Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Cheverry

Justification de l'optique géométrique non linéaire pour un système de lois de conservation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 15, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A15_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

JUSTIFICATION DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE NON LINEAIRE POUR UN SYSTEME DE LOIS DE CONSERVATION

C. CHEVERRY

Exposé n° XV

21 Mars 1995

JUSTIFICATION DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE NON LINEAIRE POUR UN SYSTEME DE LOIS DE CONSERVATION

C . Cheverry

C.N.R.S URA 305

Institut de Recherche Mathematique de Rennes
Campus de Beaulieu. Av du Gl Leclerc
35 042 RENNES cedex

0 . Introduction .

Nous considérons le problème de la justification de l'optique géométrique non linéaire pour les systèmes de N lois de conservation en dimension un d'espace. Ce sujet a été introduit dans le début des années 1980 par Majda et Di Perna [8]. Il est traité avec succès dans le cas des solutions régulières par Joly-Métivier-Rauch [6]. Toutefois, les solutions de systèmes de lois de conservation associées à des données initiales oscillantes développent des chocs passé un certain délai T.

Justifier le modèle de l'optique géométrique au delà de cet instant T demande de comprendre la nature du problème en régularité BV. Un premier pas dans cette direction a été franchi dans un article récent de Schochet [9]. Le but de cet exposé, c'est de décrire succinctement sur un exemple les arguments et la démarche qui permettent de compléter la réponse partielle donnée par Schochet [9]. Pour une preuve détaillée, nous renvoyons le lecteur à Cheverry [2] – [3] et surtout [4].

L'exemple retenu se présente sous la forme d'un système de trois équations notées $\{ \mathscr{E}_i(u) \}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$. Ces équations sont imposées aux trois composantes $\{ u^i(t,x) \}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ de la fonction $u(t,x)$:

$$(\mathscr{C}) \; : \; \mathscr{E}_i(u) = \begin{cases} (\partial_t + \lambda_i \, \partial_x) \, u^i + \Gamma^i_{ii} \; \partial_x \left[(u^i)^2 \right] + \Gamma^i_{pq} \; \partial_x (u^p \, u^q) = 0 \, . \\ u^i(0,x) = u^i_0(x) \, . \end{cases}$$

Les indices i, p et q sont choisis distincts parmi le triplet $\{ 1 , 2 , 3 \}$.

On impose la stricte hyperbolicité près de l'état de base $u = 0$, à savoir :

(1) $\qquad \lambda_1 \, < \, \lambda_2 \, < \, \lambda_3 \, .$

On suppose que les données initiales $\{ u_0^i(x) \}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ sont controlées en norme L^∞ et en norme BV par une constante δ :

$$(2) \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\}, \quad \| u_0^i(x) \|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R})} \leqslant \delta \quad \text{et} \quad \| u_0^i(x) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \delta .$$

Un résultat de Bressan [1] montre qu'un choix suffisamment petit de la constante δ permet d'assurer l'existence d'une solution globale en temps pour le problème de Cauchy $(\mathscr{C})$. Cette solution est notée $u(t,x)$. Elle possède la régularité BV.

Les calculs d'optique géométrique ont été introduits de manière à étudier le couplage qui s'effectue entre les trois composantes $\{ u^i(t,x) \}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ de la solution $u(t,x)$ ainsi construite. Ils permettent de substituer à $(\mathscr{C})$ un système d'équations plus simple (appelé système des équations de modulation ou système des équations de transport) sur lequel il est possible de lire le phénomène de résonance qui est un phénomène d'interaction non linéaire qui se produit entre les trois fonctions $u^1(t,x)$, $u^2(t,x)$ et $u^3(t,x)$.

Le procédé en question consiste à prendre les composantes $u_0^i(x)$ sous la forme d'oscillations de faible amplitude $\varepsilon\, h^i\big(x, \frac{\varphi_0^i(x)}{\varepsilon}\big)$. On est donc en présence d'une suite de données de Cauchy indicées par un paramètre ε choisi positif et destiné à tendre vers zero. On précise les conditions imposées aux profils $\{ h^i(x,y_i) \}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$:

- périodicité en la variable rapide y_i -

$$(3) \qquad \forall\, (x,y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad h^i(x, y_i + 1) = h^i(x,y_i) .$$

- régularité BV en la variable rapide y_i -

$$(4) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y_i \longmapsto h^i(x,y_i) \in \mathrm{BV}(\mathbb{T}) .$$

- support compact et régularité lipschitzienne en la variable lente x -

$$(5) \qquad \forall\, (x,x') \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{y_i \in \mathbb{T}} \; | h^i(x',y_i) - h^i(x,y_i) | \leqslant L\, |x' - x| .$$

- petitesse en norme -

$$(6) \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\}, \quad \int_{\mathbb{R}} |(\partial_x \varphi_0^i)(x)| \;\; \| h^i(x,.) \|_{\mathrm{BV}(\mathbb{T})} \; dx < \delta .$$

Un exemple de profil $h^i(x,y_i)$ présentant les caractéristiques décrites aux points (3), (4) et (5) est obtenu en prenant le produit d'une fonction de troncature $\varphi(x)$ dans $\mathscr{C}_0^1(\mathbb{R})$ et d'une fonction $h^i(y_i)$ choisie périodique de période un et à régularité BV.

D'après (5) et (6), la suite $\{\varepsilon\, h^i(x, \frac{\varphi_0^i(x)}{\varepsilon})\}_\varepsilon$ satisfait pour ε petit les deux contraintes qui servent d'hypothèse au théorème de Bressan [1]. Par conséquent, on dispose d'une suite de solutions globales en temps notées $\{u_\varepsilon^i(t,x)\}_\varepsilon$ associée à cette suite de données de Cauchy. On pose :

(7) $\qquad u_\varepsilon^i(t,x) = \varepsilon\, U_\varepsilon^i(t,x).$

Ecrire un théorème d'optique géométrique, c'est prouver qu'il est possible de modéliser avec une précision L^1 le comportement asymptotique lorsque le paramètre ε tend vers zero par valeurs positives de la suite $\{u_\varepsilon^i(t,x)\}_\varepsilon$ à l'aide d'une oscillation de faible amplitude $\varepsilon\, \mathcal{U}^i(t, x, \frac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon})$. Plus précisément, il s'agit d'établir :

(8) $\qquad \forall\, t \in [0, \infty[, \qquad \| U_\varepsilon^i(t,.) - \mathcal{U}^i(t,., \frac{\varphi^i(t,.)}{\varepsilon}) \|_{L^1(\mathbb{R})} = o_\varepsilon(1).$

Les phases $\{\varphi^i(t,x)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ qui interviennent en (8) sont obtenues par résolution de l'équation eiconale. On obtient :

(9) $\qquad \varphi^i(t,x) = \varphi_0^i(x - \lambda_i\, t).$

On peut toujours choisir les phases initiales $\varphi_0^i(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et les ajuster de manière à ce que soit satisfaite la condition $(\varphi^1 + \varphi^2 + \varphi^3)(t,x) \equiv 0$ dite relation de résonance.

Sous cette hypothèse de résonance, le profil $\mathcal{U}(t,x,y)$ dont les composantes $\{\mathcal{U}^i(t,x,y_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ interviennent en (8) est déterminé comme étant l'unique solution entropique du système couplé $(\mathscr{T})$ de trois équations $\{\mathscr{T}_i(\mathcal{U})\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ suivant :

$$(\mathscr{T}) : \ \mathscr{T}_i(\mathcal{U}) = \begin{cases} (\partial_t + \lambda_i \partial_x)\mathcal{U}^i + (\partial_x \varphi^i)\ \Gamma_{ii}^i\ \partial_{y_i}[(\mathcal{U}^i)^2] \\ \qquad + (\partial_x \varphi^i)\ \Gamma_{pq}^i\ \partial_{y_i}\{\mathcal{U}^p(t,x,.) * \mathcal{U}^q(t,x,.)\} = 0. \\ \mathcal{U}^i(0,x,y_i) = h^i(x,y_i). \end{cases}$$

Le symbole $*$ désigne ici la convolution en la variable rapide y_i.

Pour construire la solution de $(\mathscr{T})$, on procède par régularisation parabolique. Soit $\{\mathcal{U}_\mu^i(t,x,y_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ les solutions de :

(10) $\qquad \mathscr{T}_i(\mathcal{U}_\mu^i)(t,x,y_i) = \mu\, (\Delta_{y_i} \mathcal{U}_\mu^i)(t,x,y_i) \quad \text{avec} \quad \mu > 0.$

Les profils $\{\mathcal{U}^i(t,x,y_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ sont alors obtenus en passant à la limite dans L^1 lorsque le paramètre μ tend vers zero :

(11) $\qquad \forall\, t \in [0, \infty[, \quad \lim_{\mu \longmapsto 0+} \| \mathcal{U}_\mu^i(t,.,.) - \mathcal{U}^i(t,.,.) \|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} = 0.$

Les fonctions $\{\mathcal{U}^i(t,x,y_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ solutions de $(\mathscr{T})$ possèdent la régularité BV. A ce titre, elles admettent une trace à gauche et à droite le long de toute hypersurface. Cette remarque permet de préciser le sens donné en (8) à l'expression $\mathcal{U}^i(t, x, \frac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon})$.

L'expression $\mathcal{U}^i\big(t,x,\frac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon}\big)$ désigne la demi somme de la trace à gauche et à droite sur l'hypersurface $\mathscr{S}_\varepsilon^i(t)$ d'équation $\{(x,y_i)\,;\; y_i = \frac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon}\}$ de la fonction à variations bornées qui à (x,y_i) associe $\mathcal{U}^i(t,x,y_i)$.

Ce point étant clarifié, on peut à présent énoncer :

THEOREME I.

Le passage à la limite (8) *est vérifié pour les phases* $\{\varphi^i(t,x)\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ *et les profils* $\{\mathcal{U}^i(t,x,y_i)\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ *construits précédemment.*

1 . Mesures de Young à deux échelles.

Pour justifier le passage à la limite annoncé en 0.(8), on dispose d'une notion qui présente l'avantage de traduire parfaitement le type d'asymptotique L^1 qu'on souhaite exprimer. Il s'agit de la notion de mesure de Young à deux échelles associée à la suite de fonctions $\{U_\varepsilon^i(t,x)\}_\varepsilon$. La définition de ces mesures est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1. *De la suite* $\{U_\varepsilon^i(t,x)\}_\varepsilon$ *il est possible d'extraire des sous-suites* $\{U_{\varepsilon_N}^i(t,x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ *auxquelles correspondent des mesures* $\nu^i_{t,x,y_i}(\lambda^i)$ *qui satisfont :*

$\forall\, t\in[0,\infty[,\quad \forall\,\psi(x,y_i)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{T};\mathbb{R}),\quad \forall\, f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R}),$

$$(1)\qquad \lim_{N\longrightarrow\infty}\int f(U^i_{\varepsilon_N}(t,x))\;\psi\Big(x,\frac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon_N}\Big)\;dx = \iint <\nu^i_{t,x,y_i}\,;\,f(\lambda^i)>\;\psi(x,y_i)\;dx\;dy_i\,.$$

Ce premier lemme contient deux informations. La première est relative à l'existence des mesures de Young à deux échelles. En fait, il s'agit là d'une chose acquise (se reporter à Joly-Métivier-Rauch [7]) puisque le théorème de Bressan [1] fournit à la clé des estimations L^∞ uniformes en ε pour la suite de fonctions $\{U_\varepsilon^i(t,x)\}_\varepsilon$. La seconde information porte sur la structure des mesures ainsi obtenues : le passage à la limite en (1) s'effectue à t fixé et est vrai pour tous les instants t.

Lemme 2.

Si chaque mesure $\nu^i_{t,x,y_i}(\lambda^i)$ *obtenue par extraction de sous-suites de la suite* $\{U_\varepsilon^i(t,x)\}_\varepsilon$ *vérifie la condition* $(\mathcal{H})$ *suivante :*

$$(\mathcal{H})\;:\quad \begin{cases} \forall\, t\,,\;\forall\, i\,,\;\nu^i_{t,x,y_i}=\delta_{\mathcal{U}^i(t,x,y_i)} \quad \text{avec pour } \{\mathcal{U}^i(t,x,y_i)\}_{1\leqslant i\leqslant 3} \\ \text{l'unique solution de l'équation de transport } (\mathscr{T})\,. \end{cases}$$

Alors le théorème I est vrai.

Ce deuxième lemme fournit un critère $(\mathcal{H})$ qui permet de conclure à la convergence L^1 recherchée. La condition $(\mathcal{H})$ est en fait la clé qui permet d'aborder le problème de l'optique géométrique en régularité faible.

2 . Inéquations de propagation.

La propriété $(\mathcal{H})$ s'introduit par l'intermédiaire de quantités notées $W^i_{\mathcal{U}^i}(t,x)$ et définies comme étant les intégrales :

$$(1) \qquad W^i_{\mathcal{U}^i}(t,x) = \int_0^1 < \nu^i_{t,x,y_i} \, ; \, |\lambda^i - \mathcal{U}^i(t,x,y_i)| > \; dy_i \, .$$

Il s'agit de quantités positives dont on va prouver qu'elles satisfont le système $(\mathcal{S})$ d'inéquations de propagation suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} (\partial_t + \lambda_i \, \partial_x) W^i_{\mathcal{U}^i}(t,x) \leqslant C \displaystyle\sum_{k=1}^{3} W^k_{\mathcal{U}^k}(t,x) \, . \\ W^i_{\mathcal{U}^i}(0,x) = 0 \, . \end{cases}$$

On intègre en la variable d'espace x le système $(\mathcal{S})$. On applique ensuite le lemme de Gronwall. On obtient :

$(\mathcal{H}') : \quad \forall \, t, \quad \text{pp } x, \qquad W^i_{\mathcal{U}^i}(t,x) = 0 \, .$

Clairement, la condition $(\mathcal{H}')$ se déduit de $(\mathcal{S})$. Ecrire $(\mathcal{H}')$, c'est une autre manière de formuler $(\mathcal{H})$. Or, d'après le lemme 2, la condition $(\mathcal{H})$ permet de justifier l'optique géométrique non linéaire. Il reste par conséquent à prouver le caractère fondé du système d'inéquations $(\mathcal{S})$.

En vue d'obtenir $(\mathcal{S})$, il y a une étape intermédiaire : établir d'abord une famille $(\mathcal{S}^{\delta}_{\chi^i})$ de systèmes d'inéquations paramétrés par des profils réguliers notés $\chi^i(t,x,y_i)$.

Sous sa forme faible, la famille d'inéquations $(\mathcal{S}^{\delta}_{\chi^i})$ en question s'écrit :

$\forall \, \chi^i(t,x,y_i) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}), \quad \forall \, \psi(t,x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positive,

$$(\mathcal{S}^{\delta}_{\chi^i}) = \begin{cases} - \displaystyle\iiint < \nu^i_{t,x,y_i} \, ; \, \eta_\delta(\lambda^i - \chi^i) > \; (\partial_t + \lambda_i \, \partial_x) \psi \; dt \; dx \; dy_i \\ + \displaystyle\iiint < \nu^i_{t,x,y_i} \, ; \, \eta'_\delta(\lambda^i - \chi^i) > \; \mathscr{T}_i(\chi^i) \; \psi(t,x) \; dt \; dx \; dy_i \\ \qquad \leqslant C \, \delta \displaystyle\iint \| \, \partial_{y_i} \chi^i(t,x,.) \, \|_{L^1([0,1])} \; \psi(t,x) \; dt \; dx \\ \qquad + \, C \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \iint W^k_{\chi^k}(t,x) \; \psi(t,x) \; dt \; dx \, . \end{cases}$$

Soit $\varrho_\delta(\lambda)$ une suite régularisante positive et d'intégrale un. On pose :

$$\eta_\delta(\lambda) = |\lambda| * \varrho_\delta(\lambda) \qquad \text{et} \qquad q'_\delta(\lambda) = 2\,\lambda\,\eta'_\delta(\lambda). \tag{2}$$

La relation entre les systèmes $(\mathcal{S}^{\delta}_{\chi^i})$ et $(\mathcal{S})$ est éclairée par le lemme suivant :

Lemme 3. *Le système $(\mathcal{S})$ se déduit de la famille $\{(\mathcal{S}^{\delta}_{\chi^i})\}_{\delta,\chi^i}$.*

Idée pour la preuve du lemme 3.

On remplace dans $(\mathcal{S}^{\delta}_{\chi^i})$ la fonction $\chi^i(t,x,y_i)$ par le profil $\mathcal{U}^i_\mu(t,x,y_i)$. Cette substitution est cohérante car, à μ fixé, la fonction $\mathcal{U}^i_\mu(t,x,y_i)$ possède la régularité $\mathscr{C}^\infty$ requise. On fait ensuite successivement converger les paramètres μ puis δ vers zero au niveau de chaque ligne du système $(\mathcal{S}^{\delta}_{\mathcal{U}^i_\mu})$ ainsi constitué.

Pour la première ligne, d'après 0.(11), la suite $\{\mathcal{U}^i_\mu(t,x,y_i)\}_\mu$ converge dans L^1, lorsque μ tend vers zero, vers $\mathcal{U}^i(t,x,y_i)$. Ensuite, lorsque δ tend vers zero, $\eta_\delta(\lambda^i - \mathcal{U}^i(t,x,y_i))$ converge vers $|\lambda^i - \mathcal{U}^i(t,x,y_i)|$. On obtient ainsi la formulation faible de l'expression placée à gauche de l'inégalité du système $(\mathcal{S})$.

Pour traiter la troisième ligne, il faut se souvenir que la convergence L^1 indiquée en 0.(11) repose sur un argument de compacité qui exploite des estimations L^1 uniformes en μ pour les fonctions $(\partial_{y_i}\mathcal{U}^i_\mu)(t,x,y_i)$. L'expression intégrale reste donc bornée lorsque μ tend vers zero. Lorsqu'ensuite δ tend vers zero, la contribution apportée disparait.

La quatrième ligne est indépendante de δ. D'après la définition 2.(1) et la convergence décrite en 0.(11), on obtient à la limite la formulation faible de l'expression placée à droite de l'inégalité du système $(\mathcal{S})$.

Finalement, il faut expliquer ce que devient la quantité intégrale qui intervient en deuxième ligne, à savoir :

$$\iiint <\nu^i_{t,x,y_i}\,;\,\mu\,\eta'_\delta(\lambda^i - \mathcal{U}^i_\mu)\,\triangle_{y_i}\mathcal{U}^i_\mu>\ \psi(t,x)\ dt\ dx\ dy_i. \tag{3}$$

Soit encore, en faisant passer la dérivée en y_i à gauche :

$$\iiint <\nu^i_{t,x,y_i}\,;\,\mu\,\eta''_\delta(\lambda^i - \mathcal{U}^i_\mu)\,(\partial_{y_i}\mathcal{U}^i_\mu)^2>\ \psi(t,x)\ dt\ dx\ dy_i. \tag{4}$$

$$+ \iiint <\nu^i_{t,x,y_i}\,;\,\mu\,\partial_{y_i}[\eta'_\delta(\lambda^i - \mathcal{U}^i_\mu)\,(\partial_{y_i}\mathcal{U}^i_\mu)]>\ \psi(t,x)\ dt\ dx\ dy_i.$$

L'entropie $\eta_\delta(\lambda)$ est convexe. La mesure ν^i_{t,x,y_i} et la fonction test $\psi(t,x)$ sont positives. Il s'ensuit que la première expression intégrale présente en (4) admet à μ (positif) et δ fixés un signe. Elle apporte une contribution positive. Par conséquent, elle est absorbée dans l'inégalité du système $(\mathcal{S})$.

Interprétons en (4) la mesure ν^i_{t,x,y_i} comme une fonction test. La démarche traditionnellement adoptée pour faire disparaitre la deuxième expression intégrale consiste à procéder à une intégration par parties. Comme l'indice μ est en facteur et que les dérivées d'ordre un de la suite de fonctions $\{\mathcal{U}^i_\mu(t,x,y_i)\}_\mu$ sont bornées dans L^1, on s'attend à ce que la contribution apportée converge vers zero lorsque μ tend vers zero.

En fait, l'intégration par parties en question n'est pas justifiée faute de régularité suffisante pour la mesure ν^i_{t,x,y_i}. Il existe cependant un argument de régularisation modulo lequel la manipulation décrite précédemment devient rigoureuse. Dès lors, le lemme 3 est prouvé.

Ce troisième lemme est important : il permet d'affirmer que l'enjeu maintenant, c'est de justifier la famille d'inéquations $(\mathcal{S}^\delta_{\chi^i})$. Pour ce faire, il faut revenir au système de lois de conservation $(\mathscr{C})$ initial pour ensuite passer à la limite lorsque le paramètre ε tend vers zero. Rappelons que la $i^{\text{èm}}$ composante $U^i_\varepsilon(t,x)$ est solution de :

$$(5)\qquad \mathscr{E}_i(U^i_\varepsilon) = (\partial_t + \lambda_i\,\partial_x)\,U^i_\varepsilon + \varepsilon\,\Gamma^i_{ii}\;\partial_x\,[(U^i_\varepsilon)^2] + \varepsilon\,\Gamma^i_{pq}\;\partial_x(U^p_\varepsilon\,U^q_\varepsilon) = 0.$$

Il faut penser que l'inéquation $(\mathcal{S}^\delta_{\chi^i})$ a pour but de comparer asymptotiquement (lorsque le paramètre ε tend vers 0) la suite $\{U^i_\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ à la suite de fonctions $\{\chi^i_\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ définie comme étant $\{\chi^i\big(t,x,\frac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon}\big)\}_\varepsilon$. Pour établir cette comparaison, on retranche à $\mathscr{E}_i(U^i_\varepsilon)$ la valeur de $\mathscr{E}_i$ appliqué à $\chi^i_\varepsilon(t,x)$. On obtient une mesure. On teste ensuite cette mesure contre l'expression :

$$(6)\qquad \hat{\eta}'_\delta\big((U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)(t,x)\big)\;\psi(t,x).$$

Cette manipulation a un sens car, comme souligné dans Vol'pert [11], l'expression $\hat{\eta}'_\delta\big((U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)(t,x)\big)$ définie comme étant :

$$(7)\qquad \hat{\eta}'_\delta\big((U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)(t,x)\big) = \int_0^1 \eta'_\delta\big((U^{i+}_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)(t,x) + s\,(U^{i+}_\varepsilon - U^{i-}_\varepsilon)(t,x)\big)\;ds.$$

est déterminée en tout point du complémentaire d'un ensemble de $\mathbb{H}^1$ mesure de Haussdorf nulle, c'est à dire sur un ensemble que ne charge pas la mesure $\mathscr{E}_i(U^i_\varepsilon) - \mathscr{E}_i(\chi^i_\varepsilon)$ contre laquelle elle est testée.

On obtient ainsi :

(8) $\qquad (i)_\varepsilon + (ii)_\varepsilon + (iii)_\varepsilon + (iv)_\varepsilon + (v)_\varepsilon = 0\,,$ avec :

$$(i)_\varepsilon = \iint (\partial_t + \lambda_i\, \partial_x)\,[\,\eta_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\,]\ \psi(t,x)\ dt\ dx\,.$$

$$(ii)_\varepsilon = \varepsilon\ \Gamma^i_{ii} \iint \hat{\eta}'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \partial_x\,[\,(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)^2\,]\ \psi(t,x)\ dt\ dx\,.$$

$$(iii)_\varepsilon = 2\ \varepsilon\ \Gamma^i_{ii} \iint \hat{\eta}'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \partial_x\,[\,(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \chi^i_\varepsilon\,]\ \psi(t,x)\ dt\ dx\,.$$

$$(iv)_\varepsilon = \varepsilon\ \Gamma^i_{pq} \iint \hat{\eta}'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \partial_x\,[\,(U^p_\varepsilon\ U^q_\varepsilon) - (\chi^p_\varepsilon\ \chi^q_\varepsilon)\,]\ \psi(t,x)\ dt\ dx\,.$$

$$(v)_\varepsilon = \iint \eta'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \mathscr{E}_i(\chi^i_\varepsilon)\ \psi(t,x)\ dt\,dx\,.$$

On énonce à présent une succession de lemmes qui décrivent les passages à la limite lorsque le paramètre ε tend vers zero dans les cinq expressions intégrales précédantes.

Lemme 4. (*terme linéaire*)

$$\lim_{\varepsilon \longmapsto 0}\ (i)_\varepsilon = - \iiint <\ \nu^i_{t,x,y_i}\,;\, \eta_\delta(\lambda^i - \chi^i)\ >\ \ (\partial_t + \lambda_i\, \partial_x)\,\psi\ \ dt\ dx\ dy_i\,.$$

Preuve du lemme 4.

Intégrer par parties puis appliquer la définition donnée au lemme 1 pour les mesures de Young à deux échellles.

Lemme 5. (*premier terme de Burgers*)

$$\lim_{\varepsilon \longmapsto 0}\ (ii)_\varepsilon \geqslant 0\,.$$

Preuve succinte du lemme 5.

Le calcul fonctionnel de Vol'pert [11] justifie le développement :

(9) $\qquad \partial_x\,[\,(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)^2\,] = 2\ (\hat{U}^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \partial_x\,(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\,.$

L'intégrale $(ii)_\varepsilon$ fait donc apparaitre la mesure :

(10) $\qquad \hat{\eta}'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ (\hat{U}^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \partial_x\,(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\,.$

La difficulté du passage à la limite pour $(ii)_\varepsilon$ provient de ce que :

$$(11) \qquad 2\ \hat{\eta}'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ (\hat{U}^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \partial_x (U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon) \neq \partial_x [q_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)].$$

Il y a en effet égalité entre les deux expressions ci-dessus aux points de continuité de la fonction $U^i_\varepsilon(t,x)$ mais en général, il y a inégalité aux points de discontinuité de la fonction $U^i_\varepsilon(t,x)$, c'est à dire sur un ensemble que peut à priori venir charger la mesure $(\partial_x U^i_\varepsilon)(t,x)$. Un argument non trivial dû à Schochet [9] permet malgré tout de faire intervenir une quantité écrite sous forme conservative. Le prix à payer est un $o_\varepsilon(1)$:

$$(12) \qquad (ii)_\varepsilon \geqslant \varepsilon\ \Gamma^i_{ii} \iint \partial_x [q_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)]\ \psi(t,x)\ dt\ dx - o_\varepsilon(1).$$

Le lemme 5 devient une conséquence immédiate de la minoration qui est établie en (12).

Lemme 6. (*second terme de Burgers*)

$$\lim_{\varepsilon \longmapsto 0} (iii)_\varepsilon \leqslant C\ \delta \iint \| \partial_{y_i} \chi^i(t,x,.) \|_{L^1([0,1])}\ \psi(t,x)\ dt\ dx.$$

Preuve du lemme 6.

En développant $(iii)_\varepsilon$, il vient :

$$(13) \qquad (iii)_\varepsilon = -2\ \Gamma^i_{ii} \iint \eta_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \varepsilon\ \partial_x (\chi^i_\varepsilon\ \psi)(t,x)\ dt\ dx$$
$$+ 2\ \Gamma^i_{ii} \iint \eta'_\delta(U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ (U^i_\varepsilon - \chi^i_\varepsilon)\ \varepsilon\ (\partial_x \chi^i_\varepsilon)(t,x)\ \psi(t,x)\ dt\ dx.$$

Mais par définition,

$$(14) \qquad \varepsilon\ (\partial_x \chi^i_\varepsilon)(t,x) = \varepsilon\ (\partial_x \chi^i)(t,x,\tfrac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon})$$
$$+ (\partial_x \varphi^i)(t,x)\ (\partial_{y_i} \chi^i)(t,x,\tfrac{\varphi^i(t,x)}{\varepsilon}).$$

Le premier terme de l'égalité (14) reporté en (13) ne donne aucune contribution à la limite car ε est mis en facteur. Seul compte en fait le second terme. En appliquant la définition donnée au lemme 1, on obtient une expression explicite pour la valeur de la limite :

$$(15) \qquad \lim_{\varepsilon \longmapsto 0} (iii)_\varepsilon =$$
$$2\ \Gamma^i_{ii} \iiint < \nu^i_{t,x,y_i} ; -\eta_\delta(\lambda^i - \chi^i) + (\lambda^i - \chi^i)\ \eta'_\delta(\lambda^i - \chi^i) >$$
$$\star\ (\partial_x \varphi^i)(t,x)\ (\partial_x \psi)(t,x)\ (\partial_{y_i} \chi^i)(t,x,y_i)\ dt\ dx\ dy_i.$$

Or, par construction,

$$(16) \qquad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\eta_\delta(\lambda) - \lambda\ \eta'_\delta(\lambda)| \leqslant \delta.$$

En (15), on teste une mesure de probabilité contre une fonction majorée par δ. L'expression obtenue est donc estimée par δ. Le lemme 6 est prouvé.

Lemme 7. (*terme de reste*)

$$\lim_{\varepsilon \longmapsto 0} (v)_\varepsilon = \iiint < \nu^i_{t,x,y_i} ; \eta'_\delta(\lambda^i - \chi^i) > \mathscr{T}_i(\chi^i) \ \psi(t,x) \ dt \ dx \ dy_i .$$

Idée pour la preuve du lemme 7.

Elle repose sur une analyse de Fourier que rend possible la régularité imposée au profil $\chi^i(t,x,y_i)$. On écrit :

$$(17) \qquad \chi^i(t,x,y_i) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} a^i_r(t,x) \ e^{i\, r\, y_i} .$$

La fonction $\chi^i(t,x,y_i)$ est choisie de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par conséquent, la série de Fourier et ses dérivées convergent uniformément. Quitte à remplacer $\chi^i(t,x,y_i)$ par une somme partielle qui l'approche de manière suffisamment précise, on constate que la quantité $(v)_\varepsilon$ fait intervenir les exponentielles $\{ e^{i\, r\, \varphi^i(t,x)/\varepsilon} \}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$. On utilise la relation de résonance pour trier les modes non oscillants. Le passage à la limite du lemme 7 relève alors d'un résultat de compacité par compensation bilinéaire classique (Tartar [10]).

Lemme 8. (*terme de résonance*)

$$\lim_{\varepsilon \longmapsto 0} (iv)_\varepsilon \leqslant C \sum_{k=1}^{3} \iint W^k_{\chi^k}(t,x) \ \psi(t,x) \ dt \ dx .$$

Idée pour la preuve du lemme 8.

Le lemme 8 est la "version faible d'un résultat de compacité par compensation trilinéaire résonant". On explique le choix de cette terminologie.

"Trilinéaire" parce qu'il s'agit de passer à la limite dans l'intégrale du produit de trois fonctions. Les expressions mises en jeu sont polarisées. Elles satisfont :

$$(18) \qquad (\partial_t + \lambda_i \, \partial_x) U^i_\varepsilon(t,x) = \varepsilon \, (\partial_x \mathscr{R}^i_\varepsilon)(t,x) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 .$$

"Résonant" parce que les trois champs de vecteurs qui interviennent en (18) sont à coefficients constants ce qui induit la présence de résonances.

"Version faible" d'un résultat de compacité par compensation car on ne cherche pas à expliciter la valeur de la limite (par exemple en fonction des différentes mesures de Young) mais simplement à obtenir une majoration de ce qu'on obtient en passant à la limite.

Finalement, l'estimation donnée au lemme 8 n'est pas gratuite. En effet, le théorème de Bressan [1] fournit une estimation BV globale en espace :

$$(19) \qquad \forall\, t \in [0, \infty[, \qquad \| \, \varepsilon \, (\partial_x U_\varepsilon^i)(t,.) \, \|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R})} \leqslant C .$$

Cette estimation permet simplement de contrôler la quantité $(iv)_\varepsilon$ selon :

$$(20) \qquad \lim_{\varepsilon \longmapsto 0} \; (iv)_\varepsilon \leqslant C \; \| \, \psi \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})} .$$

Le passage d'une norme L^∞ à une norme L^1 exprimé au lemme 8 traduit un gain de régularité. Pour faire apparaitre ce gain, on a besoin d'estimations fines sur la suite $\{ \, U_\varepsilon^i(t,x) \, \}_\varepsilon$. Les estimations en question ne sont pas classiques en ce sens où elles demandent d'améliorer l'analyse faite par Bressan [1] (et antérieurement celle faite par Glimm [5]).

A ce titre, elles font l'objet d'un théorème à part entière. Il s'agit d'un théorème qui contient la version interaction d'ondes des calculs d'optique géométrique. Ce résultat adapté à notre cas de figure donne l'information suivante :

THEOREME II.

Pour tout instant t*, pour tout intervalle* I_ε *de type espace, d'extrémités* i_1 *et* i_2 *et de taille* ε *(en d'autres termes,* $| \, I_\varepsilon \, | = | \, [i_1, i_2] \, | = i_2 - i_1 = \varepsilon$ *),*

$$(21) \qquad \| \, \mathcal{U}_\varepsilon^i(t,.) \, \|_{\mathrm{BV}(I_\varepsilon)} \leqslant C(t) < \infty .$$

L'estimation gagnée au théorème II permet de considérer les quantités $\varepsilon \, (\partial_x \mathscr{R}_\varepsilon^i)(t,x)$ comme des termes de reste à part entière. Dès lors, il devient possible modulo une erreur controlée par un $o_\varepsilon(1)$ de remplacer en $(iv)_\varepsilon$ le produit $\partial_x \, (U_\varepsilon^p \; U_\varepsilon^q)$ par la convolution $(\partial_x \, U_\varepsilon^p) \ast U_\varepsilon^q$. Cette manipulation permet de faire apparaitre en $(iv)_\varepsilon$ le produit $\| \; U_\varepsilon^p \; \|_{\mathrm{BV}(I_\varepsilon)} \times \| \; U_\varepsilon^q \; \|_{L^1(\mathbb{R})}$.

On comprend alors d'où provient au lemme 8 la quantité $W_{\chi^k}^k(t,x)$: elle est obtenue par passage à la limite lorsque le paramètre ε tend vers zero dans l'expression $\| \; (U_\varepsilon^q - \chi_\varepsilon^q)(t,.) \; \|_{L^1(\mathbb{R})}$ extraite d' $(iv)_\varepsilon$ à l'aide du procédé décrit précédemment.

Le lemme 8 est prouvé.

A la lumière des lemmes $4 - 5 - 6 - 7$ et 8, on constate que le passage à la limite lorsque le paramètre ε tend vers zero dans le système de lois de conservation initial permet de prouver le caractère fondé de la famille d'inéquations $(\mathcal{S}_{\chi^i}^{\delta})$.

A fortiori, l'optique géométrique non linéaire se trouve donc justifiée pour les systèmes de N lois de conservation.

Bibliographie

[1] A. Bressan, *Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking*, J. Math. Anal. Appl. **170** (1992), 414-432.

[2] C. Cheverry, *Justification de l'optique geometrique pour une loi de conservation scalaire*, Fascicule d'équations aux dérivées partielles. Institut de Recherche Mathématique de Rennes. (1992), Prépublication 55-84

[3] C. Cheverry, *Oscillations de faible amplitude pour les systèmes* 2×2 *de lois de conservation*, Asymptotique Analysis. (à paraitre).

[4] C. Cheverry, *Optique géométrique faiblement non linéaire : le cas général*, Fascicule d'équations aux dérivées partielles. Institut de Recherche Mathématique de Rennes. (1995), Prépublication 95-11

[5] J.Glimm, *Solutions in the large for non linear hyperbolic systems* Commun. Pure. Applied. Math. **28** (1965), 697-715.

[6] J. L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*, J. Funct. Anal. **114** (1993), 106-231.

[7] J. L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, *Focusing and absorbtion of nonlinear oscillations*, Prepublication 93-16, Institut de Recherche Mathematique de Rennes, Juin 1993.

[8] A. Majda and R. Di Perna, *The validity of nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, Commun. Math. Phys. **98** (1985), 313-347.

[9] S. Schochet, *Resonant Nonlinear Geometric Optics for Weak Solutions of Conservation Laws*, Jour. Diff. Equations. **113** (1994), 473-504.

[10] Tartar, *Compensated Compactness and Applications to PDE's*, Non linear Analysis and Mechanics, Herriot Watt Symposium. (1979).

[11] A. I. Vol'pert, *The Spaces BV and quasilinear equations*, Math USSR. Sbornik Vol 2. (1967), N° 2, 225-267.