

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. CANNONE

Y. MEYER

F. PLANCHON

## **Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1993-1994), exp. n° 8,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1993-1994\\_\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994__A8_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléx 601.596 F

Séminaire 1993-1994

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### **SOLUTIONS AUTO-SIMILAIRES DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES**

**M. CANNONE, Y. MEYER & F. PLANCHON**



## 1. Introduction et énoncés.

Nous considérons les équations de Navier-Stokes gouvernant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible répandu dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier. On pose  $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_3(x, t))$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\nabla \cdot u = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3$ ;  $u \cdot \nabla$  est l'opérateur différentiel  $u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$  et les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

où  $p = p(x, t)$  est la pression (c'est une fonction scalaire).

On cherche les solutions sous la forme de fonctions (vectorielles) continues sur  $[0, \infty)$  à valeurs dans un espace de Banach  $X$  de fonctions de  $x$ . On demande que  $X$  soit inclus dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  et l'on décide que  $u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u + \dots + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} u$  est défini par  $\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 u) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_3}(u_3 u)$  qui a un sens, au sens des distributions.

Si donc  $u(x, t)$  est une fonction continue de  $t \in [0, \infty)$  à valeurs dans un espace de Banach  $X$  de fonctions de  $x$ , alors  $u(x, 0) = u_0(x)$  a un sens. On peut alors poser le problème de Cauchy associé à (1.1).

Si  $u(x, t)$  est solution de (1.1), il en est de même pour  $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$  pour tout  $\lambda > 0$ . Cette remarque nous conduit à chercher des solutions auto-similaires, définies par  $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = u(x, t)$  pour tout  $\lambda > 0$ . En d'autres termes

$$(1.2) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

où  $U = (U_1, U_2, U_3)$  est un champ de vecteurs à divergence nulle. On peut alors craindre que la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  n'ait aucun sens.

Le point de départ de la définition correcte de  $u(x, 0)$  est la remarque suivante : si, par exemple,  $U(x) = \left(0, \frac{-x_3}{|x|^2+1}, \frac{x_2}{|x|^2+1}\right)$ , alors  $u(x, t) = \left(0, \frac{-x_3}{|x|^2+t}, \frac{x_2}{|x|^2+t}\right)$  qui tend effectivement vers une limite quand  $t$  tend vers 0. Cette limite est  $u_0(x) = \left(0, \frac{-x_3}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}\right)$  et  $U(x)$  est une version "lissée en 0" de  $u_0(x)$ .

Cet exemple est caractéristique.

Si  $u(x, t)$  est une solution auto-similaire et si  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  existe, alors  $u_0(x)$  est nécessairement homogène de degré -1. On aura également  $\nabla \cdot u_0(x) = 0$  (au sens des distributions).

Naturellement on ne peut avoir  $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Il s'agira de trouver des espaces fonctionnels (remplaçant  $L^2$ ) et contenant les fonctions homogènes de degré -1 (et régulières en dehors de 0).

Nous construisons de tels espaces fonctionnels  $E$  et démontrons que, pour toute condition initiale  $u_0(x)$ , homogène de degré -1, vérifiant  $\nabla \cdot u_0 = 0$  et de norme suffisamment petite, il existe une et une seule solution auto-similaire  $u(x, t)$  de (1.1) qui soit continue sur  $[0, \infty)$  à valeurs dans  $E$  (muni d'une topologie "faible" qui sera définie dans un instant).

## 2. Espaces de Banach convenant aux solutions auto-similaires.

Soient  $q = 1, 2$  ou  $4$  et  $m \in \mathbb{N}$ . On désignera par  $E^{q,m} = E$  l'espace de Banach des fonctions de classe  $C^m(\mathbb{R}^3)$  telles que

$$(2.1) \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-q-|\alpha|} \quad \text{si } |\alpha| \leq m .$$

Si  $q = 1$  ou  $q = 2$ , on considérera également l'espace homogène correspondant défini par

$$(2.2) \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq C|x|^{-q-|\alpha|} \quad \text{si } |\alpha| \leq m .$$

Cet espace homogène est noté  $\dot{E}^{q,m}$  (et se compose de fonctions de classe  $C^m$  en dehors de 0).

Les solutions auto-similaires que nous cherchons sont de la forme  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  où  $U$  appartient à  $E^{1,m}$ . Plus précisément on pose  $S(t) = \exp(t\Delta)$  et l'on cherche des solutions de la forme

$$(2.3) \quad u(x, t) = [S(t)u_0](x) + \frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

où  $u_0(x)$  est homogène de degré -1 et appartient à l'espace homogène  $\dot{E}^{1,m}$  tandis que  $w(x)$  appartient à l'espace (non homogène)  $E^{2,m}$ .

On a (Lemme 2 ci-dessous)  $[S(t)u_0](x) = \frac{1}{\sqrt{t}}u_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  où  $u_1 = S(1)u_0$ .

Alors  $S(t)u_0(x)$  est une fonction continue et bornée de  $t \in (0, \infty)$  à valeurs dans l'espace de Banach homogène  $\dot{E}^{1,m}$ . En outre  $S(t)u_0 \rightarrow u_0$ , au sens des distributions, quand  $t$  tend vers 0.

Si l'on se restreint à  $t \in (0, \infty)$ , il vient  $S(t)u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}u_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  où  $u_1 \in E^{1,m}$ . Mais  $S(t)u_0$  n'est pas bornée, au sens de la norme de  $E^{1,m}$ , quand  $t$  tend vers 0.

Considérons le terme d'erreur  $\frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ . Ce terme d'erreur appartient encore à  $L^\infty((0, \infty); \dot{E}^{1,m})$  mais, cette fois,  $\left|\frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right| \leq C \frac{\sqrt{t}}{|x|^2}$  et il en résulte que  $\frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  tend vers 0, au sens des distributions, quand  $t$  tend vers 0.

Pour conclure, nous utiliserons la définition suivante.

Soit  $B$  un espace de Banach fonctionnel (c'est-à-dire  $B$  est inclus dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et cette inclusion est continue). Alors une suite  $f_j$  de vecteurs de  $B$  converge vers  $f \in B$ , au sens "faible-strict", si la suite des normes  $\|f_j\|_B$  est bornée et si  $f_j \rightarrow f$  au sens des distributions.

Ceci étant, on pose  $B = \dot{E}^{1,m}$  (espace homogène) et  $u(x, t)$  tend vers  $u_0(x)$  au sens faible-strict précédemment défini.

### 3. La formulation de T. Kato des équations de Navier-Stokes.

On désigne par  $\mathbb{P} : [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \rightarrow [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$  l'opérateur de projection orthogonale sur les champs de vecteurs à divergence nulle.

Plus précisément, si  $(f, g, h) \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ , on pose

$$(3.1) \quad \sigma = R_1 f + R_2 g + R_3 h$$

où  $R_1 = -i \frac{\partial}{\partial x_1} (-\Delta)^{-1/2}, \dots, R_3 = -i \frac{\partial}{\partial x_3} (-\Delta)^{-1/2}$  sont les transformations de Riesz et l'on a alors

$$(3.2) \quad \mathbb{P}(f, g, h) = (f - R_1 \sigma, g - R_2 \sigma, h - R_3 \sigma).$$

Le noyau de l'opérateur  $\mathbb{P}$  est précisément l'espace vectoriel des fonctions  $\nabla p$  (où  $p$  est une fonction scalaire arbitraire).

Alors T. Kato ([3]) remplace (1.1) par

$$(3.3) \quad u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{P} S(t-s) \nabla u(s) \otimes u(s) ds$$

où  $\nabla u(s) \otimes u(s) = \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1(s)u(s)) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3(s)u(s))$ .

Réciproquement, si  $u(t) = u(x, t)$  est suffisamment régulière en l'ensemble des variables et vérifie (3.3), alors  $u(x, t)$  est une solution des équations de Navier-Stokes.

Nous allons nous concentrer sur (3.3) en cherchant, à l'aide d'un algorithme de point fixe, des solutions auto-similaires. On définit la suite  $u^{(n)} = u^{(n)}(x, t)$  par  $u^{(0)}(x, t) = S(t)u_0(x)$  et

$$(3.4) \quad u^{(n+1)}(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{P} S(t-s) \nabla u^{(n)}(s) \otimes u^{(n)}(s) ds.$$

On bénéficie alors du fait remarquable suivant :

si  $u^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}U^{(n)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ , alors nécessairement  $u^{(n+1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}U^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ .

C'est-à-dire que si  $S(t)u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}u_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  a la structure attendue pour les solutions auto-similaires, l'algorithme de point fixe reste piégé à l'intérieur de cette structure particulière. Si nous réussissons à démontrer la convergence de cet algorithme, la limite sera une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes.

Voici un énoncé précis.

**Théorème 1.**— *Pour tout entier  $m \geq 0$ , il existe deux nombres positifs  $\eta$  et  $\beta$  tels que, pour toute condition initiale  $u_0(x)$  homogène de degré  $-1$  et vérifiant  $\|u_0\|_{\dot{E}^{1,m}} < \eta$ , alors il existe une et une seule solution auto-similaire  $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  de (3.3) telle que  $\|U\|_{E^{1,m}} < \beta$ .*

En outre  $U(x) = S(1)u_0 + w$  où  $w \in E^{2,m}$ .

La preuve du théorème 1 est basée sur quelques lemmes très simples.

#### 4. Quelques lemmes très simples.

**Lemme 1.**— *Si  $q = 1$  ou  $q = 2$ , pour toute fonction  $f$  appartenant à  $\dot{E}^{q,m}$  (espace homogène) et pour toute fonction  $g$  appartenant à  $E^{4,m}$  (espace non homogène), alors le produit de convolution  $f * g$  appartient à  $E^{q,m}$  (espace non homogène).*

La preuve est immédiate et laissée au lecteur.

**Lemme 2.**— *Si  $f(x)$  est une distribution homogène de degré  $-1$ , alors, pour tout  $t > 0$ , on a*

$$[S(t)f](x) = \frac{1}{\sqrt{t}}g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{où} \quad g = S(1)f.$$

On désigne par  $\mathcal{F}$  la transformation de Fourier et l'on écrit  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ . Alors  $\mathcal{F}[S(t)f](\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{f}(\sqrt{t}\xi)t$  puisque  $\widehat{f}$  est homogène de degré  $-2$ . On pose ensuite  $\widehat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)$  et il vient  $[S(t)f](x) = \frac{1}{\sqrt{t}}g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ .

Nous allons démontrer le théorème 1 sous une version scalaire simplifiée où  $u(t)$  est remplacée par une fonction scalaire encore notée  $u$  où  $u \otimes u$  est remplacé par  $u^2$  et finalement où  $\mathbb{P}\nabla$  est remplacé par l'opérateur de Calderón  $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ .

On observera que  $\mathbb{P}\nabla$  est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1, tout comme  $\Lambda$ .

Finalement les équations de Navier-Stokes (3.3) sont remplacées par

$$(4.1) \quad u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\Lambda u^2(s)ds$$

et la méthode de démonstration que nous utiliserons pour résoudre (4.1) conviendra également à (3.3).

On posera désormais

$$(4.2) \quad B(f, g) = \int_0^t S(t-s)\Lambda f(s)g(s)ds$$

où  $f(s) = f(x, s), g(s) = g(x, s)$ .

On a alors (en restant dans le cas scalaire)

**Lemme 3.**— Si  $u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  et  $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ , alors  $B(u, v)(t) = w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ .

En outre, en posant  $f(x) = u(x)v(x)$ , il vient

$$(4.3) \quad \widehat{w}(\xi) = \int_0^1 e^{-(1-\lambda)|\xi|^2} |\xi| \widehat{f}(\sqrt{\lambda} \xi) d\lambda .$$

Pour le vérifier, on passe bien évidemment aux transformées de Fourier. Il vient, si  $W(x, t) = B(u, v)$  et si  $\widehat{W}(\xi, t)$  désigne la transformée partielle (en  $x$ ) de  $W(x, t)$ ,

$$\widehat{W}(\xi, t) = \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} |\xi| \widehat{f}(\sqrt{s} \xi) \sqrt{s} ds .$$

On effectue ensuite le changement de variable  $s = t\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ , et l'on obtient

$$\widehat{W}(\xi, t) = t \int_0^1 e^{-(1-\lambda)t|\xi|^2} \sqrt{t} |\xi| \widehat{f}(\sqrt{\lambda} \sqrt{t} \xi) \sqrt{\lambda} d\lambda = t \widehat{w}(\sqrt{t} \xi)$$

où  $w$  est définie par (4.3).

**Lemme 4.**— Si  $f$  appartient à  $E^{2,m}$ , alors la fonction  $w$  définie par (4.3) appartient aussi à  $E^{2,m}$  et l'opérateur linéaire ainsi défini est continu.

Pour le démontrer, on écrit  $\widehat{w} = \widehat{w}_0 + \widehat{w}_1 = \int_0^{1/2}(\cdots) + \int_{1/2}^1(\cdots)$ .

En ce qui concerne  $w_0$ , on observe que  $|\xi|e^{-|\xi|^2}$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $\Theta(x)$  qui possède les deux propriétés suivantes :  $\Theta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  et  $\Theta(x) = O(|x|^{-4})$  à l'infini. en outre  $\partial^\alpha \Theta(x) = O(|x|^{-4-|\alpha|})$  à l'infini, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^3$ .

Donc  $\Theta$  appartient à  $E^{4,m}$ , pour tout entier  $m$ .

Ensuite on pose  $\Theta_\lambda(x) = (1 - \lambda)^{-3/2} \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda}}\right)$  et  $f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ .

On a alors

$$(4.4) \quad w_0(x) = \int_0^{1/2} \Theta_\lambda * f_\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Puisque  $f$  appartient à  $E^{2,m}$ , la famille  $\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$  est borné dans  $\dot{E}^{2,m}$  et le Lemme 1 nous apprend que les produits de convolution  $\Theta_\lambda * f_\lambda$  sont bornés dans  $E^{2,m}$ . L'intégrale définissant  $w_0(x)$  est donc une intégrale de Bochner usuelle.

Passons à  $w_1$ . On a, cette fois,

$$(4.5) \quad w_1(x) = \int_{1/2}^1 \Theta_\lambda * f_\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Maintenant  $f_\lambda$  appartient à une partie bornée de  $E^{2,m}$ . La fonction  $\Theta(x)$  a une intégrale nulle et les fonctions  $\Theta_\lambda$  sont donc des ondelettes (de largeur  $\sqrt{1-\lambda}$ ). Mais nous oublions cette particularité (intégrale nulle) et retenons seulement l'aspect d'une approximation de l'identité. Finalement,  $\Theta_\lambda * f_\lambda$ ,  $1/2 \leq \lambda \leq 1$ , est une famille bornée dans  $E^{2,m}$  et l'intégrale définissant  $w_1(x)$  est à nouveau une intégrale de Bochner.

## 5. La preuve du théorème 1.

Nous retournons à la formulation donnée par T. Kato des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire à (3.3).

Soient  $f$  et  $g$  deux champs de vecteurs définis sur  $\mathbb{R}^3$ .

On pose alors  $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ , de même pour  $g_t$  et finalement

$$(5.1.) \quad B(f, g) = \int_0^1 \mathbb{P}S(1-t) \nabla f_t \otimes g_t dt.$$

Les coefficients du symbole matriciel de l'opérateur  $\mathbb{P}S(1-t)\nabla$  sont  $\frac{\xi_j \xi_k \xi_l}{|\xi|^2} \exp(-(1-t)|\xi|^2)$  et la preuve du lemme 4 s'adapte immédiatement à ce cas.

Il vient donc

**Lemme 5.**— Pour tout entier  $m$ , il existe une constante  $C_m$  telle que l'on ait, si  $\|\cdot\|_{(1)}$  désigne la norme dans  $E^{1,m}$ , et  $\|\cdot\|_{(2)}$ , celle dans  $E^{2,m}$ ,

$$(5.2) \quad \|B(f, g)\|_{(2)} \leq C_m \|f\|_{(1)} \|g\|_{(1)}.$$

Chercher des solutions auto-similaires revient à résoudre

$$(5.3) \quad f(x) = u_1(x) - B(f, f)(x)$$

où  $u_0(x)$  est la condition initiale et  $u_1 = S(1)u_0$ .

On suppose que  $u_0(x)$  est homogène de degré -1 et que la restriction de  $u_0(x)$  à la sphère unité  $|x| = 1$  appartient à  $C^m(S^2)$  avec une norme ne dépassant pas  $\eta$ .

Alors le schéma itératif défini par

$$(5.4) \quad f^{(n+1)} = u_1(x) - B(f^{(n)}, f^{(n)})$$

où, par exemple,  $f^{(0)} = 0$  converge, au sens de la norme de  $E^{1,m}$ , vers une solution de (5.3).

Le lemme "abstrait" assurant la convergence de l'algorithme est le suivant

**Lemme 6.**— Soit  $X$  un espace de Banach et  $B : X \times X \rightarrow X$  une application bilinéaire telle que,  $\|\cdot\|$  désignant la norme dans  $X$ , on ait, pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in X$ ,

$$(5.5) \quad \|B(x, y)\| \leq \gamma \|x\| \|y\|.$$

Alors, pour tout  $y \in X$  vérifiant  $\|y\| < \frac{1}{4\gamma}$ , l'algorithme itératif défini par  $x^{(0)} = 0$  et  $x^{(n+1)} = y + B(x^{(n)}, x^{(n)})$  converge, au sens de la norme de  $X$ , vers une solution de

$$(5.6) \quad x = y + B(x, x)$$

vérifiant  $\|x\| < \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma\|y\|}}{2\gamma}$ .

En outre, (5.6) possède une unique solution  $x$  vérifiant  $\|x\| < \frac{1}{4\gamma}$  et cette solution est celle fournie par l'algorithme itératif si  $\|y\| < \frac{3}{16\gamma}$ .

Le théorème 1 est donc complètement démontré.

## 6. Retour aux solutions d'énergie finie.

Nous nous proposons de donner une version *locale* du Théorème 1 en partant d'une condition initiale  $u_0(x)$ , d'énergie finie qui soit approximativement homogène de degré -1 en 0.

Voici comment  $u_0(x)$  est définie. On part d'un champ de vecteurs  $U_0(x)$ , de divergence nulle, homogène de degré -1 et de classe  $C^m$  en dehors de 0. On suppose ici  $m \geq 1$ .

Ensuite on définit  $\tilde{u}_0(x) = \varphi(x)U_0(x)$  où  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  est égale à 1 au voisinage de 0.

Enfin on pose  $u_0 = \mathbb{P}(\tilde{u}_0)$ .

**Lemme 7.**— On a  $u_0(x) = \tilde{u}_0(x) + r_0(x)$  où  $r_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

En effet  $\mathbb{P}[\varphi U_0] - \varphi \mathbb{P}(U_0) = \int K(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x))U_0(y)dy$  où  $K(x-y)$  est le noyau-distribution de l'opérateur  $\mathbb{P}$ .

Si  $\varphi = 1$  sur la boule  $|x| \leq r$  ( $r > 0$ ), on distinguera les cas  $|x| \leq r/2$  et  $|x| > r/2$ . Si  $|x| \leq r/2$ , on découpe l'intégrale en  $|y| \leq r$  et  $|y| > r$ . Dans le premier cas,  $\varphi(y) - \varphi(x) = 0$  et dans le second, on majore  $|K(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x))U_0(y)|$  par  $C|x-y|^{-n}|y|^{-1}$ .

Si  $|x| > r/2$ , on découpe de même l'intégrale en  $|y| < r/4$  et en  $|y| > r/4$ , et les majorations sont immédiates.

**Théorème 2.**— Avec les notations précédentes, il existe  $\eta > 0$  et  $T > 0$  tels que si la norme  $C^m$  de  $U_0$  sur la sphère unité ne dépasse pas  $\eta$ , la solution  $u(x, t)$  des équations de Navier-Stokes (au sens de (3.3)) associée à la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  s'écrit

$$(6.1) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) + r(x, t)$$

où  $\frac{1}{\sqrt{t}} U \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$  est la solution auto-similaire associée à la condition initiale  $U_0(x)$  et  $r(x, t) \in L^\infty([0, T]) \times \mathbb{R}^3$ .

On cherchera  $r(x, t)$  en appliquant une méthode de point fixe dans l'espace de Banach  $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3) = X$ . Pour alléger les notations, nous écrirons  $u(t)$  au lieu de  $u(x, t)$ ,  $U(t)$  au lieu de  $\frac{1}{\sqrt{t}} U \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$  et  $r(t)$  au lieu de  $r(x, t)$ .

On cherchera donc  $u(t)$  sous la forme  $r(t) + U(t)$ .

Nous avons alors

$$u(t) = S(t)u_0 + B(u(t), u(t))$$

et

$$U(t) = S(t)U_0 + B(U(t), U(t)).$$

Cela entraîne

$$(6.2) \quad r(t) = S(t)(u_0 - U_0) + B(r(t), U(t)) + B(U(t), r(t)) + B(r(t), r(t)).$$

Mais, grâce au Lemme 7,  $u_0 - U_0 = \rho_0$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Par ailleurs,  $U$  appartient également à  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$  et sa norme  $L^\infty$  tend vers 0 avec celle de  $U_0$  dans  $C(S^2)$ . On utilise alors le lemme (évident) suivant

**Lemme 8.**— Si  $U \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ , alors l'opérateur linéaire défini par  $r(t) \rightarrow B(r(t), U(t))$  est borné dans  $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$  et la norme de cet opérateur ne dépasse pas  $C_0 \|U\|_\infty$  où  $C_0$  ne dépend pas de  $T$ .

En effet, l'opérateur bilinéaire  $B(u(t), v(t))$  est défini par  $\int_0^t \mathbb{P}S(t-s) \nabla(u(s) \otimes v(s)) ds$ . La norme de  $\mathbb{P}S(t-s) \nabla : L^\infty(dx) \rightarrow L^\infty(dx)$  est bornée par  $\frac{C_0}{\sqrt{t-s}}$ .

Dans le cas qui nous intéresse  $u(s)$  est  $U(s)$  dont la norme  $L^\infty$  est  $\frac{1}{\sqrt{s}} \|U\|_\infty$ . Tout se termine par l'observation suivante  $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} = \pi$ .

Par un raisonnement semblable, on établit que  $\|B(r(t), r(t))\| \leq C\sqrt{T} \|r(t)\|^2$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme dans  $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ .

Finalement on est amené à résoudre, par un algorithme de point fixe, l'équation

$$(6.3) \quad x = y + L(x) + B(x, x)$$

où  $L : X \rightarrow X$  est une application linéaire continue, de norme  $\lambda$ , et où  $B : X \times X \rightarrow X$  est une application bilinéaire continue telle que  $\|B(u, v)\| \leq \gamma \|u\| \|v\|$ .

On suppose alors que  $0 \leq \lambda < 1$  et que  $\|y\| < \frac{(1-\lambda)^2}{4\gamma}$ .

Dans ces conditions, l'algorithme de point fixe défini par  $x^{(0)} = 0$ ,  $x^{(n+1)} = y + L(x^{(n)}) + B(x^{(n)}, x^{(n)})$  converge, au sens de la norme de  $X$ , vers une solution  $x$  de (6.3).

Cela suffit à établir la preuve du Théorème 2.

## 7. Généralisation.

Les normes  $\dot{E}^{1,m}$  sont très naturelles pour étudier des fonctions homogènes de degré -1. Mais il y a d'autres choix intéressants. On peut remplacer  $\dot{E}^{1,m}$  par l'espace de Besov homogène  $\dot{B}_3^{0,\infty}(\mathbb{R}^3)$  qui, dans l'analyse de Littlewood-Paley, est défini par  $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j(f)\|_3 < \infty$ . Alors il existe deux constantes positives  $\beta$  et  $\eta$  telles que si  $u_0(x)$  est homogène de degré -1, vérifie  $\operatorname{div} u_0 = 0$  (au sens des distributions) et  $\|u_0\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} < \eta$ , alors il existe une et une seule solution de (3.3) de la forme  $u(t) = S(t)u_0 + \frac{1}{\sqrt{t}}w(\frac{x}{\sqrt{t}})$  où  $w \in L^3(\mathbb{R}^3)$  et  $\|w\|_3 < \beta$ .

Le terme d'erreur, qui est la différence entre l'évolution non-linéaire  $u(t)$  et l'évolution linéaire  $S(t)u_0$  appartient à un espace "plus petit" (à savoir,  $L^3(\mathbb{R}^3)$ ) que celui auquel appartient la condition initiale  $u_0(x)$ . On retrouve une situation déjà rencontrée dans le Théorème 1.

Remarquons que les auteurs de [2] construisent également des solutions auto-similaires dans un cadre fonctionnel différent.

## Références.

- [1] P. FEDERBUSH. *Navier and Stokes meet the wavelet*, Commun. Math. Phys. **155** (1993), 219-248.
- [2] Y. GIGA, T. MIYAKAWA. *Navier-Stokes flow in  $\mathbb{R}^3$  with measures as initial vorticity and Morrey spaces*, Comm. in PDE **14**(5) (1989), 577-618.
- [3] T. KATO. *Strong  $L^p$  solutions of the Navier-Stokes equation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to weak solutions*, Math. Zeit. **187** (1984), 471-480.
- [4] M. TAYLOR. *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. in PDE **17** (1992), 1407-1456.

Marco Cannone  
CEREMADE  
Université de Paris-Dauphine  
75775 Paris Cedex 16

Yves Meyer  
CEREMADE  
Université de Paris-Dauphine  
75775 Paris Cedex 16

Fabrice Planchon  
Centre de Mathématiques  
Ecole Polytechnique  
F-91128 Palaiseau Cedex