t, x, y), \varphi_j(t) \rangle \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

De plus, si $|\lambda| \leq e^{\beta q_j}$, pour tout j fixé les fonctions $\{e^{i\lambda t} \varphi_j(t)\}$ forment un ensemble borné dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ et on obtient

$$\sup_{|x| \leq R} |\langle \tilde{E}(t, x, x), e^{i\lambda t} \varphi_j(t) \rangle| \leq C_{j,R}$$

avec une constante $C_{j,R}$ dépendant de j et R . Cela permet pour j fixé et $|\lambda| \leq e^{\beta q_j}$ de trouver un voisinage $\mathcal{O}_j$ suffisamment petit de ∂K de telle façon que

$$2 \left| \int_{\mathcal{O}_j} \langle \tilde{E}(t, x, x), e^{i\lambda t} \varphi_j(t) \rangle dx \right| \leq e^{-\beta \sigma_j}. \quad (8)$$

Tenant compte de la vitesse finie de propagation on doit examiner la trace

$$\int_{\Omega_j} \langle \tilde{E}(t, x, x), e^{i\lambda t} \varphi_j(t) \rangle dx, \quad (9)$$

où $\Omega_j = \{x \in \Omega : |x| \leq \rho_0 + q_j + 1\} \setminus \mathcal{O}_j$.

On considère une partition d'unité dans $\Omega \setminus \mathcal{O}_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1, \quad 0 \leq \psi_j(x) \leq 1, \quad \psi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

et on utilise le fait que le noyau $E(t, x, y)\psi(y)$ de l'opérateur $\cos(t\sqrt{-\Delta})\psi$ admet la représentation

$$E(t, x, y)\psi(y) = \int_{S^2} d\omega \int_0^\infty k^2 u(t, x, k, \omega) e^{-ik\langle y, \omega \rangle} \psi(y) dk.$$

Ici $u(t, x, k, \omega)$ est la solution du problème (1) avec $f_1(x) = \phi(x)e^{ik\langle x, \omega \rangle}$, $f_2(x) = 0$ et $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ est égale à 1 sur $\text{supp } \psi$.

En suivant la procédure dans [I1], [I2], [I3], [Bu], on construit une solution asymptotique $u^{(N)}(t, x, k, \omega)$ de $u(t, x, k, \omega)$ et on examine le comportement des phases et des amplitudes.

L'analyse des singularités de $F_N(t)$ est plus facile que celle de $F_D(t)$ parce que les coefficients ne changent pas le signe. Posons $\sigma_j = 2jd_0 \in L_\Omega$, $j \in \mathbf{N}$. Alors on trouve

$$|\langle F_N(t), \varphi_j(t) \rangle| \geq 2d_0 e^{-b_2 \sigma_j}, \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

D'autre part, pour $|\lambda| \leq e^{\beta q_j/2}$ et $J(b_1, \beta) > 0$ assez grand on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \langle F_N(t), (e^{i\lambda t} - e^{i\lambda \sigma_j}) \varphi_j(t) \rangle \right| = \\ & \left| \sum_{|d_\gamma - \sigma_j| < e^{-\beta q_j}} \rho(e^{\beta q_j}(d_\gamma - \sigma_j)) (e^{i\lambda d_\gamma} - e^{i\lambda \sigma_j}) T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} \right| \leq \\ & C_\rho |\lambda| e^{-\beta q_j} \exp((a_0 - b_1)(q_j + 1))(q_j + 1) \leq \\ & C_\rho e^{\beta/2} \exp(-(s\alpha + b_1)(q_j + 1))(q_j + 1) \leq d_0 e^{-s\alpha \sigma_j}, \quad \forall j \geq J(b_1, \beta). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $|\lambda| \leq e^{\beta q_j/2}$ et $j \geq J(b_1, \beta)$ on a l'estimation

$$|\langle F_N(t), e^{i\lambda t} \varphi_j(t) \rangle| \geq |\langle F_N(t), \varphi_j(t) \rangle| - \left| \langle F_N(t), (e^{i\lambda t} - e^{i\lambda \sigma_j}) \varphi_j(t) \rangle \right| \geq d_0 e^{-\alpha \sigma_j}. \quad (10)$$

En combinant la Proposition 1 et le Théorème 2 on obtient pour le problème de Neumann le suivant

Théorème 3. *Soit K un obstacle ayant la forme (2) qui satisfait la condition (H) et soit δ choisi comme ci-dessus. Alors pour le problème de Neumann et pour $r \geq c_0$ on a*

$$N_{0,\delta}(r) \geq c_1 r^{\theta(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta})} - c_2, \quad (11)$$

où les constantes $c_i = c_i(\alpha, \beta, s, \theta, \mu, A, C_3)$, $i = 0, 1, 2$, dépendent de $\alpha, \beta, s, \theta, \mu$, la constante A dans (4) et la constante C_3 dans Théorème 2.

Remarque. Le facteur $\theta(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta})$ dans (11) est lié avec le choix de α et β et probablement cette borne inférieure pourrait être améliorée.

Preuve du Théorème 3. Notons que pour $\sigma_j \geq b_-$ on a

$$e^{\beta q_j/2} \geq e^{\frac{\beta}{2}(\sigma_j - 2/3)} \geq \exp\left(\frac{\beta}{2}(\kappa \ln r - B - 2/3)\right) = C_4 r^{\theta/2}$$

avec $C_4 = \exp(-\frac{\beta}{2}(B + 2/3))$. Alors l'inégalité $|\lambda| \leq C_4 r^{\theta/2}$ implique $|\lambda| \leq e^{\beta q_j/2}$ for $\sigma_j \in [b_-, b_+]$. Choisissons r assez grand afin d'arranger $C_1 r > C_4 r^{\theta/2}$. On déduit de (6) que

$$\begin{aligned} N_{0,\delta}(r) & > C_0 \min_{\sigma_j \in [b_-, b_+]} \int_1^{C_4 r^{\theta/2}} |(\widehat{\varphi_j U})(\lambda)| d\lambda - C_2 > \\ & C_0 \min_{\sigma_j \in [b_-, b_+]} \int_1^{C_4 r^{\theta/2}} (|\widehat{\varphi_j F_N}(\lambda)| - |\widehat{\varphi_j V}(\lambda)|) d\lambda - C_2. \end{aligned}$$

D'autre part, la borne inférieure (10) de $\widehat{\varphi_j F_N}(\lambda)$ et l'estimation (7) avec $\epsilon = 1/2$ pour $\widehat{\varphi_j V}(\lambda)$ impliquent pour r et j suffisamment grands

$$N_{0,\delta}(r) > C_0 C_4 d_0 r^{\theta/2} \left[\exp(-\alpha(\kappa \ln r + B)) - \right.$$

$$-\frac{C_3}{d_0} \exp\left(\left(a_0 d_1/d_0 - \frac{\beta}{2}\right)(\kappa \ln r - B)\right) - C_2.$$

Le choix de β et α donne $\frac{\beta}{2} - \frac{a_0 d_1}{d_0} \geq s\alpha$ et on conclut que

$$N_{0,\delta}(r) > C'_4 r^{\theta(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta})} [1 - C'_3 r^{(1-s)\alpha\kappa}] - C_2$$

avec $C'_4 = C_0 C_4 d_0 e^{-\alpha B}$, $C'_3 = \frac{C_3}{d_0} \exp\left((\beta/2 - a_0 d_1/d_0)B\right)$. Pour r assez grand on obtient (11).

3 Singularites de $F_D(t)$ et la fonction zéta dynamique

Dans cette section on va examiner la distribution $F_D(t)$ dans le cas quand (H) est satisfaite. Ikawa [I4], [I5] a remarqué que l'existence d'une suite $\sigma_j \rightarrow +\infty$ et des nombres $\alpha \geq b_2$, $\beta \geq \alpha$ tels que pour $\varphi_j(t) = \rho(e^{\beta q_j}(t - \sigma_j))$ l'estimation

$$|\langle F_D(t), \varphi_j(t) \rangle| \geq C e^{-\alpha \sigma_j}, \quad \forall j \in \mathbf{N} \quad (12)$$

a lieu est liée avec les singularités analytiques de la fonction

$$Z(s) = \sum_{\gamma \in \Xi} (-1)^{m_\gamma} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} e^{-s d_\gamma}, \quad s \in \mathbf{C}.$$

De plus, l'assertion que $Z(s)$ n'est pas une fonction entière est une condition suffisante pour (12) (cf. [I5]). D'autre part, $Z(s)$ est présentée par une série de Dirichlet, donc il existe une abscisse de convergence absolue $h_a \in \mathbf{R}$ tel que pour $\Re s > h_a$ la série $Z(s)$ est absolument convergente. Soit $\mathcal{P}_+$ (resp. $\mathcal{P}_-$) l'ensemble des rayons réfléchissants périodiques primitifs ayant un nombre pair (resp. impair) de réflexions et soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}_+ \cup \mathcal{P}_-$. Etant donné $\gamma \in \mathcal{P}$, désignons par $\lambda_{\gamma,i}$, $i = 1, 2$, les valeurs propres de l'application de Poincaré P_γ plus grandes que 1. Pour $\Re s$ assez grand et $\gamma \in \mathcal{P}$ fixé on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m r_\gamma} |I - P_\gamma|^{-m/2} e^{-m s T_\gamma} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\exp(-2s T_\gamma) \left(1 \pm (\lambda_{\gamma,1}^{k+1/2} \lambda_{\gamma,2}^{p+1/2}) \exp(s T_\gamma)\right)}{\lambda_{\gamma,1}^{2k+1} \lambda_{\gamma,2}^{2p+1} - \exp(-2s T_\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} Z_{k,p,\gamma}(s) \end{aligned} \quad (13)$$

avec

$$r_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \in \mathcal{P}_+, \\ 1 & \text{si } \gamma \in \mathcal{P}_-. \end{cases}$$

Notons que la série (13) converge dans $\mathbf{C}$ dans le sens de convergence des fonctions méromorphes. La singularité principale de $Z(s)$ est donnée par la somme

$$Z_0(s) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} T_\gamma Z_{0,0,\gamma}(s) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m r_\gamma} T_\gamma e^{-m(s T_\gamma - \delta_\gamma)},$$

où $\delta_\gamma = -\frac{1}{2} \log(\lambda_{\gamma,1} \lambda_{\gamma,2})$, car les termes avec $k + p \geq 1$ sont absolument convergents pour $\Re s > h_a - \epsilon$, $\epsilon > 0$. Notons que dans [I6] Ikawa a examiné la fonction $Z_0(s)$ dans le cas quand

K_j sont des boules avec des rayons suffisamment petits.

Introduisons les fonctions

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m(sT_\gamma - \delta_\gamma)} = \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} \left(1 - e^{-sT_\gamma + \delta_\gamma}\right)^{-1}, \\ \zeta_{\pm}(s) &= \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{\pm}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m(sT_\gamma - \delta_\gamma)} = \prod_{\gamma \in \mathcal{P}_{\pm}} \left(1 - e^{-sT_\gamma + \delta_\gamma}\right)^{-1}, \\ \zeta_{2,-}(s) &= \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_-} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-2m(sT_\gamma - \delta_\gamma)} = \prod_{\gamma \in \mathcal{P}_-} \left(1 - e^{-2sT_\gamma + 2\delta_\gamma}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Pour $\Re s$ assez grand on a

$$Z_0(s) = -\frac{d}{ds} \log \left(\frac{\zeta_+(s) \zeta_{2,-}(s)}{\zeta_-(s)} \right)$$

donc pour analyser les singularités de $Z_0(s)$ pour $\Re s > h_a - \epsilon$ on doit étudier la fonction

$$\Phi(s) = \frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)} \zeta_{2,-}(s).$$

Nous avons besoin d'introduire certaines notations de la dynamique symbolique. Soit $[A(i, j)]_{i, j=1, \dots, Q}$ une $Q \times Q$ matrice telle que

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Considérons les espaces

$$\Sigma_A = \{\xi \in \Pi_{-\infty}^{+\infty} \{1, \dots, Q\} : A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1\},$$

$$\Sigma_A^+ = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) : A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1, \forall i \geq 0\}.$$

Pour tout $\xi \in \Sigma_A$ il existe un rayon captif $\gamma(\xi)$ unique avec des points réfléchissants sur $\dots, \partial K_{j-1}, \partial K_j, \partial K_{j+1}, \dots$ qui suivent l'ordre dans la suite $\xi = (\dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots)$ (cf. [I3]). Soit $P_j(\xi)$ le j -ème point de réflexion de $\gamma(\xi)$ et soit

$$f(\xi) = \|P_0(\xi) - P_1(\xi)\|.$$

Il a été montré dans [I3], (cf. aussi [Bu]) qu'on peut construire une suite de fonctions phases

$$\{\varphi_{\xi, j}(x)\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \quad |\nabla_x \varphi_{\xi, j}(x)| = 1$$

ayant des fronts d'ondes

$$C_{\xi, j}(x) = \{y : \varphi_{\xi, j}(y) = \varphi_{\xi, j}(x)\}$$

strictement convexes au voisinage du segment $P_j(\xi)P_{j+1}(\xi)$. Soit $G_{\xi, j}(x)$ la courbure de Gauss de $C_{\xi, j}(x)$ en x et soit

$$\begin{aligned}g(\xi) &= \frac{1}{2} \log \left(G_{\xi, 0}(P_1(\xi)) / G_{\xi, 0}(P_0(\xi)) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \log \left((1 + f(\xi) \kappa_1(\xi))(1 + f(\xi) \kappa_2(\xi)) \right) < 0, \quad \forall \xi \in \Sigma_A,\end{aligned}$$

où $\kappa_i(\xi)$, $i = 1, 2$, sont les courbures principales en $P_0(\xi)$ du front d'ondes des fonctions phases $\varphi_{\xi,0}^\infty(x)$. Désignons par σ_A l'opérateur de la translation à gauche dans Σ_A déterminé par

$$(\sigma_A \xi)_i = \xi_{i+1}, \forall i \in \mathbf{Z}.$$

On considère aussi σ_A sur Σ_A^+ avec

$$(\sigma_A \xi)_i = \xi_{i+1}, \forall i \geq 0.$$

Alors si $\gamma = \gamma(\xi)$ est un rayon périodique réfléchissant avec n points de réflexions on a

$$d_\gamma = f(\xi) + f(\sigma_A \xi) + \dots + f(\sigma_A^{n-1} \xi) = f^n(\xi),$$

$$\delta_\gamma = g(\xi) + g(\sigma_A \xi) + \dots + g(\sigma_A^{n-1} \xi) = g^n(\xi).$$

Etant donnée une fonction $h(\xi)$ déterminée sur Σ_A , on pose

$$\text{var}_n h = \sup\{|h(\xi) - h(\eta)| : \xi_i = \eta_i \text{ for } |i| \leq n\}$$

et pour $0 < \theta < 1$ on introduit

$$\|f\|_\theta = \sup_n \frac{\text{var}_n h}{\theta^n}, \quad \|h\|_\infty = \sup_{\xi \in \Sigma_A} |h(\xi)|, \quad \|h\|_\theta = \|h\|_\infty + \|h\|_\theta.$$

On considère les espaces de Banach $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A) \subset C(\Sigma_A)$, $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \subset C(\Sigma_A^+)$ munis avec la norme $\|h\|_\theta$ et on peut montrer que $f(\xi)$, $g(\xi) \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ avec certain $0 < \theta < 1$ dépendant de la géométrie de K . On ne doit pas confondre θ avec la constante θ utilisée dans la section précédente. Il est bien connu que si $h(\xi) \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ on peut trouver $\tilde{h}, \chi \in \mathcal{F}_{\theta^{1/2}}(\Sigma_A)$ telles que

$$h(\xi) = \tilde{h}(\xi) + \chi(\sigma_A \xi) - \chi(\xi)$$

et de plus $\tilde{h}(\xi) \in \mathcal{F}_{\theta^{1/2}}(\Sigma_A^+)$ dépend seulement des coordonnées $(\xi_0, \xi_1, \dots)$. Dans ce cas nous allons écrire $h \sim \tilde{h}$. Ici est dans la suite on utilise les notations de [PP].

Posons

$$\theta^{1/2} = \theta_1, \quad \mathcal{F}_{\theta_1}(\Sigma_A^+) = \mathcal{F}_{\theta_1}^+, \quad \text{Fix}_m = \text{Fix } \sigma_A^m$$

et soit $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ avec $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{F}_{\theta_1}^+$. On peut écrire (cf. [PP], Chapitre 6)

$$\zeta(s) = \exp G(s), \quad G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\xi \in \text{Fix}_m} e^{-s\tilde{f}^m(\xi) + \tilde{g}^m(\xi)}.$$

En appliquant les résultats de [PP], Chapitre 7 on conclut que $G(s)$ est absolument convergent pour $\Re s > s_0$. Ici s_0 est déterminé d'une manière unique par l'égalité $P(-s_0 f + g) = 0$, où $P(F)$ désigne la pression de F et la fonction $\mathbb{R} \ni s \rightarrow P(-s f + g)$ est strictement décroissante. De plus, le flot σ_f sur l'espace suspendu Σ_A^f est faiblement mélangeant (cf. [St2]) et d'après [PP], Théorème 6.4, la fonction $\zeta(s)$ possède un pôle simple en $s = s_0$. Les résultats de [H], [PP] impliquent que $\zeta(s)$ est méromorphe dans le domaine

$$D_1 = \{s \in \mathbf{C} : P(-\Re s f + g) < \frac{1}{2} |\log \theta|\}$$

et on voit facilement que

$$\{s \in \mathbf{C} : \Re s \geq s_0 - \frac{|\log \theta|}{2\|f\|_\infty}\} \subset D_1.$$

Soit $-s\tilde{f} + \tilde{g} = F_s = U_s + iV_s$ avec $U_s = -\Re s\tilde{f} + \tilde{g}$. Les singularités de $\zeta(s)$ dans D_1 sont liées avec les valeurs propres de l'opérateur complexe de Ruelle $L_s = L_{-s\tilde{f} + \tilde{g}} : \mathcal{F}_{\theta_1}^+ \rightarrow \mathcal{F}_{\theta_1}^+$ déterminé par

$$(L_s u)(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} e^{(-s\tilde{f} + \tilde{g})(\eta)} u(\eta), \quad u \in \mathcal{F}_{\theta_1}^+.$$

Le spectre de L_s (cf. [PP]) est formé de deux parties:

(i) spectre essentiel qui coïncide avec le disque $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \theta_1 e^{P(U_s)}\}$.

(ii) valeurs propres isolées $\lambda_i(s)$, $i = 1, \dots, N(s)$, ayant multiplicité finie $\nu_i(s)$ inclus dans le disque

$$\{z \in \mathbf{C} : \theta_1 e^{P(U_s)} < |z| \leq e^{P(U_s)}\}.$$

Considérons

$$\zeta_m(s) = \sum_{\xi \in \text{Fix}_m} e^{F_s^m(\xi)}.$$

Etant donné $\hat{s} \in D_1$, on écrit dans un voisinage W assez petit de $\hat{s}$

$$\zeta_m(s) = \zeta_m^{(0)}(s) + \zeta_m^{(1)}(s) + \zeta_m^{(2)}(s),$$

où

$$|\zeta_m^{(1)}(s)| \leq C_1(\rho \exp(P(U_s)))^m, \quad |\zeta_m^{(2)}(s)| \leq C_2 m(\rho \exp(P(U_s)))^m, \quad \forall m$$

avec $\theta_1 < \rho < 1$ tel que L_s n'a pas des valeurs propres λ du module $|\lambda| \leq \rho \exp(P(U_s))$, $s \in W$ (cf. [H], [PP], Chapitre 10). En choisissant ρ assez près de θ_1 , on peut arranger $\rho \exp(P(U_s)) < 1$, $s \in W$. Alors les séries $Z^{(i)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \zeta_m^{(i)}(s)$, $i = 1, 2$, sont absolument convergentes dans W . Pour $\zeta_m^{(0)}(s)$ on a la représentation

$$\zeta_m^{(0)}(s) = \sum_{i=1}^{N(s)} \nu_i(s) \lambda_i^m(s).$$

Les valeurs propres $\lambda_i(s)$ et les multiplicités $\nu_i(s)$ ne sont pas des fonctions analytiques de $s \in W$, mais les fonctions

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{N(s)} (1 - \lambda_i(s))^{\nu_i(s)}, \quad \psi(s) = \prod_{i=1}^{N(s)} (1 + \lambda_i(s))^{\nu_i(s)}, \quad s \in W$$

sont analytiques. Si $\varphi(s) \neq 0$ on aura

$$Z^{(0)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \zeta_m^{(0)}(s) = -\log \varphi(s)$$

donc pour tels s on déduit $\zeta(s) = \frac{1}{\varphi(s)} V(s)$ avec $V(s) \neq 0$ analytique dans W . Par conséquent, les singularités de $\zeta(s)$ dans W sont liées avec les points $s \in W$, où $\lambda_i(s) = 1$ pour certain $i = 1, \dots, N(s)$.

Maintenant passons vers l'étude de $\zeta_{\pm}(s)$. Il est clair que

$$\zeta_+(s) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \sum_{\xi \in \text{Fix}_{2m}} e^{-s\tilde{f}^{2m}(\xi) + \tilde{g}^{2m}(\xi)} = \exp \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \zeta_{2m}(s).$$

Alors si $\varphi(s) \neq 0$, $\psi(s) \neq 0$, on obtient

$$Z_+^{(0)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \zeta_{2m}^{(0)}(s) = -\frac{1}{2} \left(\log(\varphi(s)\psi(s)) \right)$$

et

$$Z_-^{(0)}(s) = Z^{(0)}(s) - Z_+^{(0)}(s) = -\frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}\right) \right).$$

Les séries $Z_{(+)}^{(i)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \zeta_{2m}^{(i)}(s)$, $i = 1, 2$, sont absolument convergentes et si $\psi(s) \neq 0$ on trouve

$$\frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)} = \frac{1}{\psi(s)} V_1(s), \quad s \in W$$

avec $V_1(s) \neq 0$ analytique dans W . De telle manière les singularités de la fonction $\frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)}$ dans D_1 sont engendrées par les valeurs propres $\lambda_i(s)$ égales à -1 . D'autre part, on sait que (-1) n'est pas valeur propre de l'opérateur L_{s_0} , donc $\frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)}$ est analytique dans un petit voisinage de s_0 . L'idée d'utiliser les fonctions $Z_{\pm}^{(0)}(s)$ pour l'analyse des singularités m'a été suggérée par F. Ledrappier (cf. [BL]).

En appliquant le même argument pour la fonction

$$\zeta_2(s) = \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \frac{1}{m} e^{-2m(sT_{\gamma} - \delta_{\gamma})},$$

on conclut que $\zeta_2(s)$ est analytique et différente de 0 pour $\Re s > s_2$ avec $s_2 \leq s_0$ et que $\zeta_2(s)$ aura un pôle simple en $s = s_2$. Le nombre s_2 est déterminé par l'équation $P(-2s_2f + 2g) = 0$. Il est clair que $s_0 \geq 0$ implique $s_2 < s_0$. D'autre part, il y a des exemples quand $s_0 < 0$ (cf. [I3]). Notons que l'opérateur

$$(M_{s_2}u)(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} e^{(-2s_2\tilde{f} + 2\tilde{g})(\eta)} u(\eta), \quad u \in \mathcal{F}_{\theta_1}^+$$

possède une valeur propre simple $\mu(s_2) = 1$ et l'argument ci-dessus montre que $\zeta_{2,-}(s)$ aura une singularité essentielle en $s = s_2$. Car $\Phi(s)$ doit être méromorphe au voisinage de s_0 on conclut que $s_2 < s_0 - \epsilon_1 < s_0$. De telle façon les singularités de $\Phi(s)$ près de la ligne $\Re s = s_0$ sont liées avec les valeurs propres $\lambda_i(s) = -1$.

Comme dans [Po], Proposition 7, en utilisant la méthode de petites perturbations on peut démontrer l'existence des pôles de $\Phi(s)$ arbitrairement près de la ligne $\Re s = s_0$ sous la condition que

$$\inf_{t > 1} \|e^{-itf} + 1\|_{\theta} = 0. \quad (14)$$

La condition (14) est plus difficile à satisfaire que celle dans [Po]. D'autre part, dans le cas quand la fonction $f(\Sigma_A) = \{a_1, \dots, a_q\}$ prend un nombre fini de valeurs rationnellement indépendantes on peut arranger (14). Après avec petites perturbations on pourrait traiter des

cas quand K est formé par des petits boules [I6]. Il semble intéressant mais difficile d'examiner les singularités de $Z(s)$ en exploitant aussi les singularités des termes $Z_{k,p,\gamma}(s)$, $k + p \geq 1$ qui peuvent être mis dans une forme pareille à celle de $\Phi(s)$.

Pour l'existence de la suite σ_j et des nombres α , β tels que (12) soit satisfaite l'existence des singularités analytiques de $Z(s)$ n'est pas nécessaire. Soit $\{l_j\}$, $l_j \in \Xi$ une suite telle que

$$0 < l_{j+1} - l_j < d, \quad q_j - 2/3 < l_j < q_j + 2/3, \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

Comme dans [I5] on peut réduire le problème concernant (12) avec $\sigma_j = l_j$ à l'existence des singularités de la série de Dirichlet

$$J(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|d_\gamma - l_j| \leq e^{-\beta l_j}} (-1)^{m_\gamma} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} e^{-s d_\gamma} = \sum_k c_k e^{-s a_k}, \quad s \in \mathbf{C}$$

qui est absolument convergente pour $\Re s > \mathcal{A}$.

Introduisons la condition

$$(P) \quad T_\gamma / T_\delta \notin \mathbf{Q} \text{ pour tous rayons périodiques } \gamma \neq \delta.$$

Notons que pour tout K la condition (P) sera satisfaite pour des obstacles ayant des frontières obtenues par des perturbations régulières génériques (cf. Chapitre 3 dans [PS2]). Si (P) est satisfaite, il est facile de voir que la série de Dirichlet $J(s)$ possède une *abscisse de convergence* finie $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ telle que la série $J(s)$ est simplement convergente pour $\Re s > \mathcal{C}$ (cf. [Be]). Dans le cas quand $\mathcal{C} < \mathcal{A}$ la fonction $J(s)$ admet un prolongement analytique dans le domaine $\{s \in \mathbf{C} : \Re s > \mathcal{C}\}$. Le même argument s'applique à la fonction $\Phi(s)$ dans le cas générique (P) et on peut expecter l'existence des cas quand $\Phi(s)$ est analytique pour $\Re s > s_0 - \epsilon$, $\epsilon > 0$.

Dans la suite on suppose (P) satisfaite et on va examiner la série $J(s)$. Alors pour tout k on obtient $c_k \neq 0$ puisque il existe un seul rayon avec période d_γ . Considérons

$$N_j = \#\{k : c_k c_{k+1} < 0, \quad |a_k - l_j| \leq e^{-\beta l_j}\},$$

$$M_j = \#\{k : \text{il existe } a_k \in \Xi \text{ tel que } |a_k - l_j| \leq e^{-\beta l_j}\}.$$

Supposons qu'il existe β suffisamment grand et une suite convenable $l_j \rightarrow \infty$, $l_j \in \Xi$ tels que

$$N_j \leq L, \quad \forall j \in \mathbf{N}. \tag{15}$$

Si (15) a lieu et $\lim_{j \rightarrow \infty} M_j = \infty$, on obtient l'estimation

$$|\langle F_D(t), \rho(e^{-\beta l_j}(t - l_j)) \rangle| \geq C e^{-\alpha l_j}, \quad \forall j \geq J_2$$

en choisissant β plus grand s'il est nécessaire. En effet, le nombre de changements des signes étant limité, si $M_j \rightarrow \infty$ les coefficients positifs ou négatifs seront dominants. De telle manière on peut supposer que (15) implique

$$M_j \leq L_1, \quad \forall j \in \mathbf{N}. \tag{16}$$

Alors la densité maximum de la suite $\{a_k\}$ sera finie et on peut appliquer les résultats de Chapitre VI dans [Be]. Plus précisément, d'après un théorème classique de V. Bernstein [Be]

si l'indice de condensation de la suite $\{a_k\}$ est finie et si la densité maximum de $\{a_k\}$ est finie, la série $J(s)$ ne possède pas un prolongement comme une fonction entière dans $\mathbf{C}$. Il semble très probable que dans le cas générique (P) la condition (15) est satisfaite pour une suite $\{l_j\}$ convenable en choisissant β assez grand parce que la taille des intervalles $(l_j - e^{-\beta l_j}, l_j + e^{-\beta l_j})$ décroît extrêmement vite. En effet, si on suppose que pour toute suite $\{l_j\}$, $l_j \in \Xi$ et pour tout $\beta > a_0$ on ait $N_j \rightarrow \infty$, les périodes d_γ doivent avoir une concentration assez particulière. D'autre part, l'analyse des singularités des fonctions $\zeta_\pm(s)$ montre que les périodes primitives dans $\mathcal{P}_+$ et celles dans $\mathcal{P}_-$ sont distribuées d'une façon équivalente. Néanmoins, je n'ai pas trouvé des résultats des systèmes dynamiques qui impliquent (15), mais aussi je ne connais pas des exemples quand $N_j \rightarrow \infty$ pour chaque choix de β et de la suite $\{l_j\}$, $l_j \in \Xi$. L'analyse de la série $J(s)$ donne des avantages et il semble que l'étude des singularités de $J(s)$ est plus facile que celle concernant la fonction $Z(s)$.

References

- [BGR] C.Bardos, J.C.Guillot, J.Ralston, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non-borné*, Commun. Partial Diff. Equations **7** (1982), 905-958.
- [BL] M.Babillot and F.Ledrappier, *Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows*, Preprint, Ecole Polytechnique, 1996.
- [Be] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, Gauthier-Villards, 1933.
- [Bu] N.Burq, *Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes*, Suppl. Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 55, **121** (1993), .
- [F1] L.Farhy, *Distribution near real axis of the scattering poles generated by a non-hyperbolic ray*, Ann. Inst. H. Poincaré (Physique théorique), **60** (1994), 291-302.
- [F2] L.Farhy, *Lower bounds on the number of scattering poles under lines parallel to the real axis*, Commun. Partial Diff. Equations, **20** (1995), 729-740.
- [G] C.Gérard, *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull. de S.M.F., Mémoire n° 31, **116** (1988).
- [GM] V.Guillemin and R.Melrose, *The Poisson summation formula for manifolds with boundary*, Adv. in Math. **32** (1979), 128-148.
- [H] N.T.Haydn, *Meromorphic extensions of the zeta function for Axiom A flows*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **10** (1990), 347-360.
- [I1] M.Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles*, Osaka J. Math. **19** (1982), 459-509.
- [I2] M.Ikawa, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J. Math. **22** (1985), 657-689.
- [I3] M.Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several strictly convex bodies*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 113-146.
- [I4] M.Ikawa, *On the existence of the poles of the scattering matrix for several convex obstacles*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **64** (1988), 69-102.
- [I5] M.Ikawa, *On the distribution of poles of the scattering matrix for several convex bodies*, pp. 210-225 in Lecture Notes in Mathematics, vol. 1450, Springer, Berlin, 1990.
- [I6] M.Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta function*, Osaka J. Math. **27** (1990), 281-300 and **29** (1992), 161-174.
- [I7] M.Ikawa, *On Zeta function and scattering poles for several convex bodies*, Exposé II, Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint-Jean-de-Monts, Juin 1994.
- [LP] P.Lax and R.Phillips, *Scattering Theory*, New York, Academic Press 1967.
- [M1] R.Melrose, *Polynomial bound on number of scattering poles*, J. Funct. Anal., **53** (1983), 29-40.

- [M2] R.Melrose, *Polynomial bound on the distribution of poles in scattering by an obstacle*, Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint-Jean-de-Monts, 1984.
- [MS] R.Melrose and J.Sjöstrand, *Singularities in boundary value problems*, I, II. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 593-617 and **35** (1982), 129-168.
- [PP] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta functions and periodic orbits structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque, **187-188**, Soc. Math. de France, 1990.
- [PS1] V.Petkov and L.Stoyanov, *Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectral results*, Amer. J. Math. **109** (1987), 617-668.
- [PS2] V.Petkov and L.Stoyanov, *Geometry of Reflecting Rays and Inverse Spectral Problems*, Chichester, John Wiley & Sons 1992.
- [PV] V.Petkov and G.Vodev, *Upper bound on the number of the scattering poles and the Lax-Phillips conjecture*, Asymptotic Analysis **7** (1993), 97-104.
- [Po] M.Pollicott, *Meromorphic extensions of generalized zeta functions*, Invent. Math. **85** (1986), 147-164.
- [SjZ1] J.Sjöstrand and M.Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 729-769.
- [SjZ2] J.Sjöstrand and M.Zworski, *Lower bounds on the number of scattering poles*, Commun. Partial Diff. Equations **18** (1993), 847-857.
- [Ste] Pl.Stefanov, *Stability of the resonances under smooth perturbations of the boundary*, Asymptotic Analysis, **9** (1994), 291-296.
- [St1] L.Stoyanov, *Poisson relation for the scattering kernel and inverse scattering by obstacles*, Séminaire EDP, Exposé V, Ecole Polytechnique, 1994-1995.
- [St2] L.Stoyanov, *Exponential instability for a class of dispersing billiards*, Preprint, Mathematics Department, University of Western Australia, 1995.
- [St3] L.Stoyanov, *Generalized Hamiltonian flow and rigidity of the scattering length spectrum*, Preprint, Mathematics Department, University of Western Australia, 1996.
- [Va] B.Vainberg, *Asymptotic Methods of Mathematical Physics*, Gordon and Breach Sci. Publ. New York, 1988.
- [Vo1] G.Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 205-216.

V.Petkov
 Université Bordeaux I,
 Département de Mathématiques,
 33405 Talence Cedex
 petkov@math.u-bordeaux.fr