Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Zuily

Plongement isométrique de la sphère à courbure non négative dans R^3

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. nº 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A5_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PLONGEMENT ISOMETRIQUE DE LA SPHERE A COURBURE NON NEGATIVE DANS $\mathbf{R}^3$

C. ZUILY

(d'après Hong-Zuily)

Exposé n° V

14 décembre 1993

I Introduction

Un problème classique de la théorie globale des surfaces est celui posé par H. Weyl en 1916 : étant donnée une métrique g sur la sphère S^2 à courbure positive, existe-t-il un plongement isométrique de (S^2, g) dans l'espace Euclidien $\mathbf{R}^3$, dont l'image est convexe ? Dans le cas où la courbure de Gauss est strictement positive (et la métrique assez régulière) cette question a été résolue par l'affirmative et par deux voies différentes. La première, qui a été initiée par Weyl lui-même [W], utilise des techniques d'e.d.p. non linéaires, et c'est à Nirenberg [N] que l'on doit la solution complète du problème. La seconde s'appuie sur des arguments géométriques (approximation par des polyèdres) pour prouver l'existence d'une solution en un sens très faible (Alexandrov [A]), puis sur des e.d.p. pour prouver la régularité (Pogorelov [P], Sabitov [Sa]). Finalement, on dispose aujourd'hui du résultat suivant.

Théorème 1.1.— *Soit (M, g) une surface Riemannienne de classe $C^{k,\alpha}$, ($k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$) à courbure de Gauss strictement positive, homéomorphe à une sphère. Il existe alors un plongement isométrique de (M, g) dans $\mathbf{R}^3$, de classe $C^{k,\alpha}$ dont l'image est une surface strictement convexe. Ce plongement est unique à un déplacement près.*

Sous cette forme, ce résultat est dû à Sabitov [Sa], Nirenberg l'ayant démontré pour des métriques au moins C^4 et Heinz [He1], pour celles qui sont au moins C^3.

Lorsque la courbure est positive, mais peut s'annuler, il existe un résultat général dû à Alexandrov [A] qui concerne les variétés éventuellement peu régulières, par exemple des polyèdres.

Théorème 1.2 (Alexandrov [A]).— *Toute variété de dimension deux à courbure non négative, homéomorphe à une sphère, est isométrique à une surface convexe de $\mathbf{R}^3$.*

Ce résultat, démontré par des méthodes géométriques, ne fournit que des isométries peu régulières. Cependant l'observation suivant ([I]) montre qu'en général il ne faut pas espérer autant de régularité que dans le Théorème 1.1.

Proposition 1.3 ([I]).— *Soit $X : (S^2, g) \to \mathbf{R}^3$ un plongement isométrique de classe C^2 où $g \in C^4$. Supposons que la courbure de Gauss K de g satisfait*

$$K \geq 0 \quad sur \quad S^2 \tag{1.1}$$

(1.2) Il existe $P \in S^2$ tel que $K(P) = 0$ et P est un point critique non dégénéré de K.

Alors si la courbure moyenne H est telle que $H(P) = 0$, on a $X \notin C^3$.

Preuve. Notons $r = d(\cdot, P)$ la distance à P. Grâce à (1.1.) et (1.2), on a au voisinage de P :

$$K \geq C^2 r^2 \tag{1.3}$$

Comme $K \geq 0$, l'image de X borne un corps convexe. Le choix de la normale intérieure montre que l'on a $H \geq 0$, et par conséquent si $H(P) = 0$, H a un minimum en P. Supposons $X \in C^3$, alors $H \in C^1$ et donc $\nabla H(P) = 0$, ce qui implique que $H = 0(r)$. Mais on a toujours l'inégalité $H^2 \geq K$, ce qui contredit (1.3).

L'objet de cet exposé est de décrire la preuve du :

Théorème 1.4 (Hong-Zuily [H-Z]).— *Soit g une métrique C^4 sur S^2 dont la courbure vérifie*

$$K \geq 0 \quad \textit{sur} \quad S^2 \tag{1.4}$$

Il existe un plongement isométrique X de (S^2, g) dans $\mathbf{R}^3$ de classe $C^{1,1}$. De plus X est $C^{3,\alpha}, 0 < \alpha < 1$, dans le complémentaire de $K^{-1}(0)$ (C^∞ si la métrique est C^∞).

Ce théorème a été démontré par Iaia [I] dans le cas où $K^{-1}(0)$ est un point P_0 au voisinage duquel $\Delta_g K$ est positif ou nul.

D'autre part, indépendamment, P. Guan - Y.Y. Li [GL] ont récemment obtenu l'existence d'un plongement $C^{1,1}$, sous l'hypothèse (1.4), mais leur méthode ne leur permet pas démontrer la régularité hors de $K^{-1}(0)$.

Au vu de la Proposition 1.3 il est raisonnable de penser que le plongement X est plus régulier au voisinage des points où $K = 0$ mais $H \neq 0$. C'est encore aujourd'hui un problème ouvert.

Notons enfin que d'après Pogorelov [P] et Sacksteder [S] dans le cadre du théorème 1.4 deux plongements isométriques de classe C^2 sont congruents. Pour les plongements $C^{1,1}$ c'est un problème ouvert.

II Preuve du théorème 1.4

On utilise la méthode de Weyl et Nirenberg. L'observation de base est la suivante.

• Soit Σ une surface convexe de $\mathbf{R}^3$, régulière, à courbure strictement positive localement donnée par $X : U \subset \mathbf{R}^2 \to \Sigma$. Notons $u = (u_1, u_2)$ les coordonnées locales,

$(g_{ij}(u))$, $(\ell_{ij}(u))$ les composantes de la métrique et de la deuxième forme fondamentale de Σ et enfin $G = \det g_{ij}$. Prenons pour origine le centre de la plus grande boule pouvant être inscrite dans le convexe bordé par Σ et posons

$$\rho(u) = -\frac{1}{2}\|X(u)\|^2 \tag{2.1}$$

où, $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne de $\mathbf{R}^3$. Alors ρ vérifie l'équation

$$\det(\nabla_{ij}\rho + g_{ij}) = K.G.(-2\rho - \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\nabla_i\rho\nabla_j\rho) \tag{2.2}$$

Remarquons que chaque composante de X vérifie une équation voisine de (2.2) mais l'avantage de cette dernière est que la quantité $-2\rho - \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\nabla i\rho\nabla_j\rho$ a une interprétation géométrique simple. Elle représente le carré de la distance de l'origine au plan tangent à Σ au point $X(u)$.

• On approxime ensuite la métrique g par des métriques C^∞ à courbure strictement positives

Lemme 2.1.— *Soit g une métrique C^4 sur S^2 dont la courbure K est non négative. Il existe une suite (g_ε) de métriques C^∞ de courbure K_ε telle que*

a) g_ε converge vers g dans C^4,

b) K_ε converge vers K dans C^2,

c) $K_\varepsilon > 0$ sur S^2 pour ε assez petit.

Preuve : Soit $F = \{P \in S^2 : K(P) = 0\}$. On peut supposer $F \neq \phi$ sinon le théorème 1.4. résulte du Th.1.1. Ensuite d'après le théorème de Gauss-Bonnet $F \neq S^2$. Soient $\sigma_1 \subset \sigma_2$ deux ouverts de S^2 contenus dans $S^2 \setminus F$ et $\theta \in C^\infty(S^2), 0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ sur $\sigma_1, \theta = 0$ sur $S^2 \setminus \sigma_2$. On prend alors

$$\tilde{g}_\varepsilon = e^{2\varepsilon v} g \tag{2.3}$$

où v est une solution C^∞ de

$$\Delta_g v = \theta - \frac{1}{|S^2|g} \int_{(S^2,g)} \theta(\omega) d\omega \tag{2.4}$$

dont la métrique $\tilde{K}_\varepsilon$ est donnée par

$$e^{2\varepsilon v}\tilde{K}_\varepsilon = K - \varepsilon\Delta v \ . \tag{2.5}$$

On vérifie facilement que $\tilde{K}_\varepsilon > 0$ sur S^2 puis à ε fixé on approche, dans C^4, $\tilde{g}_\varepsilon$ par une suite $(g_{\varepsilon n})$ de métriques C^∞ à courbures strictement positives grâce à la technique de régularisation de Green et Wu [GW].

• La variété (S^2, g_ε) ayant une courbure K_ε strictement positive, il résulte du théorème 1.1 que l'on peut trouver un plongement isométrique C^∞ $X_\varepsilon : (S^2, g_\varepsilon) \to \mathbf{R}^3$ tel que, $\Sigma_\varepsilon = X_\varepsilon(S^2)$ soit une surface bordant un ensemble strictement convexe de $\mathbf{R}^3$.

L'objectif est de trouver des bornes uniformes de la norme C^2 de X_ε. On en déduira, après extraction de sous suite, que (X_ε) converge dans $C^{1,\alpha}$, pour tout $\alpha < 1$, vers un plongement isométrique $X \in C^{1,1}$ de (S^2, g) dans $\mathbf{R}^3$.

A. Bornes C^0 de X_ε :

Quitte à translater X_ε par une constante, ce qui ne change pas les dérivées de X_ε, on peut supposer que l'origine est le centre de la plus grande boule que l'on peut inscrire dans l'ensemble convexe bordé par Σ_ε. Alors

$$(2.6) \qquad |X_\varepsilon(P)| \leq \quad \text{diametre} \quad (S^2, g_\varepsilon) \leq \max_{S^2} e^{2\varepsilon v} \quad \text{diam} \quad (S^2, g) \leq C_0$$

B. Bornes C^1 de X_ε :

On a

$$\langle \nabla_i X_\varepsilon, \nabla_j X_\varepsilon \rangle = g_{\varepsilon ij} = e^{2\varepsilon v} g_{ij} \quad \text{donc}$$

$$(2.7) \qquad |\nabla_g X_\varepsilon(P)|_g^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle \nabla_i X_\varepsilon, \nabla_j X_\varepsilon \rangle = e^{2\varepsilon v} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} g_{ij} \leq 2 \max_{S^2} e^{2\varepsilon v} \leq C_1$$

C. Bornes C^2 de X_ε :

Les bornes C^1 étant établies nous allons montrer que l'on peut inscrire une boule de rayon r_ε à l'intérieur de Σ_ε avec $r_\varepsilon \geq r_0 > 0$.

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 2.2 (Cheng-Yau [CY]).—

Soit Σ une surface compacte connexe dans $\mathbf{R}^3$ de courbure K définie sur S^2. Il existe un nombre $r > 0$, qui dépend uniquement d'une borne supérieure de $\int_{S^2} \frac{d\omega}{K(\omega)}$ et d'une borne inférieure de $\inf_{u \in S^2} \int \max(0, < u, \omega >) \frac{d\omega}{K(\omega)}$, tel que l'on puisse inscrire une boule de rayon r à l'intérieur du convexe borné par Σ.

Appliquons ce lemme à Σ_ε.

Comme $K_\varepsilon = e^{-2\varepsilon v}(K - \varepsilon\Delta v)$ on a $0 < K_\varepsilon \leq A$ où A est indépendant de ε, par conséquent

$$\int_{S^2} \max(0, < u, \omega >) \frac{d\omega}{K_\varepsilon(\omega)} \geq \frac{1}{A} \int_{S^2} \max(0, < u, \omega >) d\omega = \frac{2\pi}{A}$$

Ensuite comme $\Sigma_\varepsilon \to S^2$, $x \mapsto n(x)$, où n est la normale en x à Σ_ε, est un difféomorphisme global on a

$$\int_{S^2} \frac{d\omega}{K_\varepsilon(\omega)} = \int_{\Sigma_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon = \int_{(S^2, g_0)} e^{2\varepsilon v} d\sigma_0 \leq \sup_{\substack{0<\varepsilon<1 \\ p \in S^2}} e^{2\varepsilon v(p)} \quad \text{aire} \quad (S^2 . g_0)$$

On déduit du lemme 2.2, puisque $-2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon}$ est la distance de l'origine au plan tangent à Σ_ε au point P que la fonction ρ_ε définie en (2.1) vérifie :

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} \det(\nabla_{ij}\rho_\varepsilon + g_{\varepsilon ij}) = K_\varepsilon G_\varepsilon(-2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon}) \\ -2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon} \geq r_0^2 > 0 \end{cases}$$

On considère la fonction C^∞ sur S^2 définie par

$$\text{(2.9)} \qquad w_\varepsilon = \Delta_{g_\varepsilon}\rho_\varepsilon \cdot \quad \exp \quad \left(\frac{\lambda}{2}|\nabla\rho_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon}\right)$$

où λ est une constante réelle satisfaisant

$$\text{(2.10)} \qquad \lambda C_0^2 \leq \frac{1}{4}$$

où C_0 est définie en (2.6). Posons d'autre part (en supprimant l'indice ε) :

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} F(z_{ij}) = \det z_{ij} \ , \ z_{ij} = \nabla_{ij}\rho + g_{ij} \ , \\ f = KG(-2\rho - |\nabla\rho|^2_g), \\ F^{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial z_{ij}} \ , \ F^{ijpq} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_{ij}\partial z_{pq}} \ , \\ L = \Sigma F^{ij}\nabla_j\nabla_i \ . \end{cases}$$

En dérivant deux fois l'équation (2.8) et en utilisant les formules de Ricci on obtient (en utilisant la convention de sommation d'Einstein)

$$\text{(2.12)} \qquad Lw = e^{\frac{\lambda}{2}|\nabla\rho|^2}[L\Delta\rho + 2\lambda F^{ij}(\Delta\rho)_i g^{K\ell}\rho_{kj}\rho_\ell + \Delta\rho[\lambda g^{K\ell} f_k \rho_\ell$$

$$+\lambda g^{k\ell} F^{ij} R^m_{k_{ij}} \rho_m \rho_\ell + \lambda F^{ij} g^{k\ell} \rho_{ki}\rho_{\ell j} + \lambda^2 F^{ij} g^{k\ell} g^{pq} \rho_{ki}\rho_\ell \rho_{pj}\rho_q]]$$

avec

$$L\Delta\rho = \Delta f - g^{k\ell}F^{ijpq}p_{ijk}\rho_{pq\ell} - g^{k\ell}\psi_{k\ell} \tag{2.13}$$

où les $\psi_{k\ell}$ sont des restes.

Dans ce qui précède on a enlevé l'indice ε gardant en mémoire que toutes les estimations doivent être indépendantes de ε. On notera donc $0(1)$ une quantité bornée indépendamment de ε.

On montre facilement en le calculant et en utilisant les estimations C^1 que

$$\Delta f = -2KGg^{ij}(\Delta\rho)_i\rho_j - 2KG(\Delta\rho)^2 + 0(1) + 0(1)\Delta\rho \tag{2.14}$$

Soit p un point où w atteint son maximum sur S^2. Si avec les notations de (2.6) on a

$$K(p)C_0^2 \geq \frac{1}{16} \tag{2.15}$$

on utilise une estimation "elliptique due à Heinz [He2] qui montre que les dérivées d'ordre deux de X sont uniformément bornées au voisinage de p et donc que $\sup_{S^2} w$ est uniformément borné ce qui donne une borne uniforme sur S^2 de $\Delta\rho$. On peut donc supposer que

$$K(p)C_0^2 < \frac{1}{16}\,. \tag{2.16}$$

On utilise un système de coordonnées normales centrées en p. On a donc

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}\ ,\ G(p) = 1\ ,\ \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \tag{2.17}$$

Ensuite comme l'équation (2.8) est invariante par rotation on peut supposer que

$$\rho_{12}(p) = 0 \tag{2.18}$$

ce qui entraîne que

$$F^{12} = 0 \quad \text{au point} \quad p\,. \tag{2.19}$$

D'autre part puisqu'en p w est maximum on a en p :

$$(\Delta\rho)_i = -\lambda\rho_i\rho_{ii}\Delta\rho\ ,\ i = 1,2\,. \tag{2.20}$$

Il est alors facile de voir que le second terme du membre de droite de (2.13) peut s'écrire

$$-g^{k\ell}F^{ijpq}\rho_{ijk}\rho_{pq\ell} = 2\sum_{K=1}^{2}(\rho_{12k}^2 - \rho_{11k}\rho_{22k}) \tag{2.21}$$

et par conséquent

(2.22) $$e^{-\frac{1}{2}\lambda|\nabla\rho|^2} Lw = 2\sum_{K=1}^{2}(\rho_{12k}^2 \underset{1)}{-} \rho_{11k}\rho_{22k}) - 2Kg^{ii}(\underset{2)}{\Delta}\rho)_i\rho_i$$

$$-2K(\underset{3)}{\Delta}\rho)^2 - g^{kk}\,{}_{4)}\,\psi_{kk} + 2\lambda F^{ii}(\Delta \underset{5)}{\rho})_i\rho_{ii}\rho_i + \lambda g^{ii} f_i \rho_i \underset{6)}{\Delta}\rho + \lambda F^{ii}\rho_{ii}^2 \underset{7)}{\Delta}\rho$$

$$+\lambda^2 F^{ii}\rho_{ii}^2\,{}_{8)}\,\rho_i^2\Delta\rho + 0(1) + 0(1)\Delta\rho\ .$$

On montre que

(2.23) $$\begin{cases} 4) = 2K(\Delta\rho)^2 + 0(1) + 0(1)\Delta\rho \\ 2) + 6) = 0(1)\lambda\Delta\rho \\ 5) + 8) \geq -\lambda^2(1+f)|\nabla\rho|^2(\Delta\rho)^2 + 0(1)\lambda^2\Delta\rho \\ 7) = \lambda(1+f)(\Delta\rho)^2 + \lambda 0(1)\Delta\rho \end{cases}$$

Il ne reste que le terme 1). On observe que si en p on a

(2.24) $$\Delta\rho + 2 \leq \max(1, \sqrt{8f})$$

on a terminé car le membre de droite est uniformément borné. On peut donc supposer qu'en p on a :

(2.25) $$\Delta\rho + 2 \geq \max(1, \sqrt{8f})$$

ceci entraîne

(2.28) $$(\rho_{11} - \rho_{22})^2 = (\Delta\rho)^2 - 4\rho_{11}\rho_{22} = (\Delta\rho + 2)^2 - 4f \geq \frac{1}{2}(\Delta\rho+2)^2 \geq \frac{1}{2}$$

On dérive l'équation (2.8) par rapport à ∇_k ce qui donne en p,

(2.29) $$\begin{cases} F^{11}\rho_{11k} + F^{22}\rho_{22k} = f_k \\ \rho_{11k} + \rho_{22k} = (\Delta\rho)_k \end{cases}$$

d'où l'on tire

(2.30) $$\begin{cases} \rho_{11k} = \dfrac{f_k - F^{22}(\Delta\rho)_k}{\rho_{22} - \rho_{11}} \\ \rho_{22k} = \dfrac{f_k - F^{11}(\Delta\rho)_k}{\rho_{11} - \rho_{22}} \end{cases}$$

Ces formules permettent alors de traiter le terme 1) et de montrer :

(2.31) $$1) \geq -8\lambda K|\nabla\rho|^2(\Delta\rho)^2 + 0(1)\lambda\Delta\rho + 0(1)\lambda$$

Utilisant (2.22), (2.23) et (2.31) on obtient

$$\text{(2.32)} \qquad \exp(\cdots)Lw \geq \lambda(\Delta\rho)^2[(1-\lambda|\nabla\rho|^2)(1+f) - 8K|\nabla\rho|^2] + 0(1)\lambda\Delta\rho$$

Comme $|\nabla\rho|^2 \leq -2\rho = \|X\|^2 \leq C_0^2$ il résulte des choix faits en (2.10) et (2.16) que

$$\text{(2.34)} \qquad \exp()Lw \geq \frac{1}{4}\lambda(\Delta\rho)^2 + 0(1)\lambda\Delta\rho$$

Mais L étant elliptique, au point p où w est maximum, on a $Lw \leq 0$ ce qui termine la preuve de l'uniforme majoration de $\Delta\rho_\varepsilon$ sur S^2. Il est facile d'en déduire la majoration des dérivées secondes de X_ε. En effet on sait que

$$\Delta\rho_\varepsilon + 2 = 2H_\varepsilon\sqrt{-2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|^2} \geq 2H_\varepsilon r_0$$

ce qui donne une borne uniforme de la courbure moyenne. D'autre part

$$\langle \Delta X_\varepsilon, \Delta X_\varepsilon \rangle = 4H_\varepsilon^2$$

d'où $\|\Delta X_\varepsilon\|_{\mathbf{R}^3} \leq M_0$. On en déduit facilement une borne uniforme de la norme C^2 de X_ε. CQFD.

La régularité d'ordre supérieure de X_ε vient du fait que grâce à (2.8) l'équation est elliptique en dehors de $K^{-1}(0)$.

Références :

[A] A.D. Alexandroff : *Intrinsic geometry of convex surfaces*, OGIZ Moscow, 1948.

[CY] S.S. Cheng, S.T. Yau : *On the regularity of the n-dimensional Minkowski problem*, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 495-516.

[GL] P. Guan, Y.Y. Li : *On Weyl problem with non negative Gauss curvature.* (preprint).

[GW] R.E. Greene, H. Wu : *C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta Math. 137 (1976), 209-245.

[He1] E. Heinz : *Neue a-priori-Abschätzungen...*, Math. Zeitsch. 74 (1960), 129-157.

[He2] E. Heinz : *On Weyl's embedding problem*, J. Math. Mech., 11 (1962), 421-454.

[Ho] J. Hong : *Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations*, Math. Zeitsch. 209 (1992), 289-308.

[I] J. Iaia : *Isometric embeddings of surfaces with non negative curvature in $\mathbf{R}^3$*, Duke Math. Journ. 67 (2), (1992), 423-459.

[N] L. Nirenberg : *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337-394.

[P] A.V. Pogorelov : *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Transl. Math. Monogr., Vol 35, Providence, RI : Am. Math. Soc. 1973.

[S] R. Sacksteder : *The rigidity of hypersurfaces*, J. Math. Mech. 11 (1962), 929-939.

[Sa] Sabitov : *Regularity of convex surfaces with a metric that is regular in Hölder classes.* Sib. Mat. J., 17 (1977), 681-687.

[W] H. Weyl : *Über die Bestimmung einer geschlossen convex...*, Vierteljahrschrift Naturforsch. Gesell, (Zürich), 61 (1916), 40-72.

C. Zuily

Université Paris XI

Département de Mathématiques

Bât. 425

91405 Orsay Cedex