G. Vodev

P. Stefanov

Distribution des résonances pour le système de l'élasticité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 10, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A11_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

DISTRIBUTION DES RESONANCES POUR LE SYSTEME DE L'ELASTICITE.

G. VODEV & P. STEFANOV

Exposé n° X

15 Février 1994

Distribution des résonances pour le système de l'élasticité

Georgi Vodev
(en collaboration avec Plamen Stefanov)
Départment de Mathématiques
Université de Nantes

15 Février 1994

1 Introduction

Dans cet exposé, je vais présenter des résultats obtenus en collaboration avec P. Stefanov ([SV1],[SV2]). Nous nous intéressons à la distribution des résonances pour le système de l'élasticité à l'extérieur d'un obstacle strictement convex avec des conditions de Neumann sur le bord. Soit $\mathcal{O}$ un obstacle strictment convex dans $\mathbf{R}^3$ à bord Γ de classe C^∞ et soit $\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ son complémentaire. Je vais noter par Δ^* l'opérateur de l'élasticité qui est un opérateur de deuxième degré à valeurs matricielles de la forme suivante

$$\Delta^* v = \mu_0 \Delta v + (\lambda_0 + \mu_0)\nabla(\nabla \cdot v),$$

$v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$, où λ_0, μ_0 sont des constantes applées les constantes de Lamé qui verifient les conditions suivantes

$$\mu_0 > 0, \qquad 3\lambda_0 + 2\mu_0 > 0. \tag{1}$$

Les conditions de Neumann pour Δ^* sont de la forme

$$(Bv)_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(v)\nu_j|_\Gamma = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

où $\sigma_{ij}(v) = \lambda_0 \nabla \cdot v \delta_{ij} + \mu_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, ν est la normal à Γ. Il est bien conu que l'opérateur $-\Delta^*$ opérant sur les fonctions $v \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\bar{\Omega}; \mathbf{C}^3)$ verifiantes (2) admet une réalization autoadjointe dans $L^2(\Omega; \mathbf{C}^3)$ que je vais noter par L. L'opérateur L est positive et n'a pas de spectre ponctuel. Donc, la résolvent tronquée $R_\chi(\lambda) = \chi \left(L - \lambda^2 \right)^{-1} \chi$, $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 au voisinage de Γ, admet un prologement méromorphe de $\Im\lambda < 0$ dans le plan complex $\mathbf{C}$ avec des pôles possibles dans $\Im\lambda > 0$ ([Va], [Vo]). Les pôles de $R_\chi(\lambda)$ sont applés résonances (conus aussi comme pôles de la matrice de diffusion).

Pour l'opérateur de Laplace dans Ω avec des conditions de Dirichlet ou Neumann sur le bord la distribution des résonances est relativement bien conue. Si $\mathcal{O}$ est noncaptive à bord C^∞, on sait que $\forall C_1 > 0, \exists C_2 = C_2(C_1)$ telle que dans la région

$$\Lambda = \{ \Im\lambda \leq C_1 \log |\lambda| - C_2 \}$$

il n'y a pas de résonances. Ceci se deduit des résultats des Melrose et Sjöstrand [MS1], [MS2] sur la propagation des singularités soit par la méthode des Lax et Phillips [LP2] soit par la méthode de Vainberg ([Va]). Si $\mathcal{O}$ est noncaptive à bord analythique il etait démontré par Bardos, Lebeau et Rauch [BLR] que la région libre des résonances est de la forme

$$\Im\lambda \leq C_1 |\lambda|^{1/3} - C_2.$$

Ceci reste vrai (avec d'autres constantes) si l'obstacle est strictement convex à bord C^∞ (voir [HL], [SZ]). Par contre, si $\mathcal{O}$ est captive Lax et Phillips [LP1] ont fait la conjecture qu'il existe des résonances qui convergent vers l'axe réel. Mais en général ceci est faux comme le montre l'exemple de deux corps strictement convex. Dans ce cas il y a un seul rayon captive et il etait démontré par Ikawa [I1] qu'il existe une bande près de l'axe réel libre des résonances. D'autre part, au-dessus de cette bande dans Λ il existe une infinité des résonances dont une étude très precise est faite dans [G].

Dans le cas du système de l'élasticité les singularités se propagent dans Ω le long de deux rayons aux vitesses $c_1 = \sqrt{\mu_0}, c_2 = \sqrt{\lambda_0 + 2\mu_0}$ (voir [T2], [Y]). En particulier, les obstacles strictement convex sont noncaptives pour le problème de Dirichlet et donc au niveau de distribution des résonances la situation est pareille comme dans le cas de l'opérateur de

Laplace. Dans le cas des conditions de Neumann sur le bord il etait montré par Taylor [T2] qu'il existe en plus une troisième onde sur le bord qui porte des singularités et qui se propage à une vitesse $c_R < c_1$ applée la vitesse de Rayleigh. Donc, tout obstacle est captive pour le système de l'élasticité avec des conditions de Neumann sur le bord. Par conséquent, il etait démontré par Kawashita [K] (voir aussi [IN]) que l'énergie locale n'admet pas de décroissance uniforme. Au niveau des résonances ce n'est pas raisonnable d'avoir un comportement pareil au celui dans le cas du problème de Dirichlet. En particulier, si l'obstacle est strictement convex on ne peut pas avoir un tel domaine libre des résonances. Quand même, car la vitesse des ondes de Rayleigh est strictement inférieur aux autres deux vitesses, nous montrons qu'il existe un domaine assez grand libre des résonances. De plus, nous preuvons que l'existence des ondes de Rayleigh entraine l'existence d'une suite infinie des résonances convergantes vers l'axe réel. Notre résultat principal est le théorème suivant [SV2].

Théorème 1.1

(a) Pour tout $C_1 > 0$ il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $N > 0$ il n'y ait pas de résonances dans le domaine

$$C_N|\lambda|^{-N} < \Im\lambda < C_1 \ln|\lambda|, \qquad |\Re\lambda| > C_2.$$

(b) Il existe deux suites infinies $\{\lambda_j\}$, $\{-\bar{\lambda}_j\}$ de résonances distinctes de L telle qu'on ait

$$0 < \Im\lambda_j \leq C_N|\lambda_j|^{-N} \qquad \forall N > 0.$$

Dans le cas où $\mathcal{O}$ est une boule nous avons démontré [SV1] que la suite λ_j tend vers l'axe réel exponentiallement rapide et que le domaine libre des résonances est de la forme $Ce^{-\gamma|\lambda|} < \Im\lambda < C_1|\lambda|^{1/3}$, $|\Re\lambda| > C_2$. Donc, on peut faire la conjecture qu'un tel domaine libre des résonances toujour existe sous l'hypothèse que le bord soit analythique.

2 Idée de preuve

On va profiter du résultat de Melrose [M] qui dit que les résonances du problème de Dirichlet sont les pôles de l'opérateur de Neumann $N(\lambda)$, alors que les résonances du problème de

Neumann sont les pôles de l'inverse $N(\lambda)^{-1}$. Je rappele que l'opérateur de Neumann $N(\lambda)$: $L^2(\Gamma; \mathbf{C}^3) \to L^2(\Gamma; \mathbf{C}^3)$ pour le système de l'élasticité est defini par

$$N(\lambda)g = Bv$$

où $v = R_D(\lambda)g$ est la solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\Delta^* + \lambda^2)v & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ v & = & g & \text{sur } \Gamma, \\ v & - & \text{sortante.} & \end{array} \right. \tag{3}$$

Comme l'obstacle est strictement convex, l'opérateur de Neumann $N(\lambda)$ est holomorphe dans Λ. De plus, c'est un opérateur pseudodifferentiel à grand paramètre λ dont la varieté caractéristique est

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*\Gamma : \quad |\xi|_x = c_R^{-1}\}.$$

Comme $c_R < c_1$, Σ est contenu dans la zone elliptique de problème (3). Soit $\lambda \in \Lambda$ résonance du problème de Neumann. Il est facile de voir qu'il existe une fonction $f, \|f\| = 1$, telle que $N(\lambda)f = 0$. On a le lemme suivant.

Lemme 2.1 $\tilde{WF}f \subset \Sigma$.

Cela veut dire que $\forall \eta(x, \xi) \in C_0^\infty(T^*\Gamma), \eta = 1$ au voisinage de Σ, $\eta = 0$ en dehors d'un autre voisinage telle qu'on ait

$$f - (\mathrm{Op}_\lambda \eta)f = O(|\lambda|^{-\infty}).$$

Posons $u = R_D(\lambda)f$. Il est claire que u verifie l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\Delta^* + \lambda^2)u & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ Bu & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u & - & \text{sortante.} & \end{array} \right. \tag{4}$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3), \chi = 1$ au voisinage de Γ. On a

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\Delta^* + \lambda^2)\chi u & = & [-\Delta^*, \chi]u & \text{dans } \Omega, \\ B(\chi u) & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u & - & \text{sortante,} & \end{array} \right. \tag{5}$$

d'où

$$\Im\lambda^2\|\chi u\|^2 = \Im([-\Delta^*, \chi]u, \chi u),$$

ce qui entraine

$$|\Im\lambda^2| \leq \frac{\|[-\Delta^*, \chi]u\|}{\|\chi u\|}.$$

D'autre part, par le théorème de trace c'est facile de voir que

$$\|\chi u\| \geq C|\lambda|^{-2}\|f\| = C|\lambda|^{-2}.$$

Donc,

$$|\Im\lambda^2| \leq C|\lambda|^2\|[-\Delta^*, \chi]R_D(\lambda)f\|.$$

Comme l'obstacle est strictement convex, on peut construire une paramétrixe de problème de Dirichlet (3) dans un voisinage assez petit de Γ, que je vais noter par $\tilde{R}_D(\lambda)$. Vu de Lemme 2.1 on obtient

$$|\Im\lambda^2| \leq C|\lambda|^2\|[-\Delta^*, \chi]\tilde{R}_D(\lambda)(\mathrm{Op}_\lambda\eta)f\| + O(|\lambda|^{-\infty}).$$

L'avantage de cette majoration est qu'elle ne consiste que de la paramétrixe dans la zone elliptique. Donc, $\tilde{R}_D(\lambda)(\mathrm{Op}_\lambda\eta)$ se représente comme une somme finie d'opérateurs de Fourier à phase complexe qui verifie

$$\Im\psi(x) \sim c_0\mathrm{dist}(x, \Gamma), \quad c_0 > 0,$$

pour $\mathrm{dist}(x, \Gamma)$ assez petite. Ceci entraine

$$|\Im\lambda^2| \leq C|\lambda|^2 e^{-c|\lambda|} + O(|\lambda|^{-\infty}),$$

ce qui démontre la premier partie du théorème.

Afin de démontrer la deuxième partie nous déduisons de l'existence de la paramétrixe pour l'opérateur de Neumann l'estimation suivante.

Lemme 2.2 *Il existe $a, b > 0$ tels que, sur les courbes $l^\pm = \{\pm\Im\lambda = a\log|\lambda| - b\}$, on ait*

$$\|N(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{\log|\lambda|}. \tag{6}$$

Pour démontrer l'existance des résonances proches de l'axe réel on va raisoner par l'absurde. Supposons que $N(\lambda)^{-1}$ soit analytique dans $\Lambda_{a,b}$ (la région encadrée par les courbes $l^{\pm}$). Par conséquent, en utilisant les résultats dans [Vo], on obtient

$$\|N(\lambda)^{-1}\| \leq C' e^{C'|\lambda|^4} \qquad \text{dans} \quad \Lambda_{a,b}. \tag{7}$$

Par le principe de Fragmén-Lindelöf on deduit des (6) et (7)

$$\|N(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{\log \lambda}, \quad \lambda > C > 0$$

sur $\Im\lambda = 0$. Ceci entraine

$$\|N(\lambda)f\| \geq C_1 \log \lambda, \quad \lambda > C, \forall f, \|f\| = 1. \tag{8}$$

D'autre part, si on prend $\lambda = \lambda_j$ (les valeurs propres de $c_R\sqrt{-\Delta_\Gamma}$) on peut démontrer qu'il existe f_j, $\|f_j\| = 1$, telles que

$$\|N(\lambda_j)f_j\| \leq C_2$$

avec une constante C_2 indépendente de λ_j, ce qui est contradictoire à (8) (voir aussi [K]). Donc, $N(\lambda)^{-1}$ ne peut pas être analytique dans $\Lambda_{a,b}$, ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

References

[A] J. D. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solid*, North Holland, New York, 1973.

[BLR] C. BARDOS, G. LEBEAU AND J. RAUCH, *Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities*, Invent. Math. **90**(1987), 77-114.

[CP] F. CARDOSO AND G. POPOV, *Rayleigh quasimodes in linear elasticity*, Comm. P.D.E. **17**(1992), 1327–1367.

[D] J. DUISTERMAAT, *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **27**(1974), 207–281.

[G] C. GÉRARD, *Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convex*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n. 31, **116**, 1988.

[Gr] R. GREGORY, *The propagation of Rayleigh waves over curved surfaces at high frequency*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **70**(1971), 103–121.

[Gu] J. C. GUILLOT, *Existence and uniqueness of a Rayleigh surface wave propagating along the free boundary of a transversely isotropic elastic half space*, Math. Meth. Appl. Sci. **8**(1986), 289–310.

[HL] T. HARGÉ ET G. LEBEAU, *Diffraction par un convexe*, preprint, Univ. Paris-Sud, 1993.

[I1] M. IKAWA, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ. **23-1**(1983), 127–194.

[I2] M. IKAWA, *Precise information on the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ. **27-1** (1987), 69–102.

[I3] M. IKAWA, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J. Math. **22**(1985), 657–689.

[IN] M. IKEHATA AND G. NAKAMURA, *Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle*, Japan J. Appl. Math. **6**(1989), 83–95.

[K] M. KAWASHITA, *On the local-energy decay property for the elastic wave equation with the Neumann boundary conditions*, Duke Math. J. **67**(1992), 333–351.

[LP1] P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS, *Scattering Theory*, New York, Academic Press, 1967.

[LP2] P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS, *A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix*, Arch. Rat. Mech. Anal. **40** (1971), 268–280.

[M] R. B. MELROSE, *Polynomial bounds on the distribution of poles in scattering by an obstacle*, Journées *Équations aux dérivées partielles*, Saint-Jean de Monts, 1984.

[MS1] R. B. MELROSE AND J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems, I*, Comm. Pure Appl. Math. **31**(1978), 593–617.

[MS2] R. B. MELROSE AND J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems, II*, Comm. Pure Appl. Math. **35**(1982), 129–168

[R] LORD RAYLEIGH, *On waves propagated along plane surface of an elastic solid*, Proc. London Math. Soc. **17**(1885), 4–11.

[S] M. A. SHUBIN, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[SZ] J. SJÖSTRAND AND M. ZWORSKI, *The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles*, preprint, Mittag-Leffler Inst., 1993.

[SV1] P. STEFANOV AND G. VODEV, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear ellasticity outside a ball*, Ann. Inst. H.Poincaré (Physique Théorique), to appear.

[SV2] P. STEFANOV AND G. VODEV, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear ellasticity in the exterior of a strictly convex body*, submitted.

[T1] M. TAYLOR, *Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon*, in Proc. Conf. on P.D.E. and Geometry, Marcel Dekker, New York, 1979, 273–291.

[T2] M. TAYLOR, *Pseododifferential Operators*, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[Ti] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1968.

[Y] K. YAMAMOTO, *Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations*, Japan J. Math. **14**(1988), 119–163.

[Va] B. R. VAINBERG, *Asymptotic Methods in Equations of Mathematical Physics*, Gordon and Breach sci. publ., New York, 1988.

[Vo] G. VODEV, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 205–216.

Université de Nantes
Département de Mathématiques
Chemin de la Houssinière
44072 NANTES CEDEX