O. Rey

Le rôle de la frontière dans un problème elliptique avec non-linéarité critique et conditions au bord de Neumann

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 23, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A24_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LE RÔLE DE LA FRONTIERE DANS UN PROBLEME ELLIPTIQUE AVEC NON-LINEARITE CRITIQUE ET CONDITIONS AU BORD DE NEUMANN

O. REY

Exposé n° XXIII

26 avril 1994

1. Introduction et résultats

Aussi bien la modélisation de phénomènes de chimiotactisme [12] que l'étude de systèmes activateur-inhibiteur [16] en biologie, conduisent, sous des hypothèses raisonables, à identifier les états d'équilibre avec les solutions de problèmes elliptiques non-linéaires de la forme :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + \mu u &= u^p, \ u > 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad\quad\quad\quad\ \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où μ est une constante strictement positive, $p \in]1, +\infty[$, et Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Dans les cas $n = 1, 2$, ou bien $n \geq 3$ et $p < \frac{n+2}{n-2}$, les méthodes variationnelles standards s'appliquent : il a ainsi été prouvé, sous ces conditions, que le problème n'admet que les solutions constantes pour μ assez petit, tandis qu'il existe au moins une solution non constante pour μ assez grand [13] [14]. On conjectura alors que cette situation était en réalité plus générale : tandis que pour le problème avec conditions au bord de Dirichlet, l'exposant p joue un rôle crucial, μ serait ici le paramètre le plus significatif pour décider de l'existence ou de la non-existence de solutions non triviales. Cependant, en prouvant que dans les cas $n = 4, 5, 6, p = \frac{n+2}{n-2}$, et Ω une boule, le problème admettait une solution non-constante pour tout $\mu > 0$, Adimurthi et Yadava [2] (voir aussi [10]) ont montré que la configuration dans le cas critique était bel et bien différente, indépendamment même des arguments utilisés qui doivent de toute façon être modifiés par rapport aux cas sous-critiques. Pour Ω quelconque, Adimurthi et Mancini [1] (voir aussi [19]) ont prouvé que si $p = \frac{n+2}{n-2} (n \geq 3)$, (1) admet toujours une solution pour μ assez grand. Ils utilisent pour ce faire la même méthode que Brezis et Nirenberg dans [9], qui consiste, par un choix adéquat de fonctions-tests, à montrer que le minimum de la fonctionnelle étudiée se situe en-dessous du premier niveau auquel les phénomènes de non-compacité apparaissent. Ainsi, toute suite minimisante (à une sous-suite près) converge vers une solution du problème. Les fonctions-test considérées sont ici les restrictions à Ω des solutions du problème

$$\text{(2)} \qquad -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}, u > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

qui, avec les hypothèses supplémentaires $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, s'écrivent toutes sous la forme

$$\text{(3)} \qquad U_{\lambda,y}(x) = \frac{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}{(1 + \lambda^2 |x-y|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \ ; \ \lambda > 0, y \in \mathbb{R}^n$$

à la constante multiplicative près $\bar{\alpha} = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}}$. Ces solutions sont ensuite concentrées en un point $y \in \partial\Omega$ tel que $H(y) > 0$, où H désigne la courbure moyenne du bord. Si l'on définit, pour $u \in H^1(\Omega)$,

$$\text{(4)} \qquad J_\mu(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu \int_\Omega u^2}{(\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}}$$

- fonctionnelle dont les points critiques positifs sont, à une constante multiplicative près, solutions de (1) - , et si l'on pose

$$S = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \tag{5}$$

- constante de Sobolev, qui ne dépend que de n - , on obtient ([1 , Lemma 2.2])

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J_\mu(u) < \frac{S}{2^{2/n}} \text{ pour } \mu \text{ assez grand .} \tag{6}$$

Comme, d'un autre côté, J_μ satisfait la condition de Palais-Smale en dessous du niveau $S/2^{2/n}$, l'existence d'une solution non-triviale s'ensuit.

Un certain nombre de résultats supplémentaires ont été obtenus quant à une caractérisation plus précise des solutions u de (1) telles que $J_\mu(u) < \frac{S}{2^{2/n}}$. Adimurthi, Pacella et Yadava ont montré [4] qu'une telle solution atteignait son maximum en un point unique $y_\mu \in \partial\Omega$; de plus, si la solution est minimisante et $n \geq 7$, les points d'accumulation de (y_μ) quand $\mu \to +\infty$ réalisent la maximum de la courbure moyenne H du bord. Ils ont ensuite prouvé [5] que plus généralement, toujours pour $n \geq 7$, les points d'accumulation (y_μ) étaient des points critiques de H. Ces résultats admettent une réciproque partielle : il est d'abord établi [4] que pour $n \geq 7$ et $y_0 \in \partial\Omega$ maximum local strict de $H, H(y_0) > 0$, il existe pour μ assez grand une solution u_μ de (1) qui se concentre en y_0 quand $\mu \to +\infty$. De plus, Adimurthi, Mancini et Yadava ont montré [3] que le même résultat était valable sous les hypothèses $n \geq 6$ et $y_0 \in \partial\Omega$ point critique non-dégénéré de H, $H(y_0) > 0$.

Le but du présent travail est de reprendre l'étude du problème en lui appliquant des techniques développées antérieurement dans le cadre de conditions au bord de Dirichlet (voir par exemple [17] [8]), ce qui nous permet d'améliorer et d'étendre substantiellement les résultats précédents. Cette stragégie permet de démontrer :

Théorème 1.— *On suppose* $n \geq 4$.

a) *Soit* u_μ *une solution de (1) telle que* $J_\mu(u_\mu) < \frac{S}{2^{2/n}}$. *Soit* $y_0 \in \partial\Omega$ *le point en lequel (à une sous-suite près)* u_μ *se concentre quand* $\mu \to +\infty$ *(au sens* $|\nabla u_\mu|^2 \rightharpoonup \frac{S^{n/2}}{2}\delta_{y_0}$ *;* y_0 *est aussi la limite des points* y_μ *en lesquels* u_μ *atteint son maximum). Alors,* $H(y_0) > 0$ *et* y_0 *est un point critique de* H.

b) *Soit* $y_0 \in \partial\Omega$ *un point critique non-dégénéré de* H, *tel que* $H(y_0) > 0$. *Alors, pour* μ *assez grand, (1) admet une solution* u_μ *qui se concentre (au sens précédent) en* y_0 *quand* $\mu \to +\infty$.

En fait, l'hypothèse de non-dégénérescence peut-être affaiblie. Si l'on note

$$H^c = \{y \in \partial\Omega / H(y) < c\} \tag{7}$$

les ensembles de niveaux de H, on a

Théorème 2.— *Supposons $n \geq 4$, et soit $c > 0$ une valeur critique de H telle que la topologie relative $(H^{c+\delta}, H^{c-\delta})$ est non-triviale (pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit). A chaque générateur de cette topologie relative on peut associer une solution distincte u_μ de (1) qui se concentre quand $\mu \to +\infty$ en un point y_0 tel que $H(y_0) = c, H'(y_0) = 0$*

Il s'avère ensuite que les solutions se concentrant en un point peuvent être superposées, ce qui permet d'obtenir :

Théorème 3.— *Supposons $n \geq 4$, et soit $y_1, \cdots, y_k$ k points critiques non-dégénérés distincts de H sur $\partial\Omega$, tels que $H(y_i) > 0, \forall i$. Alors, il existe pour μ assez grand une solution u_μ de (1) qui se concentre en $y_1, \cdots, y_k$ quand $\mu \to +\infty$ (au sens $|\nabla u_\mu|^2 \rightharpoonup \frac{S^{n/2}}{2} \sum_{i=1}^{k} \delta_{y_i}$).*

Bien entendu, il est aussi possible de démontrer que si u_μ est une solution de (1) qui se concentre en k points y_i distincts de $\partial\Omega$ quand $\mu \to +\infty$, ces points vérifient $H(y_i) > 0, H'(y_i) = 0$. Le théorème 3 permet d'énoncer des résultats de multiplicité, en relation avec le nombre de points critiques de H sur l'ensemble

$$H^+ = \{y \in \partial\Omega / H(y) > 0\} \tag{8}$$

Théorème 4.— *Supposons $n \geq 4$, et l'existence de k points critiques non-dégénérés de H sur H^+. Alors (1) admet pour μ assez grand au moins $2^k - 1$ solutions.*

La condition de non-dégénérescence qui intervient dans le Théorème 3 peut être affaiblie de la même manière que précédemment, d'où des résultats de multiplicité en relation avec la topologie relative entre les ensembles de niveau H. En particulier, on a :

Théorème 5.— *Supposons $n \geq 4$. (1) admet pour μ assez grand au moins $2^{\text{cat }(H^+)}$ -1 solutions (où cat (H^+) désigne la catégorie de Ljusternik-Schnirelman de H^+).*

2. Démonstration des théorèmes

La démonstration complète des résultats annoncés nécessite un grand nombre d'estimées très précises qu'il est impossible de faire figurer ici. On se contentera donc d'esquisser les grandes lignes de la preuve, et pour davantage de détails on se reportera à [18]. Dans la suite, on suppose toujours $n \geq 4$ et $p = \frac{n+2}{n-2}$.

2.1. Paramétrisation du problème

Pour $k \in \mathbb{N}^*, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k, \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^k, y = (y_1, \cdots, y_k) \in (\partial\Omega)^k$, on pose

$$\varphi(\alpha, \lambda, y) = \varphi_{\alpha,\lambda,y} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i \tag{9}$$

où $U_i = U_{\lambda_i, y_i}$ et U_{λ_i, y_i} est définie par (3). En procédant comme dans [7], avec les modifications nécessaires, on démontre, pour $d > 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ assez petit, l'existence d'un difféomorphisme entre

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon,d} = \{(\alpha, \lambda, y, v) \in \mathbb{R}_+^k \times (\mathbb{R}_+^*)^k \times (\partial\Omega)^k \times H^1(\Omega) / |\alpha_i - \bar{\alpha}| < \varepsilon \ , \\ \lambda_i > \frac{1}{\varepsilon}, \forall i \ ; \ |y_i - y_j| > d, \forall i, j, i \neq j \ ; \ v \in E_{\lambda,y}, |\nabla v|_2 < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{10}$$

et l'ouvert de $H^1(\Omega)$

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(\Omega) / \exists (\alpha, \lambda, y, v) \in M_{\varepsilon,d}, u = \varphi_{\alpha,\lambda,y} + v\}$$

Ici, $E_{\lambda,y}$ désigne l'ensemble

$$\begin{aligned} E_{\lambda,y} = \{v \in H^1(\Omega) / \phi_i(\alpha, \lambda, y, v) = \psi_i(\alpha, \lambda, y, v) = \xi_{ij}(\alpha, \lambda, y, v) = 0 \ , \\ \forall i, \ 1 \leq i \leq k \ \forall_j, \ 1 \leq j \leq n\} \end{aligned} \tag{11}$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \lambda, y, v) &= \int_\Omega \nabla v . \nabla U_i \\ \psi_i(\alpha, \lambda, y, v) &= \int_\Omega \nabla v . \nabla \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} \\ \xi_{ij}(\alpha, \lambda, y, v) &= \int_\Omega \nabla v . \nabla \frac{\partial U_i}{\partial (y_i)_j} \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Si l'on note maintenant K_μ la fonctionnelle définie sur $M = M_{\varepsilon,d}$

$$\begin{aligned} K_\mu \ : \ M &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \lambda, y, v) &\mapsto J_\mu(\varphi_{\alpha,\lambda,y} + v) \end{aligned} \tag{13}$$

(α, λ, y, v) sera un point critique de K_μ sur M si et seulement si $u = \varphi_{\alpha,\lambda,y} + v$ est un point critique de J_μ sur $H^1(\Omega)$. On est donc ramené à la recherche de $(\alpha, \lambda, y, v) \in M$ vérifiant

$$K'_\mu = \sum_{i=1}^{k} (A_i \phi'_i + B_i \psi'_i + \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \xi'_{ij}) \tag{14}$$

où $A = (A_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k, B = (B_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k, C = (C_{ij})_{\substack{i \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{nk}$ sont des multiplicateurs de Lagrange. Tous les résultats annoncés vont résulter d'une analyse précise de (14).

2.2. Le paramètre v

On commence par s'intéresser à la dérivée de K_μ par rapport à v. On suppose à partir de maintenant que λ satsifait

$$\mu < \kappa_n \lambda_i \text{ si } n \geq 5 \; ; \; \mu < \kappa_4 \frac{\lambda_i}{\operatorname{Log} \lambda_i} \text{ si } n = 4 \qquad \forall i, \; 1 \leq i \leq k \tag{15}$$

où les κ_n sont des constantes strictement positives qui dépendent seulement de n, qui seront déterminées ultérieurement.

Si l'on développe $K_\mu(\alpha, \lambda, y, v)$ par rapport à v dans un voisinage de 0, on trouve

$$K_\mu(\alpha, \lambda, y, v) = K_\mu(\alpha, \lambda, y, 0) + f_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) + Q_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) + R_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v)$$

avec

$$f_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) = \frac{2}{(\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^{p+1})^{\frac{2}{p+1}}} [\mu \int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y} v - \ell_\mu(\varphi_{\alpha,\lambda,y}) \int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^p v]$$

$$Q_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) = \frac{1}{(\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^{p+1})^{\frac{2}{p+1}}} \Bigg[\int_\Omega |\nabla v|^2 + \mu \int_\Omega v^2 - p\ell_\mu(\varphi_{\alpha,\lambda,y}) \int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^{p-1} v^2$$

$$- \frac{4\mu}{\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^{p+1}} (\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y} v)(\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^p v) + 2\frac{p+3}{\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^{p+1}} \ell_\mu(\varphi_{\alpha,\lambda,y})(\int_\Omega \varphi_{\alpha,\lambda,y}^p v)^2 \Bigg]$$

$$R_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) = 0(||v||^{\min(3,p+1)})$$

où

$$\ell_\mu(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu \int_\Omega u^2}{\int_\Omega |u|^{p+1}}$$

et

$$||v||^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \mu \int_\Omega v^2 \; .$$

De plus, les dérivées de $R_{\mu,\alpha,\lambda,y}$ vérifient

$$R'_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) = 0(||v||^{\min(2,p)}) \; ; \; R''_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) = 0(||v||^{\min(1,p-1)})$$

uniformément par rapport à μ, α, λ, y.

On dispose alors de la proposition fondamentale suivante :

Proposition 1.— *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tous $\mu, \alpha, \lambda, y, (\alpha, \lambda, y, 0) \in M, \mu$ assez grand et λ satisfaisant (15)*

$$Q_{\mu,\alpha,\lambda,y}(v) \geq \rho ||v||^2 \qquad \forall v \in E_{\lambda,y}$$

Cette proposition, dans le cadre du problème correspondant de Dirichlet, est établie dans [6] [17]. Elle est ensuite adaptée au cas présent, pour $k = 1$, dans [4]. En combinant une nouvelle fois les arguments de [6] et de [4], on obtient le résultat pour k quelconque dans $\mathbb{N}^*$

Comme d'autre part la norme de $f_{\mu,\alpha,\lambda,y}$ en tant que forme linéaire sur $H^1(\Omega)$ muni de la norme $||\cdot||$ tend vers zéro quand μ tend vers l'infini - λ vérifiant (15) - le théorème d'inversion locale nous permet d'établir :

Proposition 2.— *Il existe $\mu_0 > 0$ et une application régulière qui à tout $(\mu, \alpha, \lambda, y)$ tel que $\mu > \mu_0, (\alpha, \lambda, y, 0) \in M$ et λ vérifie (15), associe $\bar{v} \in E_{\lambda,y}$ tel que*

$$\frac{\partial K_\mu}{\partial v} = \sum_{i=1}^{k} \left(A_i \frac{\partial \phi_i}{\partial v} + B_i \frac{\partial \psi_i}{\partial v} + \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial v} \right) \tag{16}$$

De plus, il existe $\nu_0 > 0$, indépendant de μ, α, λ, y tel qu'un $\bar{v}$ vérifiant les conditions précédentes soit unique dans l'ensemble $\{v \in E_{\lambda,y} / |v|_{H^1} < \nu_0\}$.

On a enfin l'estimation suivante :

$$|\bar{v}|_{H^1} = 0\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ si } n \geq 7 \tag{17}$$

et des expressions similaires pour les cas $n = 4, 5, 6$.

Remarque : les estimées de $|\bar{v}|_{H^1}$ pour les cas $n = 4, 5, 6$ ne s'obtiennent pas directement. Il est nécessaire pour aboutir au résultat de décomposer v sous la forme $v = \zeta v + (1 - \zeta)v$, où ζ est une fonction régulière valant 1 près de y et 0 en dehors d'un voisinage de ce point, et d'estimer chaque partie séparément - pour plus de précisions, voir [18].

En multipliant (16) par U_i, $\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i}$, $\frac{\partial U_i}{\partial (y_i)_j}$ respectivement et en intégrant sur Ω, on obtient un système linéaire quasi-diagonal (les fonctions U_i, $\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i}$, $\frac{\partial U_i}{\partial (y_i)_j}$ sont quasi orthogonales) dont la résolution fournit des estimées précises pour les coefficients A_i, B_i, C_{ij}. Nous sommes alors en mesure d'étudier les $(2n+2)k$ équations restantes, faisant intervenir les dérivées de K_μ par rapport à α, λ et y.

2.3. Les paramètres α, λ, y

Pour simplifier - le cas général étant essentiellement similaire - nous nous plaçons ici dans le cas $k = 1$. La dérivée de la fonctionnelle par rapport à α est alors toujours nulle, par homogénéité. Reste donc à considérer le système

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial K_\mu}{\partial \lambda} = B \displaystyle\int_\Omega \nabla \bar{v}.\nabla \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} + \sum_{j=1}^n C_j \int_\Omega \nabla \bar{v}.\nabla \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial y_j} \\ \dfrac{\partial K_\mu}{\partial y_i} = B \displaystyle\int_\Omega \nabla \bar{v}.\nabla \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial y_i} + \sum_{j=1}^n C_j \int_\Omega \nabla \bar{v}.\nabla \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} \end{cases}$$

En développant à l'ordre adéquat les intégrales, on trouve (en tenant compte de (15))

$$\frac{\partial K_\mu}{\partial \lambda}(\lambda, y, 0) = \omega_n \frac{H(y)}{\lambda^2} - \omega_n' \mu \Big(\frac{\text{Log } \lambda}{\lambda^3} \text{ si } n = 4 \ ; \ \frac{1}{\lambda^3} \text{ si } n \geq 5 \Big)$$

$$+ 0 \Big(\frac{1}{\lambda^2 \text{Log } \lambda} \text{ si } n = 4 \ ; \ \frac{\text{Log } \lambda}{\lambda^3} \text{ si } n = 5 \ ; \ \frac{1}{\lambda^3} \text{ si } n \geq 6 \Big)$$

$$\frac{\partial K_\mu}{\partial y_i}(\lambda, y, 0) = -\frac{\omega_n}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial y_i}(y) + 0 \Big(\frac{1}{\lambda \text{Log } \lambda} \text{ si } n = 4 \ ; \ \frac{\text{Log } \lambda}{\lambda^2} \text{ si } n = 5 \ ; \ \frac{1}{\lambda^2} \text{ si } n \geq 6 \Big)$$

où ω_n, ω_n' sont des constantes strictement positives qui ne dépendent que de n. La Proposition 2 nous donne des estimées de $\bar{v}$, puis des coefficients B et C_j, qui nous permettent maintenant d'établir que le système (18) est équivalent à

$$(19) \qquad \begin{cases} \omega_n \dfrac{H(y)}{\lambda^2} - \omega_n' \mu \Big(\dfrac{\log \lambda}{\lambda^3} \text{ si } n = 4 \ ; \ \dfrac{1}{\lambda^3} \text{ si } n = 5 \Big) = o\Big(\dfrac{1}{\lambda^2}\Big) \\ \dfrac{\omega_n}{\lambda} \dfrac{\partial H}{\partial y_i}(y) = o\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big) \qquad \forall i, \ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

2.4. Démonstration du Théorème 1

Soit donc u_μ une solution de (1) telle que $J_\mu(u_\mu) < \frac{S}{2^{2/n}}$. Il est possible, en utilisant un principe de concentration-compacité ([15] [11], appliqué à ce cas précis dans [5]), de montrer que u_μ s'écrit sous la forme

$$(20) \qquad u_\mu = \alpha_\mu U_{\lambda_\mu, y_\mu} + v_\mu$$

avec $\alpha_\mu \to \bar{\alpha} = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}}, \lambda_\mu \to +\infty, y_\mu \to y_0 \in \partial\Omega, v_\mu \in E_{\lambda_\mu, y_\mu}$ et $v_\mu \to 0$ dans $H^1(\Omega)$ quand $\mu \to +\infty$. De plus, $J_\mu(u_\mu) < \frac{S}{2^{2/n}}$ impose (ou procède comme dans [4]) que (15) sera vérifiée avec un bon choix de κ_n, et ce qui précède s'applique : λ_μ, y_μ devront donc être solutions de (19). La première équation impose alors $H(y_0) > 0$, et les suivantes $H'(y_0) = 0$ - d'où la partie a) du Théorème 1.

Réciproquement, si $y_0 \in \partial\Omega$ est un point critique non-dégénéré de H sur $\partial\Omega$, (19) peut s'écrire pour y dans un voisinage de y_0 :

$$(21) \quad \begin{cases} \omega_n \dfrac{H(y_0)}{\lambda^2} - \omega_n' \mu \Big(\dfrac{\mathrm{Log}\,\lambda}{\lambda^3} \text{ si } n=4 \ ; \ \dfrac{1}{\lambda^3} \text{ si } n=5\Big) = o\Big(\dfrac{1}{\lambda^2}\Big) + 0\Big(\dfrac{|y-y_0|^2}{\lambda^2}\Big) \\ \dfrac{\omega_n}{\lambda}(y-y_0) = o\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big) + 0\Big(\dfrac{|y-y_0|^2}{\lambda}\Big) \end{cases}$$

Un théorème de point fixe, ou un argument de degré, permet alors de montrer que lorsque $\mu \to +\infty$, (21) admet une solution λ_μ, y_μ telle que $\lambda_\mu \to +\infty, y_\mu \to y_0$, et la partie b) s'ensuit.

2.5. Démonstration du Théorème 2

Comme auparavant, on cherche une solution sous la forme d'un point critique de K_μ sur M. Plus précisément, après optimisation par rapport au paramètre v, on cherche un point critique de la fonctionnelle

$$(22) \qquad K_\mu^1(\lambda, y) = K_\mu(\lambda, y, \bar{v})$$

(nous sommes toujours dans le cas $k = 1$, où le paramètre α peut être omis). Au lieu de considérer les deux paramètres λ et y simultanément, on les prend maintenant en compte successivement, en commençant par λ ; c'est-à-dire que $y \in \partial\Omega$ étant fixé, on cherche λ tel que

$$(23) \qquad \frac{\partial K_\mu^1}{\partial \lambda} = \frac{\partial K_\mu}{\partial \lambda} + \frac{\partial K_\mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} = 0$$

Le premier terme $\frac{\partial K_\mu}{\partial \lambda}$ s'estime comme précédemment. Quand au second, $\frac{\partial K_\mu}{\partial v}$ étant nul sur $E_{\lambda,y}$ par définition de $\bar{v}$ et les coefficients A, B, C_j étant déjà évalués, si l'on écrit

$$(24) \qquad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} = w + \xi U + \zeta \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^{n} \theta_j \frac{\partial U}{\partial y_j}$$

avec $w \in E_{\lambda,y}$, il ne nous reste pour estimer le terme $\frac{\partial K_\mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda}$ qu'à évaluer les coefficients ξ, ζ, θ_j. Pour ce faire, nous multiplions le gradient de (24) par celui de U, $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial U}{\partial y_j}$ respectivement et nous intégrons sur Ω. Nous obtenons à droite un système linéaire presque diagonal - et donc inversible - pour les coefficients ξ, ζ, θ_j, tandis qu'à gauche le fait que $\bar{v} \in E_{\lambda,y}$ permet d'écrire :

$$\int_\Omega \nabla \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \cdot \nabla U = - \int_\Omega \nabla \bar{v} \cdot \nabla \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$$

$$\int_\Omega \nabla \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \cdot \nabla \frac{\partial U}{\partial \lambda} = - \int_\Omega \nabla \bar{v} . \nabla \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0\Big(\frac{|\nabla \bar{v}|_2}{\lambda^2}\Big)$$

$$\int_\Omega \nabla \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_j} \cdot \nabla \frac{\partial U}{\partial y_i} = - \int_\Omega \nabla \bar{v} \cdot \nabla \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} = 0(\lambda^2 |\nabla \bar{v}|_2)$$

en utilisant l'inégalité de Hölder. On en déduit en inversant le système les estimées recherchées de ξ, ζ, θ_j, et (23) s'avère alors prendre la forme :

$$\omega_n \frac{H(y)}{\lambda^2} - \omega_n' \mu \Big(\frac{\mathrm{Log}\,\lambda}{\lambda^3} \text{ si } n = 4 \ ; \ \frac{1}{\lambda^3} \text{ si } n = 5 \Big) = o\Big(\frac{1}{\lambda^2}\Big) \tag{25}$$

qui admet, si $H(y) > 0$ et μ est assez grand, une solution $\bar{\lambda} = \lambda(\mu, y)$, tendant vers l'infini quand $\mu \to +\infty$ ((15) étant bien vérifiée si l'on se restreint à y variant dans un domaine de $\partial\Omega$ tel que $H(y) > \eta > 0$). On peut de surcroît montrer que $\bar{\lambda}$ est un point critique non-dégénéré de K_μ^1, et le théorème d'inversion locale permet alors d'assurer que $\bar{\lambda}$ est une fonction régulière de y.

Trouver une solution à (1) revient finalement à trouver un point critique à la fonction

$$K_\mu^2(y) = K_\mu^1(\bar{\lambda}, y)$$

dont le développement s'écrit

$$K_\mu^2(y) = \frac{S}{2^{2/n}} - \frac{\omega_n^2}{4\omega_n' \mu} H^2(y) + o\Big(\frac{1}{\mu}\Big)$$

uniformément par rapport à y tel que $H(y) > \eta > 0$. On peut donc, pour μ assez grand, intercaler les ensembles de niveau de K_μ^2 entre ceux de la fonction H^2 (à des constantes additive et multiplicative près), et on obtient ainsi le résultat du Théorème 2.

2.6. Les autres résultats

Toutes les analyses précédentes se transposent au cas $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque, en rajoutant les équations relatives aux dérivées de K_μ par rapport aux paramètres α_i, qui prennent toujours la forme

$$\alpha_i - \bar{\alpha} = o(1) \qquad \text{quand } \mu \to +\infty$$

Les paramètres α_i n'apportent donc aucune modification significative dans les équations relatives aux dérivées de K_μ par rapport aux paramètres λ_i et $(y_i)_j$.

Pour chacun de ces paramètres, l'équation obtenue a la même forme que précédemment, l'effet de bord, qui fait intervenir la courbure moyenne H, étant prédominant par rapport aux effets d'interaction (pour davantage de précisions, se reporter à [18]). Tout ce passe comme si les fonctions concentrés en différents points se comportaient indépendamment les unes des autres : le Théorème 3 s'établit donc en suivant la même stratégie que précédemment et les Théorèmes 4 et 5 en sont des conséquences plus ou moins directes.

Remarque : les estimées améliorées de $\bar{v}$ obtenues dans [18] permettent d'étendre aux cas $n = 4, 5, 6$ les estimées très précises de u_μ en norme L^∞ données dans [5]. Tant en ce qui concerne ce résultat que ceux énoncés auparavant, le cas $n = 3$ paraît être beaucoup plus délicat.

RÉFÉRENCES

[1] Adimurthi, G. Mancini - *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity, "A tribute in honour of G. Prodi"* Scuola Norm. Sup. Pisa (1991), 9-25.

[2] Adimurthi, S.L. Yadava - *Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents*, Arch. Rat. Mech. Anal. 115 (1991), 275-296.

[3] Adimurthi, G. Mancini, S.L. Yadava - *The role of the mean curvature in semilinear Neumann problem involving critical exponent*, à paraître.

[4] Adimurthi, F. Pacella, S.L. Yadava - *Interaction between the geometry of the boundary and positive solutions of a semilinear Neumann problem with critical nonlinearity*, J. Funct. Anal. 113 (1993), 318-350.

[5] Adimurthi, F. Pacella, S.L. Yadava - *Characterization of concentration points and L^∞-estimates for solutions of semilinear Neumann problem involving the critical Sobolev exponent*, à paraître.

[6] A. Bahri - *Critical points at infinity in some variational problems* Pitman Research Notes in Math. Series 182, Longman (1989).

[7] A. Bahri, J.M. Coron - *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : the effet of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 255-294.

[8] A. Bahri, Y. Li, O. Rey - *On a variational problem with lack of compactness : the topological effet of the critical points at infinity*, à paraître dans Calculus of Variations and PDE's.

[9] H. Brezis, L. Nirenberg - *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. XXXVI (1993), 437-477.

[10] C. Budd, M.C. Knaap, L.A. Peletier - *Asymptotic behaviour of solutions of elliptic equations with critical exponent and Neumann boundary conditions*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 117 A (1991), 225-250.

[11] B. Gidas, J. Spruck - *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Diff. Equ. 6 (1981), 883-901.

[12] E.F. Keller, L.A. Segel - *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theoret. Biol. 26 (1970), 399-415.

[13] C.S. Lin, W.M. Ni - *On the Diffusion Coefficient of a Semilinear Neumann Problem*, Springer Lecture Notes 1340, Springer, New-York, Berlin, (1986).

[14] C.S. Lin, W.M. Ni, I. Takagi - *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system*, J. Differential Equations 72 (1988), 1-27.

[15] P.L. Lions - *The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana 1.1 (1985), 145-201 et 1.2 (1985), 45-121.

[16] H. Meinhardt - *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, London, New-York (1982).

[17] O. Rey - *The role of the Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent*, J. Funct. Anal. 89 (1990), 1-52.

[18] O. Rey - *Boundary concentration in an elliptic Neumann problem with critical nonlinearity*, à paraître.

[19] X.J. Wang - *Neumann problem of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, J. Diff. Equ. 93 (1991), 283-310.

Olivier REY
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 - Palaiseau cedex