

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

N. BURQ

Pôles de diffusion engendrés par un coin

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 13,
p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A13_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléx 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PÔLES DE DIFFUSION ENGENDRES PAR UN COIN

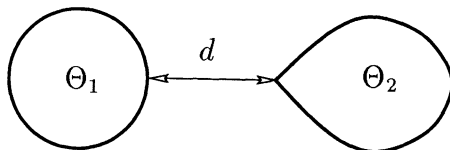
N. BURQ

Pôles de diffusion engendrés par un coin

N. Burq,
Centre de Mathématiques*,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex,
France

1 Introduction

On se propose, dans cet exposé, de donner une localisation précise des pôles de diffusion pour le problème de Dirichlet à l'extérieur d'un obstacle contenant des coins et une trajectoire captive connectant ce coin à lui même. Plus précisément, notre situation géométrique est la suivante : on considère $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, un compact de \mathbf{R}^2 . On suppose que le bord de l'obstacle Θ_1 , $\partial\Theta_1$, est analytique et que $\partial\Theta_2$ est aussi analytique sauf en un point O au voisinage duquel il existe des fonctions a et b , analytiques au voisinage de 0 dans \mathbf{R} telles que localement, Θ_2 est défini par l'équation $\Theta_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}; b(x) \leq y \leq a(x)\}$. On suppose également que Θ_1 et Θ_2 sont strictement convexes, c'est à dire que partout où elle est définie, la courbure de $\partial\Theta$ est strictement positive (cette dernière hypothèse pourrait être affaiblie). On suppose enfin que la distance, d , entre les obstacles Θ_1 et Θ_2 est minimisée entre un point $A \in \Theta_1$ et le point O et que ce minimum est strict.



Dans le cas où les deux obstacles sont à frontière de classe C^∞ , la localisation des pôles de diffusion a été étudié par M.Ikawa [3], puis par C.Gérard [1]. C.Gérard donne en effet un développement asymptotique explicite de tous les pôles dans les régions du type $\{\lambda \in \mathbf{C}; \Im m \lambda \leq C; C > 0\}$ et montre que ceux-ci se répartissent asymptotiquement sur des droites horizontales.

*URA 169 du CNRS

Dans le cas qui nous interesse, la géométrie est dans un certain sens beaucoup plus favorable que dans le cas C^∞ étudié par ces deux auteurs, ce qui va nous permettre de calculer (presque) tous les pôles localisés sous une courbe logarithmique arbitraire $\{\lambda \in \mathbf{C}; \Im m \lambda \leq C \log(|\lambda|)\}; C > 0$.

On note $R_\Omega(\lambda)$, la résolvante sortante du Laplacien avec conditions de Dirichlet, holomorphe dans $\Im m \lambda < 0$, définie par la construction suivante : on note $U_\Omega(t)$ le propagateur du problème

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta) U_\Omega(t) f &= 0, \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t \\ U_\Omega(t) f|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t U_\Omega(t) f|_{t=0} &= f \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. L'opérateur $R_\Omega(\lambda)$ est défini par la relation :

$$(1.2) \quad R_\Omega(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} U_\Omega(t) dt.$$

pour tout $\lambda \in \{\Im m \lambda < 0\}$. Comme l'opérateur $U(t)$ est une isométrie de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il est clair que cette relation définit une famille d'opérateurs bornés de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, holomorphe dans $\{\Im m \lambda < 0\}$.

Le résultat principal obtenu est le suivant:

THÉORÈME 1 *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que*

i) *La résolvante sortante R_Ω , considérée comme un opérateur de $L_{\text{comp}}^2(\Omega)$ dans $H_{0,loc}^1(\bar{\Omega})$, holomorphe dans $\{\Im m \lambda < 0\}$, s'étend en un opérateur méromorphe dans*

$$(1.3) \quad \{\lambda; \Im m \lambda \leq |\lambda|^N, |\lambda| > C_N\}$$

ii) *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $M \leq N^2$, $(a_p, q_p)_{0 \leq p \leq M} \in \mathbf{C} \times \mathbf{Q}^+$ tels que, si on note, pour tout p , $(\lambda_{j,p})_{j \in \mathbf{Z}}$, la suite des solutions de l'équation*

$$(1.4) \quad \frac{e^{-2i\lambda}}{\lambda^{1/2+q_p}} = a_p$$

qui vérifie

$$(1.5) \quad \Re e(\lambda_{j,p}) \sim j \frac{\pi}{d}, \quad \Im m(\lambda_{j,p}) \sim (1/2 + q_p) \log(|j|)$$

alors, pour chaque p , il existe un développement asymptotique $(b_{k,p})_{k \in \mathbf{N}}$, un exposant $r_p \in \mathbf{Q}^+$ tels que pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe C_m tel que chaque boule d'équation

$$(1.6) \quad \left| \lambda - \left(\lambda_{j,p} + \sum_{k=1}^m (\lambda_{j,p}^{-1/r_p})^k b_{k,p} \right) \right| \leq C_m |\lambda_{j,p}|^{-(m+1)/r_p}$$

contient un pôle de diffusion (avec multiplicité si plusieurs de ces boules sont d'intersection non vide) et sur l'ensemble $\{\Im m \lambda \leq \varepsilon_0 \log(|\lambda|^{N+1/2}) \mid |\lambda| \geq C_N\}$, tous les pôles de diffusion sont dans une telle boule.

iii) Enfin, on a, si on suppose q_p rangés par ordre croissant, $q_0 = 0$, $r_0 = 1$

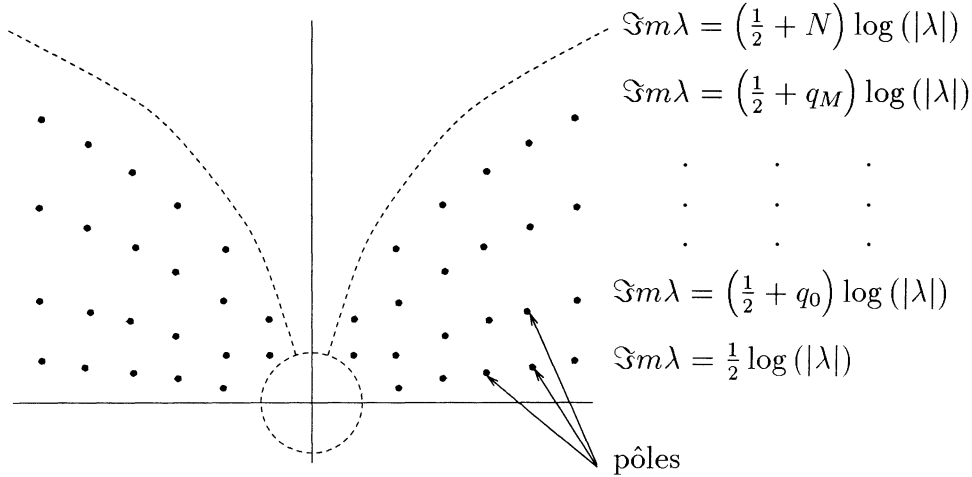
$$(1.7) \quad a_0 = \sqrt{\frac{\pi}{d(1+d\kappa)}} e^{-i\pi/4} \Psi(\alpha, \theta)$$

où Ψ est une fonction analytique de α , l'angle extérieur au coin et de θ , l'angle entre le coin et la trajectoire captive et $q_1 \geq 1/2$

Nous rappelons que pour tout k , les pseudopôles $\lambda_{k,p}$ forment une suite vérifiant

$$(1.8) \quad \Re \lambda_{k,p} \sim \frac{-\text{Arg}(a_k) + k\pi}{2d}; \quad \Im m \lambda \sim (1/2 + q_k) \log(|k|),$$

ce qui montre que comme annoncé, les pôles de diffusion se répartissent asymptotiquement sur des courbes logarithmiques.



REMARQUE 1.1 Dans le cas où l'obstacle est de classe C^∞ , la situation est complètement différente puisque, d'une part le théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand implique que s'il n'y a pas de trajectoire captive, il n'y a qu'un nombre fini de pôles sous toute courbe logarithmique, et d'autre part, les résultats de C. Gérard et M. Ikawa montrent que s'il n'y a qu'une trajectoire captive de type hyperbolique (ce qui, à priori est la situation qui donne des pôles de diffusion le moins proche possible de l'axe réel), alors, on a une infinité de pôles à distance fixe de l'axe réel.

REMARQUE 1.2 D'un point de vue numérique, notre résultat est à rapprocher d'un résultat de O. Poisson [5], qui calcule numériquement les pôles de diffusion pour le problème de Neumann à l'extérieur d'une fissure rectiligne dans \mathbb{R}^2 . En effet, l'ouvert possède aussi

dans ce cas une unique trajectoire captive reliant un coin (dégénéré) à un autre (celle qui connecte une extrémité de la fissure à l'autre) et les calculs de O . Poisson (antérieurs à notre résultat) font clairement apparaître des pôles de diffusion situés asymptotiquement sur des courbes logarithmiques (au moins pour les trois premières courbes), de manière étonnamment précise puisque la répartition asymptotique apparaît pour des fréquences de l'ordre de 5 (si la longueur de la fissure est 1).

2 Résultats préliminaires

Nous présentons dans cette partie des résultats de propagation des singularités dans les ouverts à coins et quelques conséquences de ces résultats.

DÉFINITION 2.1. — On notera O le coin, $L = O \times \mathbb{R}_t$ l'arête et $T_b^*\Omega = T^*\mathbb{R}^{2+1} \mid_\Omega \cup \partial\Omega \times \mathbb{R}_t \setminus L \cup T^*L$ le fibré cotangent jusqu'au bord à Ω .

DÉFINITION 2.2. — On note, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, solution de l'équation des ondes dans Ω avec conditions de Dirichlet, et pour $s \in]1, +\infty]$, $WF_b^s(u)$ (respectivement $SS_b^s(u)$ pour $1 \leq \sigma < +\infty$) les fronts d'onde H^s (respectivement Gevrey σ) définis de la manière usuelle en dehors des coins et en demandant une régularité microlocale en temps à valeurs $H_{0,loc}^1$ en espace, au voisinage du coin.

DÉFINITION 2.3. — On appelle bicaractéristique généralisée C^∞ (respectivement analytique) toute application continue $\mathbb{R} \rightarrow T_b^*\Omega$ telle que, si $\gamma(s_0) \notin T^*L$, alors, au voisinage de s_0 , γ est une bicaractéristique C^∞ (respectivement analytique) au sens usuel (c'est à dire que nous reprenons la définition standard excepté qu'un rayon qui rencontre un coin peut repartir dans n'importe quelle direction qui le fasse rester dans $\overline{\Omega}$).

On a alors les résultats de propagation des singularités suivants, conséquence du cas analytique, démontré par G. Lebeau dans [4] :

THÉORÈME 2. — Les fronts d'onde sont réunions de bicaractéristiques (C^∞ pour $1 < s \leq +\infty$ et $3 \leq \sigma$ et analytiques pour $1 \leq \sigma < 3$). C'est à dire que par tout point du front d'onde il passe une bicaractéristique généralisée incluse dans le front d'onde.

REMARQUE 2.4. — Il est facile de voir que les demi-bicaractéristiques généralisées qui ne rencontrent pas le coin ont au plus un nombre fini de réflexions sur les bords de l'obstacle.

Cette remarque et le théorème 2 vont nous permettre de transformer notre problème sur la localisation des pôles de diffusion en un problème sur l'opérateur de rebond microlocal au voisinage de la trajectoire captée. C'est en ce sens que notre situation géométrique est beaucoup plus favorable que celle de M. Ikawa et C. Gérard.

Une première conséquence standard du théorème 2 est

PROPOSITION 2.5. — On notera R_i la résolvante sortante du système :

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\Delta + \lambda^2) R_i(u) &= 0 \text{ dans } \theta_i^c \\ R_i(u) \mid_{\partial\Omega_i} &= u \end{cases}$$

alors les opérateurs R_i sont holomorphes pour $\Im m \lambda < 0$ comme opérateurs de $H^{1/2}(\partial\Theta_i)$ à valeurs dans $H_{loc}^1(\overline{\Theta_i^c})$ et admettent un prolongement analytique à un domaine de la forme $\left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \Im m \lambda \leq C e^{\frac{-|\lambda|^{1/3}}{C}} \right\}$.

Enfin, il est démontré dans [1] que les pôles de la résolvante sortante à l'extérieur de $\Theta_1 \cup \Theta_2$ et les points λ où l'opérateur $Id - \gamma_1 R_2 \gamma_2 R_1$ (γ_i est l'opérateur de restriction sur le bord de l'obstacle Θ_i) n'est pas inversible coïncident. Nous allons donc, suivant en cela la stratégie de C. Gérard, dans toute la suite de cet exposé, nous limiter à l'étude de ce dernier opérateur, qu'on notera M , qui est microlocalement associé à l'opérateur de billard.

3 Idée de la démonstration du théorème principal

Nous nous limiterons dans cette partie à l'étude de la première rangée de pôles. Soient donc $N = 1$ et $\varepsilon > 0$. Le point de départ de notre analyse est la remarque suivante, conséquence simple de la convexité des obstacles :

LEMME 3.1. — *Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que tout rayon qui a rencontré k fois le bord de Θ_1 a en fait rencontré le coin.*

On déduit de cette remarque et du résultat de propagation des singularités de la proposition 2, en utilisant la transformation de Fourier, que toute l'énergie (modulo $O(\lambda^{-\infty})$) de $M^k f$ vient des rayons qui ont parcouru une trajectoire de billard allant k fois de $\partial\Theta_1$ à $\partial\Theta_2$ et vice-versa et donc qui, a un moment ou un autre, ont été diffractés par le coin. Pour analyser cette diffraction, nous allons utiliser un résultat de P. Gérard et G. Lebeau [2] :
THÉORÈME 3. — *Pour toute onde incidente, en dehors des rayons réfléchis sur les deux faces du coin, l'onde réfléchie par le coin (donc diffractée) est de la forme :*

$$(3.1) \quad u_d = e^{-i\lambda|x|} \sigma(x, \lambda)$$

(où on a pris le coin O comme origine $O = \{x = (0, 0)\}$).

Par ailleurs, P. Gérard et G. Lebeau donnent également une description complète de l'onde diffractée si l'onde incidente est conormale analytique, c'est à dire si

$$(3.2) \quad u_i = e^{-i\lambda\varphi(x)} \sigma(x, \lambda)$$

avec $\nabla\varphi(0, 0) = (-1, 0)$. Ils montrent qu'alors l'onde diffractée vérifie :

$$(3.3) \quad u_d = e^{-i\lambda|x|} T(\sigma)(x, \lambda)$$

avec

$$(3.4) \quad T(\sigma)(x, \lambda) \sim \sum_{i \leq \lambda/C} \sum_{|j| \leq 2i} \lambda^{-i} K_{i,j} \partial_j \sigma(0, \lambda)$$

où les fonctions $K_{i,j}$ sont holomorphes et vérifient des estimations de type analytiques.

Si on note maintenant $A = (-d, 0)$ le point de $\partial\Theta_1$ sur la trajectoire captive, les résultats qui précèdent montrent que nous cherchons à inverser sur un ensemble de fonctions de la forme $e^{-i\lambda|x|}\sigma(x, \lambda)$ un opérateur $(Id - M)$ qui, près de la trajectoire captive et sur des fonctions de cette forme agit comme l'opérateur

$$(3.5) \quad \sigma \mapsto \sigma - e^{-2i\lambda d} \frac{Cte}{\sqrt{\lambda}} \sigma(0, 0)$$

où la constante est purement géométrique.

En effet, il suffit, pour calculer M près de la trajectoire captive de faire d'abord un calcul d'optique géométrique, c'est à dire de résoudre

$$(3.6) \quad \begin{cases} \varphi|_{\partial\Theta_1} &= |x| |_{\partial\Theta_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} |_{\partial\Theta_1} &= -\frac{\partial|x|}{\partial n} |_{\partial\Theta_1} \end{cases}$$

puis de calculer $R_1(e^{-i\lambda|x|}T(\sigma)(x, \lambda))$ sous la forme $e^{-i\lambda\varphi(x)}T_1(\sigma)(x, \lambda)$ en résolvant les équations de transport pour le symbole $T_1(\sigma)$. Enfin pour conclure, il suffit pour calculer $R_2\gamma_2(e^{-i\lambda\varphi(x)}T_1(\sigma)(x, \lambda))$ d'utiliser les résultats de P.Gérard et G. Lebeau.

Si on remplace maintenant l'opérateur $Id - M$ par l'approximation au premier ordre de notre opérateur modèle (c'est à dire qu'on ne garde que le terme obtenu pour $i = 0$) et qu'on le fait agir sur des fonctions de la forme $e^{-i\lambda|x|}\sigma(x, \lambda)$, il est clair que les valeurs de λ pour lesquelles cet opérateur n'est pas inversible sont les valeurs pour lesquelles, on a

$$(3.7) \quad \frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}} Cte = 1$$

et ces racines sont précisément les pseudo-pôles $\lambda_{j,0}$.

Pour montrer que les vrais pôles sont proches des pseudo-pôles, on montre, en utilisant notre théorème de propagation des singularités que le véritable opérateur M est essentiellement une perturbation d'ordre $\left| \frac{e^{-2i\lambda d}}{|\lambda|^{3/2}} \right|$ de l'opérateur modèle. Comme en dehors des pôles, l'inverse de l'opérateur $Id - M$ est d'ordre $1 + \left| \frac{e^{-2i\lambda d}}{|\lambda|^{1/2}} \right|$, on pourra utiliser un argument de perturbation après s'être ramené à la résolution d'un problème de Grushin comme dans [1], pourvu que

$$(3.8) \quad \left| \frac{e^{-4i\lambda d}}{|\lambda|^2} \right| << 1$$

ce qui implique que la première suite de pseudo-pôles donne tous les pôles situés dans l'ensemble

$$(3.9) \quad \Im m \lambda < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \log(|\lambda|)$$

(bien que la perturbation soit en $\frac{1}{\lambda}$, on gagne seulement $\frac{1}{2}$ sur la pente logarithmique).

Enfin, pour décrire tous les pôles sous une courbe logarithmique de pente N , on applique la même méthode, en gardant les N^2 premiers termes de l'opérateur T .

Références

- [1] C. Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. *Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France*, 116, 1988.
- [2] P. Gérard and G. Lebeau. Diffusion d'une onde par un coin. *Journal of the American Mathematical Society*, 2:341–424, 1993.
- [3] M. Ikawa. On the poles of the scattering matrix for two convex obstacles. *Annales de l'Institut Fourier*, 38:113–146, 1988.
- [4] G. Lebeau. propagation des ondes dans les dièdres. *Prépublications de l'université de Paris-Sud*, 1994.
- [5] O. Poisson. *Calculs des pôles associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques en dimension 2*. Thèse de Doctorat, Université Paris IX Dauphine, 1993.