Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Bättig

La géométrie symplectique de l'espace des phases de l'équation de KdV périodique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 11, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A12_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LA GEOMETRIE SYMPLECTIQUE DE L'ESPACE DES PHASES DE L'EQUATION DE KdV PERIODIQUE

D. BÄTTIG

(d'après D. Bättig, A. Bloch, J.-C. Guillot, T. Kappeler)

Exposé n° XI

15 Février 1994

1 Introduction et résultats

Cet exposé traite d'un travail en commun avec A. Bloch, J.-C. Guillot et T. Kappeler, [BBGK1], [BBGK2].

On considère l'équation de KdV, périodique et de période 1, i.e.

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, q(x+1,t) = q(x,t) \ .$$

Il est bien connu que l'équation de KdV périodique est un système hamiltonien de dimension infinie complétement intégrable. Le spectre de l'opérateur de Schrödinger $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x,t)$, agissant sur $L^2[0,2]$, nommé le spectre 2-périodique, est invariant par le flot défini par l'équation de KdV et fournit un infinité d'intégrales premières pour ce flot hamiltonien dont les tores invariants sont les ensembles isospectraux $Iso(q)$ de potentiels réels p tels que $-\frac{d^2}{dx^2} + p$ et $-\frac{d^2}{dx^2} + q$ ont le même spectre 2-périodique. Ces ensembles sont compacts, connexes et génériquement des tores de dimension infinie. De plus, d'après les travaux de Dubrovin, Its Krichever, Matveev, Mc Kean, Novikov, Trubowitz et Van Moerbecke chaque ensemble $Iso(q)$ est isomorphe a une partie réelle d'une jacobienne d'une surface de Riemann hyperélliptique, de genre finie ou infinie, le flot de KdV est linéarisé sur cette jacobienne et les solutions sont données explicitement à l'aide de l'application d'Abel-Jacobi inverse en fonction de θ-fonctions (voir [MT2]). L'espace des potentiels est muni du crochet de Poisson de Gardner

$$\{F,G\} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial q(x)} \Big(\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial q(x)}\Big) dx$$

Il est dégéneré, c'est ainsi qu'on considère l'espace des phases de KdV l'espace noté L_0^2 et défini par

$$L_0^2 = \{q \in L^2_{\mathbf{R}}[0,1] / \int_0^1 q(x)dx = 0\} \ .$$

Sur L_0^2 le crochet de Gardner est non dégénéré et induit la forme symplectique

$$\omega_G(p,q) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\pi} < \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2n} \\ p_{2n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{2n} \\ q_{2n-1} \end{pmatrix} >$$

où $q(x) = 2\sum_{n\geq 1} q_{2n} \cos 2\pi nx + q_{2n-1} \sin 2\pi nx$ et de même pour $p(x)$. On considère enfin l'espace $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ des suites $\xi = (x_n, y_n)_{n\geq 1}$ telles que $||\xi||^2_{1/2} = \sum_{n>1} n(x_n^2 + y_n^2) < \infty$, muni de la forme symplectique canonique

$$\omega_0(\xi,\xi') = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} > ,$$

i.e. $\omega_0 = \sum_{n\geq 1} dx_n \wedge dy_n$.

Le résultat principal exposé ici est le suivant :

Théorème 1.— *Il existe un symplectomorphisme Ω de $(L_0^2,\ \omega_G)$ dans $(\ell^2_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^2), \omega_o)$ avec $\Omega(q) = (x_n(q), y_n(q))_{n\geq 1}$ ayant les propriétés suivantes : 1.) Ω est bijectif*

2.) Ω et Ω^{-1} sont deux applications réelles analytiques

3.) Posant $x_n = r_n \cos\alpha_n, y_n = r_n \sin\alpha_n$, alors $(\frac{1}{2}r_n^2, \alpha_n)_{n\geq 1}$ sont les variables action-angles pour KdV.

Ainsi l'espace des phases de l'équation de KdV périodique est symplectomorphe à celui d'une infinité d'oscillateurs harmoniques, i.e. $(\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2), \omega_0)$. Ce théorème donne une image globale de la géométrie symplectique de KdV, ce qui n'est pas le cas dans les travaux cités plus haut. On en déduit les conséquences immédiates suivantes :

Théorème 2.— *L'image $\{(J_n(q))_{n\geq 1} | q \in L_0^2\}$, où $J_n(q)$ sont les actions de KdV, est $\ell_1^1(\mathbf{R}^+)$.*

Théorème 3.— *Si $p, q \in L_0^2[0,1]$, alors $q \in Iso(p)$ si et seulement si $J_n(p) = J_n(q)\ \forall n \geq 1$, i.e. les variables actions sont des modulis pour le spectre 2-périodique.*

La démonstration du théoréme 1 comporte deux parties . La première, topologique, est une version du théorème 1 qui ne prend pas en compte la structure symplectique et la seconde, analytique, corrige la première pour tenir compte de la structure symplectique.

2 La partie topologique : les variables actions

Cette première partie de la preuve du théorème 1 est basée sur les articles de [K], [MT1] et [FM]. Rappelons d'abord l'isomorphisme $\Phi : L_0^2 \to \ell^2(\mathbf{R}^2)$ bianalytique construit dans [K]. Soit $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \ldots \quad < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \ldots$ le spectre 2-périodique de $-\frac{d^2}{dx^2} + q$ et notons par $\gamma_n = \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}, n \geq 1$ les longueurs des intervalles d'instabilité. Soit $E_n = E_n(q)$ l'espace propre généralisé des valeurs propres $\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}$, i.e. $E_n(q)$ est l'image du projecteur spectral

$$P_n(q) : L_0^2 \to E_n(q), \quad q \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} (-\frac{d^2}{dx^2} + q - \lambda)^{-1} d\lambda \ ,$$

où Γ_n est un contour autour de $\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}$. E_n dépend réel analytiquement de q et est de dimension 2. Il existe une base G_{2n-1}, G_{2n} orthonormée de E_n qui est réelle analytique et on considère

$$\Phi : L^2 \to \ell^2(\mathbf{R}^2), q \mapsto (< G_{2n}, (L - \tau_n)G_{2n} >, < G_{2n}, (L - \tau_n)G_{2n-1} >)_{n\geq 1}$$

avec $L = -\frac{d2}{dx^2} + q$ et $\tau_n = \frac{1}{2} trLP_n(q) = \frac{1}{2}(\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n})$.

Si E_n a une base de fonctions propres f_{2n-1}, f_{2n} de $\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}$ (ce qui est le cas si par exemple $\lambda_{2n-1} \neq \lambda_{2n}$ ou q réel) alors on a

$$\Phi_n(q) = \frac{\gamma_n}{2}(\cos 2\beta_n, \sin 2\beta_n)$$

où β_n est égale à l'angle entre f_{2n} et G_{2n} dans E_n. $\beta_n \in]-\pi, \pi[$ paramétrize l'ensemble isopectral $Iso(q)$ de q, qui est un tore de Liouville T de l'équation de KdV avec $q \in T$.

On introduit ensuite les variables actions $(J_n(q))_{n \geq 1}$ associées au flot de KdV périodique, obtenues par Flaschka et Mc Laughlin [FM]

$$J_n(q) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\frac{d}{d\mu}\Delta(\mu)}{(\Delta^2(\mu) - 4)^{1/2}} d\mu$$

où $\Delta(\mu) = \Delta(\mu, q)$ est le discriminant de l'équation de Schrödinger associée au potentiel q. On démontre le

Lemme 1.— *Pour tout $n \geq 1$ on a $J_n = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{\gamma_n^2}{8}(1 + 0(\frac{\log n}{n}))$ avec $1 + 0(\frac{\log n}{n}) \neq 0$ pour tout n. L'erreur $0(\frac{\log n}{n})$ est uniforme sur des ensembles bornés de L_0^2. De plus $J_n(q)/\gamma_n^2$ est une fonction réelle analytique.*

On peut ainsi définir $\Lambda = (\Lambda_n)_{n \geq 1}$ comme application de L_0^2 dans $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ avec

$$\Lambda_n(q) = 2\sqrt{\frac{2J_n(q)}{\gamma_n^2(q)}}\ \Phi_n(q)\ .$$

Proposition 1.— *Λ est une application bijective telle que Λ et Λ^{-1} soient réelles analytiques.*

Λ est réelle analytique car chaque composante Λ_n est réelle analytique *et*, comme $J_n = \frac{1}{n\pi} \frac{\gamma_n^2}{8}(1 + 0(\frac{\log n}{n}))$, $\Phi_n(q) = (q_{2n}, q_{2n-1}) + 0(\frac{\log n}{n})$ localement uniforme (voir [K]), Λ est localement bornée. Ensuite on démontre que la dérivée de Fréchet $d_q\Lambda$ de Λ est pour chaque $q \in L_0^2$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro et à l'aide des méthodes de [MT1] et [PT] que $d_q\Lambda$ est injective. Ainsi Λ est un isomorphisme local et on déduit avec [GT] la proposition 1 en montrant que Λ est propre et $\Lambda^{-1}(0) = \{0\}$.

3 La partie analytique : les variables angles

Après avoir introduit les actions, il est nécessaire d'ajuster les angles. Pour ce faire on introduit une seconde application Θ de $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même de sorte que, lorsque l'on exprime dans les nouvelles variables, la forme symplectique ω_G soit la forme ω_0.

Introduisant les coordonnées complexes $(z_n = x_n + iy_n)_{n\geq 1}$ et $(\omega_n = x_n - iy_n)_{n\geq 1}$, l'application Θ est alors de la forme

$$\Theta((z_n, w_n)_{n\geq 1}) = (e^{if_n} z_n, e^{-if_n} w_n)_{n\geq 1} \; .$$

Pour tout n f_n est à valeurs réelles, réelle analytique sur L^2_0. La suite d'angles $(f_n)_{n\geq 1}$ est telle que l'application $\Omega = (\Omega_n)_{n\geq 1}$ de L^2_0 dans $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ définie par

$$\Omega_n(q) = \sqrt{2J_n(q)}(\cos(2\beta_n(q) + f_n(q)), \sin(2\beta_n(q) + f_n(q)))$$

soit le symplectomorphisme du théorème 1. Pour construire la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ il faut remarquer que $\omega_G = d\eta_G$. Alors $\omega = d\eta$ où les 1-formes ω et η sont les images directes de ω_G et η_G par l'application Λ. Soit η_0 la 1-forme canonique $\frac{1}{4i}\sum_{k\geq 1}(w_k dz_k - z_k dw_k)$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ des angles doit être telle que la 1-forme $\Theta_*\eta_0 - \eta$ soit exacte. $\Theta_*\eta_0$ est l'image réciproque de η_0 par Θ. Posant

$$\eta = \frac{1}{4i}\sum_{k\geq 1}(w_k dz_k - z_k dw_k) - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(A_k dz_k + B_k dw_k)$$

avec $\overline{A}_k = B_k$, et remarquant que $\Theta_*\eta_0$ est, *formellement*, de la forme

$$\begin{aligned}\Theta_*\eta_0 = \frac{1}{4i}\sum_{k\geq 1}(w_K dz_K - z_k dw_k) - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(w_k f_k dz_k \\ + z_k f_k dw_k) + \frac{1}{2}d(\sum_{k\geq 1} z_k w_k f_k)\end{aligned}$$

On obtient alors les équations suivantes

$$w_k f_k = A_k + \frac{\partial V}{\partial z_k}, z_k f_k = B_k + \frac{\partial V}{\partial w_k} \qquad (1), (2)$$

où V est une application définie sur $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ à valeurs réelles. Chacune des deux équations précédentes détermine les angles $(f_n)_{n\geq 1}$ à partir de la connaissance de V.

En dépit du fait que les coordonnées polaires ne sont pas bien définies à l'origine, on peut introduire, avec un abus de notation, les champs de vecteurs suivants définis en tout point :

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} = iz_k \frac{\partial}{\partial z_k} - iw_k \frac{\partial}{\partial w_k} \; .$$

En multipliant (1), par iz_k et (2) par $-iw_k$ et en additions les deux équations on obtient pour tout $k \geq 1$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_k} = -iz_k A_k + iw_k B_k \ . \tag{3}$$

Après avoir été normalisée, l'application V est déterminée à partir du système d'une infinité d'équations (3) comme somme d'une série téléscoping dont le terme général est solution d'une version moyennée de (3).

D'abord on vérifie les conditions d'intégrabilité de (3) :

Lemme 2.— *Pour tout j, k on a*

i)
$$\frac{\partial}{\partial \beta_j}(-iz_k A_k + iw_k B_k) = \frac{\partial}{\partial \beta_k}(-iz_j A_j + iw_j B_j)$$

ii)
$$\int_{|z_k|=r_k} (z_k A_k - w_k B_k) d\beta_k = 0 \ .$$

On démontre ce lemme en prouvant que ces deux conditions d'intégrabilité sont équivalentes aux conditions suivantes :

1) les tores $T = \{(x,y) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)/x_k^2 + y_k^2 = r_k^2$ pour tout $k \geq 1\}$ sont isotropes,

2) le feuilletage des tores de Liouville est "trivial" et le cycle $x_n^2 + y_n^2 = r_n^2$, $x_k = y_k = 0$ pour tout $k \neq n$ dans T est homotope à Γ_n, où Γ_n est le cycle sur le tore de Liouville dans L_0^2 tel que $J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n} \eta_G$ (voir [AN] ou [FM]).

La condition 1) est satisfaite grâce à la proposition 1, 2) grâce à l'aide de [MT1] et [K].

Introduisons maintenant pour une fonction $f : \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2) \to \mathbf{C}$ réelle analytique la moyenne

$$[f]_N(z,w) = \int_{(S^1)^N} \frac{d\alpha'_1 \cdots d\alpha'_N}{(2\pi)^N} f((z_k e^{i\alpha'_k}, w_k e^{-i\alpha'_k})_{k\leq N}, (z_k, w_k)_{k>N}) \ .$$

Il n'est pas difficile à montrer que $[f]_N$ est réelle analytique, $[f]_\infty := \lim_{N\to\infty}[f]_N$ est bien définie et réelle analytique. On est maintenant en position de résoudre les équations (3). Evidemment les solutions de (3) ne sont pas uniques. C'est ainsi qu'on étudie le problème au bord

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_k} = -iz_k A_k + iw_k B_k, [V]_\infty = 0 \ . \tag{4}$$

On cherche une solution analytique de (4) dans un voisinage $U \subset \ell^2_{1/2}(\mathbf{C}^2)$ de $(z^\circ, w^\circ) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ sous la forme d'une série $V = \sum_{N\geq 1} V_N$ avec $V_N = [V]_{N-1} - [V]_N$ pour $N \geq 1$ et $[V]_0 = V$.

Moyennant (4) et en utilisant le lemme 2 on obtient les équations suivantes pour V_N :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial V_N}{\partial \beta_n} &= [z_N A_N - w_N B_N]_{N-1} \\ 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} V_N((z_k, w_k)_{k\neq N}, (z_N e^{i\alpha}, w_N e^{-i\alpha})) \end{aligned} \tag{5}$$

On a

Proposition 2.— *Soit $(z^0, w^0) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$. Alors il existe un voisinage U de (z^0, w^0) dans $\ell^2_{1/2}(\mathbf{C}^2)$ telle que pour tout $N \geq 1$*

i) $z_N A_N - w_N B_N$ est bien défini et analytique sur U

ii) (5) a une unique solution V_N analytique sur U et réelle sur $U \cap \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$

iii) $|V_N(z,w)| \leq 2||[z_N A_N - w_N B_N]_{N-1}||_{L^2(S^1_N)}$

iv) $V := \sum_{N\geq 1} V_n$ converge absolument et uniformément sur U

De plus V est analytique sur U et est la solution unique de (4).

Rappelons d'abord que $A_k = \frac{1}{2i} w_k - 2\eta(\frac{\partial}{\partial z_k}) = \frac{1}{2i} w_k - 2\eta_G((d_q\Lambda)^{-1}(\frac{\partial}{\partial z_k}))$.

Ainsi pour définir A_k sur un voisinage complexe il est nécessaire de prolonger $d_q\Lambda$ sur un tel voisinage. Ceci se fait à l'aide de l'étude précise de l'asymptotique de $d_q\Lambda$.

On obtient la

Proposition 3.— *Soit $q_0 \in L^2_0$. Alors il existe un voisinage $\widetilde{U}$ de 0 dans $L^2_0(\mathbf{C})$ où $\Lambda(q_0 + \widetilde{U})$ est bien défini tel que pour tout $q \in q_0 + \widetilde{U}$ et $n \geq 1$ on a*

1) $d_q\Lambda_n(e^{2\pi i k x}) = \mathcal{O}(n^{-1/2})\mathcal{O}(k^{-1})$

2) $d_q\Lambda_n(e^{2\pi i k x}) = \mathcal{O}(n^{1/2})\mathcal{O}(k^{-2})$.

uniformément pour $k \in \mathbf{Z} - \{\pm n, 0\}$.

De plus il est possible d'obtenir les estimations suivantes sur $U = \Lambda(\widetilde{U})$.

Lemme 3.— *Pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$ on a sur un voisinage U complexe de $(z^0, w^0) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$, les estimations suivantes*

$$||A_N||_{L^\infty(U)} = \mathcal{O}(N^{-1-\varepsilon}), ||B_N||_{L^\infty(U)} = \mathcal{O}(N^{-1-\varepsilon}) \ .$$

Ce lemme traduit en quelque sorte que $d_q\Lambda$ est proche de l'identité. Pour prouver la proposition 2 il suffit maintenant de résoudre (5) à l'aide de la transformation de Fourier inverse par rapport à la variable z_n, ensuite de remarquer que sur $U \cap \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ on a $\overline{A}_k = B_k$, ce qui implique que V_N devient réel sur $U \cap \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$. Ensuite iv) est prouvé à l'aide de iii) (qui est une conséquence du lemme de Poincaré) et des estimations du Lemme 3. Finalement on démontre que $\sum_{N\geq 1} V_N$ est solution de (4) en substituant cette somme dans l'équation (4) et en utilisant les conditions d'intégrabilité du Lemme 2.

Les angles $(f_k)_{k\geq 1}$ sont calculés à partir de l'équation (1). Comme $i\frac{\partial V}{\partial \beta_n} = z_n A_n - w_n B_n$ on a

$$i\frac{\partial V}{\partial \beta_n}|_{w_n=0} = -z_n\frac{\partial V}{\partial z_n}|_{w_n=0} + w_n\frac{\partial V}{\partial w_n}|_{w_n=0} = z_n A_n|_{w_n=0} - w_n B_n|_{w_n=0}$$

Ainsi $z_n(A_n + \frac{\partial V}{\partial z_n})|_{w_n=0} = 0$ pour tout $z, w \in U$ et on conclut en utilisant l'analyticité que $A_n + \frac{\partial V}{\partial z_n}|_{w_n=o} = 0$. Nous avons alors

Proposition 4.— *Soit U le voisinage complexe de $(z^0, w^0) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ de la proposition 2. Alors $f_n = \frac{1}{w_n}(A_n + \frac{\partial V}{\partial z_n})$ est bien défini et analytique sur U.*

Remarquons aussi qu'il n'est pas difficile à montrer que f_n est réel sur $U \cap \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$.

Jusqu'ici nous avons déterminé les angles cherchés $(f_n)_{n\geq 1}$. Pour définir Θ il reste à justifier le calcul formel de la forme $\Theta_*\eta_0$ en début du chapitre 3. Pour cela il suffit de montrer que $\sum_{k\geq 1} z_k w_k f_k$ et $\sum z_k w_k df_k$ sont bien définies.

Ceci se déduit du

Lemme 4.— *Soit U le voisinage complexe de $(z^0, w^0) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ de la proposition 2. Alors on a pour chaque $0 < \varepsilon < 1/2$ dans U $f_k = \mathcal{O}(k^{-\varepsilon})$ uniformément.*

Pour prouver ce lemme observons qu'on a, en utilisant la proposition 4

$$|f_k(z, w)| \leq \sup_{(z,w)\in U} |\frac{\partial A_k}{\partial w_k}| + \sup_{(z,w)\in U} |\frac{\partial^2 V}{\partial z_k \partial w_k}|$$

pour $(z, w) \in U$. D'après la proposition 2 et l'équation (5), il est possible de montrer que $\frac{\partial V}{\partial z_k}$ peut être estimée par les A_n et B_n et ainsi on peut estimer les dérivées secondes de V par les dérivées premières $\frac{\partial A_k}{\partial z_j}, \frac{\partial A_k}{\partial w_j}, \frac{\partial B_k}{\partial z_j}$ et $\frac{\partial B_k}{\partial w_j}$. Mais $A_k = \frac{1}{2i} w_k - 2_{\eta_G}((d_q\Lambda)^{-1}(\frac{\partial}{\partial z_k}))$, alors une estimation de $\frac{\partial A_k}{\partial z_j}$, par exemple, doit utiliser la dérivée seconde $d_q^2\Lambda$ de l'application Λ. Pour l'éviter on utilise le fait que Λ est analytique sur U ainsi que $d_q^2\Lambda$ est un opérateur bilinéaire *borné* et on déduit l'estimation a priori

$$\frac{\partial A_k}{\partial z_j} = \mathcal{O}(\sqrt{j}k^{-1-\varepsilon}) \tag{6}$$

à l'aide du Lemme 3. Mais

$$\frac{\partial A_k}{\partial z_j} - \frac{\partial A_j}{\partial z_k} = 2\omega\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big) = 2\omega_G\Big((d_q\Lambda)^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)(d_q\Lambda)^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)\Big).$$

Ainsi en réutilisant l'asymptotique précise de $d_q\Lambda$ il est possible d'obtenir que $\frac{\partial A_k}{\partial z_j} - \frac{\partial A_j}{\partial z_k} = \mathcal{O}(k^{-1-\varepsilon})$. A partir de ceci et de (6) il n'est pas difficile d'obtenir le contenu du Lemme 4 sans utiliser $d_q^2\Lambda$ explicitement.

Nous pouvons maintenant définir l'application $\Theta \; : \; (\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2), \omega) \to (\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2), \omega_0), (z_j, w_j)_{j\geq 1} \mapsto (e^{if_j} z_j, e^{-if_j} w_j)_{j\geq 1}$. On a la

Proposition 5.— *L'application Θ est*

i) réelle analytique

ii) pour chaque $(z,w) \in \ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2), d_{(z,w)}\Theta$ est bijective

iii) Θ est injective, surjective et ainsi Θ^{-1} est réelle analytique

iv) $\Theta_*\omega = \omega_0$.

D'après la construction des angles $(f_k)_{k\geq 1}, f_n$ est réel analytique et ainsi chaque composante Θ_n. De plus Θ est localement borné en vertu du Lemme 4. Ainsi l'application Θ est réelle analytique. Pour prouver ii) soit d'abord $X \in \ker(d_{(z,w)}\Theta)$, alors

$$\omega(X,Y) = \omega_0(d_{(z,w)}\Theta(X), (d_{(z,w)}\Theta(Y)) = 0$$

pour tout $Y \in T_{(z,w)}\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$. Mais ω est non-dégénéré, ce qui implique que $X = 0$. La surjectivité de $d_{(z,w)}\Theta$ est une conséquence du fait qu'on a $d_{(z,w)}\Theta = A(\mathbf{1} + B)$ avec A un opérateur diagonal inversible de $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ dans $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ et B un opérateur compact. La dérivée $d_{(z,w)}\Theta$ est alors un opérateur de Fredholm. On conclut que la dérivée $d_{(z,w)}\Theta$ est bijective. Ensuite par construction de l'application Θ on constate que $\Theta^{-1}(0) = \{0\}$ et que Θ est propre. On déduit à l'aide de ii) comme dans [GT] que Θ est bijective. Finalement la propriété iv) est la conséquence de la construction du chapitre 3, i.e. que les angles $(f_k)_{k\geq 1}$ vérifient les équations (1) et (2).

La preuve du théorème 1 est achevée en posant $\Omega = \Theta \circ \Lambda$ et en utilisant la proposition 1 et la proposition 5.

4 Appendice

a) Remarquons qu'on peut calculer la dérivée $d_q\Omega$ en $q = 0$. En effet on a

$$d_q\Omega_n[p] = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}(p_{2n}, p_{2n-1}) \text{ en } q = 0 \ .$$

b) Les coordonnées $(x_j, y_j)_{j\geq 1}$ dans $\ell^2_{1/2}(\mathbf{R}^2)$ satisfaisant les conditions i), ii), iii) du théorème 1 sont uniques modulo de transformations engendrées par

1) $(x_j, y_j)_{j\geq 1} \to (x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})_{j\geq s}$ où $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une permutation de copies de $\mathbf{R}^2$.

2) $(x_j, y_j)_{j\geq 1} \to ((\cos g_j)x_j - (\sin g_j)y_j, (\sin g_j)x_j + (\cos g_j)y_j)_{j\geq 1}$ où g_j sont des fonctions réelles analytiques de $J_k = \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)(k \geq 1)$ avec $\frac{\partial g_i}{\partial J_k} = \frac{\partial g_k}{\partial J_j}$ $(j, k \geq 1)$.

5 Bibliographie

[AN] Y.I. Arnold, S.P. Novikov (Eds) : "Dynamical systems IV" Encyclopedia of Math. Sci., Springer 1990.

[BBGK1] D. Bättig, A. Bloch, J.C. Guillot, T. Kappeler : "La structure symplectique de l'espace de phase de l'équation de Korteweg-de Vries périodique". C.R.A.S., 317 (1993), Séries I, 1019-1022.

[BBGK2] D. Bättig, A. Bloch, J.C. Guillot, T. Kappeler : "On the symplectic structure of the phase space for periodic KdV, Toda and defocussing NLS". Prépublication Ohio State University, Columbus (USA), 1993.

[FM] H. Flaschka, D. Mc Laughlin : "Canonically conjugate variables for the Korteweg de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions". Progress of Theor. Phys. 55 (1976), 438-456.

[GT] J.B. Garnett, E. Trubowitz : "Gaps and bands of one dimensional periodic Schrödinger Operators II". Comm. Math. Helv. 62 (1987), 18-37.

[K] T. Kappeler : "Fibration of the phase space for the Korteweg-de Vries equation". Ann. Inst. Fourier 41 (1991), 539-575.

[MT1] H.P. Mc Kean, E. Trubowitz : "Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinetely many branch points", CPAM 24 (1976), 143-226.

[MT2] H.P. Mc Kean, E. Trubowitz : "Hill's surface and their theta functions", Bull. of AMS 84, 6 (1978), 1042-1085.

[PT] J. Pöschel, E. Trubowitz : "Inverse spectral theory", Academic Press, 1987.

D. Bättig
Université Paris XIII
Département de Mathématiques
URA 742, CNRS
Avenue J.B. Clément
93430 VILLETANEUSE