S. Alinhac

Explosion géométrique pour des systèmes quasi-linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A1_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

EXPLOSION GEOMETRIQUE POUR DES SYSTEMES QUASI-LINEAIRES

S. ALINHAC

Exposé n° I

23 Novembre 1993

Introduction .

Le problème de Cauchy global pour des équations ou systèmes quasi linéaires hyperboliques a été l'objet de nombreux travaux, dus à J.Glimm, L.Hörmander, F.John, S.Klainerman, P.D.Lax, A.Majda et à beaucoup d'autres. On trouvera dans les Notes d'Hörmander [4] une première bibliographie.

Si les données initiales sont régulières (par exemple, $\mathbf{C}_0^\infty$), on peut définir un temps de vie T pour la solution régulière du problème, temps auquel la norme Lipschitz de la solution devient infinie. Néanmoins, sauf dans des cas unidimensionnels ou invariants par rotation, on ne sait pas préciser où et comment a lieu l'explosion au temps T.

Dans le cas d'une équation scalaire, la méthode des caractéristiques montre que le gradient de la solution explose comme l'inverse de la différentielle d'une application de corang un. C'est ce que nous appelons "explosion géométrique".

Il se trouve que ce phénomène n'est nullement spécifique du cas scalaire et n'a rien à voir avec l'existence de caractéristiques.

Dans ce résumé, nous esquissons une théorie locale de l'explosion géométrique pour des systèmes quasi linéaires généraux (nous renvoyons le lecteur à [1] pour tout détail). Cette théorie consiste à associer à un système donné $\mathbf{L}$ un système "éclaté" $\mathbf{L}_e$, et à toute solution convenable de ce dernier une solution éclatée u de $\mathbf{L}$. Celle ci sera de la forme $u(\Phi(X)) = v(X)$, où $\Phi(X) = (\phi(X), X_2, \ldots, X_n)$ et (ϕ, v) est une solution régulière de $\mathbf{L_e}$. Bien entendu, $\partial_1\phi(0) = 0$, et au type de singularité de Φ en $X = 0$ (pli, cusp, etc...) correspond un type de solution singulière u de même nom (les solutions pli sont analogues à celles de Leichtnam [9]). On montre qu'il n'y a pas d'obstructions dans $\mathbf{L}_e$ à trouver des solutions (ϕ, v) dont le jet en 0 présente les singularités voulues. En fait, la théorie est"microlocale" en ce sens qu'elle ne fait intervenir qu'une valeur propre réelle λ du système $\mathbf{L}$ au voisinage d'un point caractéristique (x^0, u^0, ξ^0).

Dans les cas les plus simples (pli, cusp), on analyse les bicaractéristiques du linéarisé de $\mathbf{L}$ sur la solution singulière construite. Ceci permet de mettre en évidence la différence essentielle entre une solution singulière et une solution explosive : la solution explosive est une solution qui devient singulière en un point d'un domaine d'influence d'une zone où elle est régulière ; la singularité qu'on observe est donc créée, et non propagée.

Cette analyse montre aussi le lien entre l'existence de solutions explosives et le fait que λ soit vraiment non linéaire au sens de Lax (en (x^0, u^0, ξ^0)).

Le rapport entre cette théorie locale et le phénomène de l'explosion hyperbolique dans des situations globales est discuté au point 3. Pour des systèmes sans terme d'ordre zéro en dimension un d'espace, il semble probable que, génériquement, la solution explose au temps T en un point (x^0, T) , et coincide près de ce point (pour $t < T$) avec une solution éclatée de type cusp (pour un ξ^0 qui annule l'une des valeurs propres du système). En dimension d'espace supérieure, il se peut qu'il existe des solutions explosives plus compliquées que les solutions éclatées, et beaucoup de questions restent ouvertes.

1. Un exemple très simple.

Considérons l'équation de Burger

$$\partial_t u + u\partial_x u = f(u) \tag{1.1}$$

avec une donnée initiale u_0 définie près de X^0 , et $u_0'(X^0) < 0$.

a. Supposons d'abord $f \equiv 0$. La solution u de donnée u_0 est constante le long des caractéristiques, qui sont les droites $x = X + su_0(X), t = s$, indexées par X et paramétrées par s. La dérivée $\partial_x u$, restreinte à la caractéristique issue de $(X, 0)$, est une fonction $q(s)$ qui vérifie $q' + q^2 = 0$, et devient donc infinie pour $s^{-1} = -u_0'(X)$.

(i) Supposons $u_0''(X^0) \neq 0$: le lieu γ des points d'explosion est une courbe lisse , à laquelle les caractéristiques sont tangentes ; la solution u définie près de $m = (X^0 + s_0 u_0(X^0), s_0), s_0^{-1} = -u_0'(X^0)$, d'un coté de γ, par le fait d'être constante sur les caractéristiques, présente des singularités tout le long de γ.

(ii) Supposons au contraire $u_0''(X^0) = 0, u_0'''(X^0) \neq 0$: la courbe γ présente un cusp, pointant vers le bas ou vers le haut selon que $u_0'''(X^0) > 0$ ou < 0. Dans le premier cas, la solution u est définie au moins pour $t < s_0$, et singulière à la pointe du cusp. Dans le deuxième, u est définie en dessous de γ et singulière le long de γ.

b. Considérons le système

$$\partial_T \phi = v, \partial_T v = 0 \tag{1.2}$$

A toute solution (ϕ, v) de ce système correspond formellement une solution u de (1.1) par $u(\phi(X,T),T) = v(X,T)$. Pour satisfaire les conditions initiales, on prend de plus

$$v(X,0) = u_0(X), \phi(X,0) = X \tag{1.3}$$

Dans le cas (i), l'application $\Phi(X,T) = (\phi(X,T),T)$ présente un pli en $(X^0, T^0 = s_0)$, et u correspond au choix de la plus petite (resp.plus grande) racine X si $u_0''(X^0) > 0$ (resp.< 0).

Dans le cas (ii), Φ présente un cusp ; la solution u définie dans le premier cas correspond à l'unique choix possible ; dans le deuxième cas, elle correspond à celle des trois racines X qui est entre les deux autres.

On appellera (1.2) le système éclaté de (1.1), et u la solution éclatée correspondant à (ϕ, v) (et à un choix convenable de branche).

c. Soit maintenant f quelconque. Le système éclaté s'écrit

$$\partial_T \phi = v, \partial_T v = f(v) \tag{1.4}$$

avec les conditions (1.3). La solution u peut avoir alors deux raisons différentes d'exploser: soit $\partial_X \phi$ devient 0 comme en a.ou b., soit $v \to \infty$ (on pourra voir [6] pour des constructions de ce type dans des cas linéaires). Lequel de ces deux phénomènes se produit le premier dépend de la non linéarité f et/ou de la donnée initiale.

Dans toute la suite, nous considérerons des solutions régulières des systèmes éclatés.

2. Systèmes éclatés, solutions éclatées.

2.1. On considère, au voisinage d'un point $x^0 = 0 \in \mathbf{R^n}, u^0 \in \mathbf{R^N}$, un système quasilinéaire

$$Lu = \Sigma_{j=1}^n A_j(x,u)\partial_j u + B(x,u) = 0. \tag{2.1.1}$$

Ici, u, A_j, B sont réels, A_j et B sont des matrices $N \times N$ régulières . On note $A(x,u,\xi) = \Sigma A_j(x,u)\xi_j$, et $\sigma = \det A$ le symbole principal du linéarisé de L sur u. Nous faisons sur L l'hypothèse suivante :

il existe $\xi^0 \neq 0$ et une valeur propre réelle simple $\lambda(x,u,\xi)$ de A, définie près de (x^0, u^0, ξ^0),
tels que

$$\lambda(x^0,u^0,\xi^0) = 0, \partial_\xi \lambda(x^0,u^0,\xi^0) \neq 0 \tag{2.1.2}$$

Nous noterons l et r des vecteurs propres à droite et à gauche de A pour la valeur propre λ.

Rappelons ici la définition suivante due à Lax[7] : la valeur propre λ est vraiment nonlinéaire (en abrégé VNL) si

$$(r\partial_u \lambda)(x^0,u^0,\xi^0) \neq 0. \tag{2.1.3}$$

2.2. Soit κ un indice tel que $\xi^0_\kappa \neq 0$ et P une matrice $N-1 \times N$ telle que la matrice P^0 obtenue en lui ajoutant l comme première ligne soit inversible (un tel couple sera dit "admissible"). Posons, pour $X \in \mathbf{R}^N$ voisin de zéro,

(2.2.1) $$\Phi(X) = (X_1, X_2, \ldots, X_{\kappa-1}, \phi(X), \ldots, X_n)$$

(2.2.2) $$\eta(X) = -\epsilon(\partial_1\phi, \ldots, \partial_{\kappa-1}\phi, -1, \ldots, \partial_n\phi),$$

où ϵ est le signe de ξ^0_κ.

Définition (2.2). *On appelle système éclaté de L (pour (κ, P)) le système L_e de taille $(N+1 \times N+1)$ en les inconnues (ϕ, v)*

$(2.2.3)_a$ $$\lambda(\Phi(X), v(X), \eta(X)) = 0,$$

$(2.2.3)_b$ $$l(\Phi(X), v(X), \eta(X))\{\Sigma_{j\neq\kappa}A_j(\Phi(X), v(X))\partial_j v + B(\Phi(X), v(X))\} = 0,$$

$(2.2.3)_c$ $$P\{\epsilon A(\Phi(X), v(X), \eta(X))\partial_\kappa v + \{\Sigma_{j\neq\kappa}A_j\partial_j v + B\}\partial_\kappa\phi\} = 0$$

Bien entendu, le système $(2.2.3)_b, (2.2.3)_c$ n'est rien d'autre que L dans lequel on a fait formellement le changement

(2.2.4) $$x = \Phi(X), u(\Phi(X)) = v(X),$$

multiplié à gauche par $\mathrm{diag}(1, \partial_\kappa\phi, \ldots, \partial_\kappa\phi)P^0$.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des solutions (ϕ, v) de L_e vérifiant les conditions suivantes:

(i) (ϕ, v) est de classe C^2

(ii) $v(0) = u^0, \eta(0) = \mu\xi^0, \mu > 0$

(iii) $\partial_\kappa\phi(0) = 0, d(\partial_\kappa\phi) \neq 0$.

2.3. Nous introduisons maintenant la notion de solution éclatée.

Théorème et Définition (2.3). *Soit (κ, P) un couple admissible pour L et (ϕ, v) une solution du système L_e correspondant. Supposons qu'il existe un ouvert connexe D $(0 \in \bar{D})$ et une application continue ψ de $\bar{D}$ dans $\mathbf{R}^n$ pour laquelle*

(2.3.1) $$\psi(0) = 0, \Phi(\psi(x)) = x, \det \Phi'(\psi(x)) \neq 0, x \in D$$

Posons $u(x) = v(\psi(x)), x \in D$. La fonction u est alors une solution de $Lu = 0$ sur D, dite"solution éclatée". L'ensemble des solutions (u, D) de L ainsi obtenues ne dépend pas du choix du couple (κ, P) (étant entendu qu'on ne considère que des germes de solutions en x^0).

Nous dirons que la solution éclatée est de type "pli" si Φ a un pli en 0, c'est à dire

$$\partial_\kappa \phi(0) = 0, \partial_\kappa^2 \phi(0) \neq 0; \tag{2.3.2}$$

nous dirons qu'elle est de type"cusp" si Φ a un cusp en 0, c'est à dire

$$\partial_\kappa \phi(0) = 0, \partial_\kappa^2 \phi(0) = 0, \partial_\kappa^3 \phi(0) \neq 0, d(\partial_\kappa \phi)(0) \neq 0, \tag{2.3.3}$$

etc...On pourra consulter [3] au sujet des divers types de singularités.

3. Encore des exemples.

On a déja vu l'exemple des équations scalaires au point 1 (voir aussi 6.1). Examinons quelques autres cas.

3.1. Systèmes hyperboliques pour $n = 2$.

Nous les choisirons de la forme

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0 \tag{3.1.1}$$

où les valeurs propres $\mu_j(u)$ de A sont supposées réelles et distinctes (avec des vecteurs propres à gauche $l_j(u)$). Ici, pour $\kappa = 1$, $\lambda = \xi\mu_1 + \tau, l = l_1$ et P formée des lignes $l_2, \ldots, l_N$, on trouve pour L_e le système

$$\partial_T \phi = \mu_1(v), l_1(v)\partial_T v = 0, (\mu_k - \mu_1)(v) l_k \partial_X v + \partial_X \phi l_k \partial_T v = 0 \tag{3.1.2}$$

Remarquons que ∂_T est double et que les autres champs se confondent tous avec ∂_X la où $\partial_X \phi = 0$. Le système L_e est donc hyperbolique à caractéristiques multiples.

3.2. Ondes simples.

Il s'agit d'une classe de solutions spéciales de systèmes tels que (3.1.1) de la forme $u(x,t) = U(\zeta(x,t))$, où ζ est scalaire (cf. par exemple [10]). Ces solutions correspondent tout simplement aux solutions particulières de (3.1.2) de la forme
$v \equiv v(X), v'(X)$ colinéaire à $r(v(X)), \partial_T \phi = \mu_1(v(X))$. On voit donc que la classe des solutions éclatées introduite en 2. généralise celle des ondes simples.

3.3. Un modèle d'équation d'onde .

Considérons l'équation

$$\partial_{xt}^2 u + \partial_x u \partial_{x^2}^2 u + a\partial_{y^2}^2 u = 0, (x, y, t) \in \mathbf{R}^3, a = cte \tag{3.3.1}$$

En posant $u_1 = \partial_x u, u_2 = \partial_y u$, on obtient un système dont l'éclaté équivaut (après élimination de v_2) à

$$(3.3.2) \qquad \partial_T\phi = v_1 + a(\partial_Y\phi)^2, \partial^2_{XT}v_1 - 2a\partial_Y\phi\partial^2_{XY}v_1 + a\partial_X\phi\partial^2_{Y^2}v_1 - a\partial^2_{Y^2}\phi\partial_X v_1 = 0$$

On voit apparaître les deux champs ∂_X et $\partial_T - 2a\partial_Y\phi\partial_Y$ aux points où $\partial_X\phi = 0$. Nous reviendrons sur ce fait au point 4.

Cette équation est une forme simplifiée de celle que l'on rencontre dans l'étude du temps de vie des solutions d'équations d'ondes générales (cf. [1]).

4. Comment résoudre le système éclaté.

C'est évidemment le point essentiel de cette théorie locale. Disons tout de suite que nous ne savons pas trouver"suffisamment" de solutions C^∞ des systèmes tels que L_e correspondant à des systèmes généraux L symétrisables ou même hyperboliques symétrisables.

4.1. Néanmoins, il est facile de se rendre compte qu'il n'y a pas d'obstructions à l'existence de solutions"pli" ou"cusp" de L_e, c'est à dire de solutions dont les jets vérifient (2.3.2) ou (2.3.3).

Si l'on suppose par exemple les A_j et B analytiques, on peut utiliser le Théorème de Cauchy-Kovalevsky par rapport à n'importe quelle surface non caractéristique pour résoudre L_e. On établit que le symbole principal σ_e de L_e vaut à l'origine

$$(4.1.1) \qquad \sigma_e = C\zeta_\kappa^{N-1}(\Sigma_{j\neq\kappa}\partial_{\xi_j}\lambda\zeta_j)^2$$

où $C \neq 0$ et les coefficients $\partial_{\xi_j}\lambda, j \neq \kappa$ ne sont pas tous nuls. On montre en outre que l'on peut choisir les jets en 0 de ϕ restreinte à la surface initiale pour obtenir les singularités voulues de Φ.

4.2. Il y a aussi des cas où une analyticité partielle suffit. Dans l'exemple 3.3, on peut écrire (3.3.2) sous la forme d'un système $\partial^2_{XT}\phi = \ldots, \partial^2_{XT}v_1 = \ldots$ et résoudre alors un problème de Goursat avec des données convenables sur $X = 0$ et $T = 0$, analytiques seulement en Y (voir par exemple [12]).

5. Géométrie des solutions éclatées et valeurs propres nonlinéaires.

5.1. L'explosion de ∇u.

C'est le phénomène recherché . On peut le préciser de la façon suivante : soit u une solution de L correspondant à une solution (ϕ, v) de L_e avec $\partial_1 v(0) \neq 0$. Alors, pour $x \in D$,

$$(5.1.1) \qquad \partial_x u(x) = C(x)(\partial_1\phi)^{-1}(\psi(x))r(x, u(x), \xi(x))^t\xi(x) + R(x),$$

où $C(x)$ et $R(x)$ sont continues sur $\bar{D}$, $C(x^0) \neq 0$ et $\xi(x) = \eta(\psi(x))$.

Dans le cas du pli, le facteur singulier de (5.1.1) équivaut à $d^{\frac{-1}{2}}$, d étant la distance au pli ; on a même alors des"invariants" de Riemann $R_2(x,u),\ldots,R_N(x,u)$ dont les gradients n'explosent pas, mais qui dépendent de la solution u (ce sont les invariants habituels (cf.par exemple [11]), pris au point $(x,\xi(x))$).

5.2. Allure des bicaractéristiques.

On suppose toujours pour alléger $\kappa = 1$. Commme u n'est pas régulière près de x^0, on ne peut pas parler des bicaractéristiques du linéarisé de L sur u "issues" de x^0 (il n'y a pas unicité, notamment) ; on préférera parler des bicaractéristiques au-dessus de D qui "aboutissent" en x^0. Ces courbes sont obtenues comme images de bicaractéristiques du linéarisé de $(1.2.3)_b$ et $(1.2.3)_c$, dont le symbole $\tilde{\sigma}_e$ vaut à l'origine

$$\tilde{\sigma}_e = C\zeta_1^{N-1}\Sigma\partial_{\xi_j}\lambda\zeta_j$$

On a donc deux cas à considérer pour la courbe issue de $(0,\zeta^0)$: soit $\zeta_1^0 \neq 0$ (famille 1), soit $\zeta_1^0 = 0$ (famille 2).

a. Etude de la famille 1.

Soit (ϕ, v) une solution de L_e avec $\partial_1 v(0) \neq 0$. Notons $\mathcal{C}(\zeta^0) = (X(s),\zeta(s)), s$ voisin de 0, la bicaractéristique de $\tilde{\sigma}_e$ issue de $(0,\zeta^0)$ où ζ^0 vérifie

$$\zeta_1^0 \neq 0, \Sigma\partial_{\xi_j}\lambda(x^0,u^0,\xi^0)\zeta_j^0 = 0 \tag{5.2.1}$$

(i) Supposons la solution de type pli et λ vraiment nonlinéaire. Alors l'image $\Phi(X(s))$ est une courbe lisse, tangente au pli (caractéristique!) pour $s = 0$ avec un contact d'ordre deux exactement. L'image de chacune des deux demi-courbes $\mathcal{C}_\pm(\zeta^0) = (X(s),\zeta(s)), \pm s > 0$, est un arc de bicaractéristique $(x(s),\xi(s))$ (au dessus de D) du linéarisé de L sur une solution éclatée u, les deux demi-courbes correspondant à des choix différents de ψ. De plus, les projections $(x(s),\frac{\xi(s)}{|\xi(s)|})$ de ces arcs sur le fibré en sphères aboutissent à l'un des points $(x^0,\pm\frac{\xi^0}{|\xi^0|})$.

(ii) Supposons la solution de type cusp et λ vraiment nonlinéaire. Alors l'image $\Phi(X(s))$ est une courbe lisse traversant le cusp et transverse à l'arête Γ. L'image de chacune des deux demi-courbes $\mathcal{C}_\pm(\zeta^0)$ est un arc de bicaractéristique (au dessus de D) du linéarisé de L sur les solutions éclatées extérieures et intérieures du cusp. De plus, les projections de ces arcs sur le fibré en sphères aboutissent à l'un des points $(x^0,\pm\frac{\xi^0}{|\xi^0|})$.

Dans tous les cas, la tangente à $\Phi(X(s))$ en $s = 0$ est la caractéristique issue de (x^0,ξ^0) pour l'opérateur L gelé en (x^0,u^0).

b. Etude de la famille 2.

Nous ne savons la mener à bien que pour des systèmes 2×2 ou des cas factorisables.

Si le symbole σ de L vaut $\sigma(x,u,\xi) = {}^t\xi Q(x,u)\xi$, pour une matrice symétrique Q, le symbole $\tilde{\sigma}_e$ vaut

$$\tilde{\sigma}_e = C\{\zeta_1 \Sigma_{j\geq 2}\lambda_j(X)\zeta_j + \partial_1\phi q(X,\zeta')\}, C \neq 0 \tag{5.2.2}$$

où les λ_j et q se calculent aisément (q est quadratique).

Soit (ϕ, v) une solution de L_e. Notons $\mathcal{C}(\zeta^0)$ la bicaractéristique de $\tilde{\sigma}_e$ issue de $(0,\zeta^0)$, où ζ^0 vérifie

$$\zeta_1^0 = 0, \Sigma_{j\geq 2}\lambda_j(0)\zeta_j^0 \neq 0 \tag{5.2.3}$$

(i) Supposons la solution de type pli. Alors l'image $\Phi(X(s))$ est une courbe cuspée en $s = 0$, transverse au pli. L'image de chacune des deux demi-courbes $\mathcal{C}_\pm(\zeta^0)$ est un arc de bicaractéristique (au-dessus de D) du linéarisé de L sur une solution éclatée, les deux demi-courbes correspondant à des choix différents de ψ. Ces arcs aboutissent au point $(x^0, \tilde{\xi}) = (x^0, -\frac{q}{l}, \ldots, \frac{q}{l}\partial_j\phi + \zeta_j^0, \ldots)$, où $l = \Sigma_{j\geq 2}\lambda_j\zeta_j$.

(ii) Supposons la solution de type cusp. Alors l'image $\Phi(X(s))$ est une courbe lisse transverse au plan tangent au cusp en 0. L 'image de chacune des deux demi-courbes $\mathcal{C}_\pm(\zeta^0)$ est un arc de bicaractéristique (au dessus de l'extérieur du cusp) du linéarisé de L sur la solution éclatée extérieure, qui aboutit au point $(x^0, \tilde{\xi})$.

Dans les deux cas, la tangente à $\Phi(X(s))$ en $s = 0$ est la caractéristique issue de $(x^0, \tilde{\xi})$ pour l'opérateur gelé en (x^0, u^0).

c. L 'image de l'ensemble des caractéristiques discutées en a. et b. est donc, en gros, la suivante (nous glissons sur certains détails que l'on trouvera dans [1]) :

(i) Pour une solution de type pli et chaque branche de u , on obtient un demi-cône de lumière dont une "génératrice" est tangente au pli. Si λ est VNL, cette génératrice a un contact d'ordre deux avec le pli.

(ii) Pour la branche extérieure d'une solution de type cusp, on obtient un cône de lumière dont une "génératrice" est contenue dans le plan tangent au cusp. Si λ est VNL, cette génératrice est transverse à l'arête du cusp.

Dans le cas linéaire, il n'y a qu'une bicaractéristique aboutissant en (x^0, ξ^0), qui est contenue dans le pli ou confondue avec l'arête du cusp, selon le cas.

d. Le système d'Euler isentropique en dimension deux d'espace est un exemple factorisable pour lequel les analyses a.,b.,c. précédentes restent valables ; simplement, au tableau décrit en c. vient s'ajouter la courbe intégrale de $\partial_t + w\nabla, w$ étant la vitesse (courbe qui est intérieure au cône de lumière).

Un autre exemple factorisable est celui de la dimension $n = 2$ (l'image est analogue à celle de 3.1. cf. aussi [8]).

6. Naissance des singularités pour des systèmes hyperboliques.

Jusqu'ici, sauf dans les exemples, nous avons considéré des systèmes généraux de la forme (2.1.1) pour lesquels aucune direction n'est privilégiée.

Supposons maintenant le système hyperbolique , les variables étant alors notées traditionnellement (x, t).Dans certaines situations globales (en x) à données initiales régulières que nous ne détaillerons pas ici (voir par exemple [4]), on peut montrer l'existence d'une solution régulière pour $0 \leq t < T$. Il est alors possible de définir le temps de vie T_r de la solution régulière comme le plus grand de ces nombres. Si $T_r < \infty$, le problème de l'explosion consiste à décrire le comportement de la solution u lorsque $t \to T_{r+}$.

6.1. Dans le cas scalaire

$$\partial_t u + \Sigma a_i(u)\partial_{x_i} u = 0, u(x,0) = u_0(x),$$

supposons que la divergence $d(X) = \Sigma a_i'(u_0(X))\partial_{x_i} u_0(X)$ atteigne un minimum négatif en X^0. On a alors (cf.[10], par exemple) $T_r = -d(X^0)^{-1}$, et la solution u est une solution éclatée de l'équation correspondant au point $(x^0, t^0) = (X^0 + a(u_0(X^0))T_r, T_r)$, à la valeur $u^0 = u_0(X^0)$ et à la direction caractéristique (ξ^0, τ^0), où $\xi^0 = \nabla u_0(X^0)$. Il est facile de comprendre la signification de ξ^0 : le long des lignes de niveau de u_0, l'application $X \mapsto X + a(u_0(X))T_r$ se réduit à une simple translation ; la "compression" qui crée l'explosion ne peut avoir lieu qu'en suivant les lignes de plus grande pente de u_0, c'est à dire dans la direction de ξ^0.

Si le minimum de d est quadratique, la solution est de type cusp extérieure. Il semble d'ailleurs que ce cas soit le seul cas stable (c'est à dire où le germe de Φ est stable en 0 ; cf.par exemple [3]).

6.2. En dimension un d'espace, pour un système de la forme (3.1.1), il semble que l'explosion ait lieu en général relativement à une seule valeur propre du système.

C'est clair pour $N = 2$ lorsqu'on peut diagonaliser le système à l'aide des invariants de Riemann ; pour $N \geq 3$, dans le cas de données initiales assez petites, l'étude de John [5] conduit à la même conclusion (comparer notamment avec (5.1.1)).

Il semble naturel de conjecturer que, génériquement, la solution u est alors une solution éclatée relativement à cette valeur propre λ, en un certain point (x^0, T_r, u^0), et pour le ξ^0 annulant λ.

6.3. En dimension d'espace ≥ 2, la situation est beaucoup moins claire, la représentation de la solution comme solution éclatée étant liée à la résolution de L_e, que l'on ne maîtrise pas. Il se peut que certaines solutions explosives aient une structure plus complexe que les solutions éclatées décrites ici. Toutefois, compte tenu du point 4., elles seront sans doute difficiles à mettre en évidence numériquement.

Bibliographie.

[1] Alinhac S.,*Explosion géométrique pour des systèmes quasilinéaires*, Preprint, 1993.

[2] Alinhac S., *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasilinéaires en dimension deux*, II, à paraître à Duke Math. J., 1994.

[3] Golubitsky M. et Guillemin V., *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math. 14, Springer Verlag 1973.

[4] Hörmander L., *Non linear hyperbolic differential equations*, Lectures, 1986-1987.

[5] John F.,*Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 377-405.

[6] Kichenassamy S. et Littman W.,*Blowup surfaces for nonlinear wave equations I*, Comm.in PDE, 18 (3 et 4), 1993, 431-452.

[7] Lax P.D.,*Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), 537-566.

[8] Lebaud M.P.,*Description de la formation d'un choc dans le p-système*, preprint, Rennes, 1992.

[9] Leichtnam E.,*Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^{ieme} série, t20 (1987), 137-170.

[10] Majda A.,*Compressible fluid flow and systems of conservation laws*, Springer Appl. Math. Sc. 53 (1984).

[11] Smoller J., *Shock waves and reaction diffusin equations*, Grundlehr. 258, Springer Verlag 1983.

[12] Wagshall C.,*Le problème de Goursat non linéaire*,J. Math. pure et appl. 58 (1979), 309-337.