Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

X. P. Wang

Sections efficaces dans le problème à N-corps

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A7_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SECTIONS EFFICACES DANS LE PROBLEME A N-CORPS

X. P. WANG

Exposé n° VII

15 décembre 1992

Sections Efficaces dans le Problème à N-Corps

Xue Ping WANG
Université de Nantes

1 Définitions dans le cas de deux corps.

Dans cet exposé, on s'intéresse à la finitude et à l'asymptotique à haute énergie des sections efficaces dans le problème à N-corps. Pour expliquer le point de départ de notre travail, je commence par rappeler deux définitions des sections efficaces dans le problème de diffusion à deux corps.

Soit (P_0, P) un couple d'opérateurs de Schrödinger autoadjoints dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ avec $P_0 = -\Delta$ et $P = -\Delta + V(x)$, $V(\cdot)$ étant un potentiel de deux corps à courte portée. On sait alors que les opérateurs d'onde

$$W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itP}e^{-itP_0}$$

existent et sont complets. On note: $S = W_+^* W_-$ l'opérateur de diffusion et

$$S(\lambda) : L^2(\mathbf{S}^{d-1}) \to L^2(\mathbf{S}^{d-1}), \lambda \geq 0,$$

la matrice de diffusion. On note $t(\lambda, \omega, \omega')$ le noyau au sens des distributions de l'opérateur $T(\lambda) = S(\lambda) - 1$. $t(\lambda, \omega, \omega')$ est appelé l'amplitude de diffusion. Les sections efficaces pour le couple d'opérateurs (P_0, P) sont souvent définies de la manière suivante.

Définition 1. La section efficace, $\sigma_1(\lambda, \omega)$, à l'énergie λ avec la direction incidente ω, est définie par

$$\sigma_1(\lambda,\omega) = c_d(\lambda)\int_{\mathbf{S}^{d-1}_{\omega'}} |t(\lambda,\omega',\omega)|^2 d\omega'. \tag{1.1}$$

Ici $c_d(\lambda)$ est une constante de normalisation qui ne dépend que de λ et $c_d(\lambda) = (2\pi)^2/\lambda$, si $d = 3$. Voir [1].

Physiquement, $\sigma_1(\lambda, \omega)$ s'interprète comme le quotient (voir [9]):

$$\frac{\text{la probabilité totale de diffusion des particules dans l'unité de temps}}{\text{la densité du courant de probabilité dans l'onde incidente}}. \tag{1.2}$$

Dans cette définition, la finitude des sections efficaces est équivalente à l'intégrabilité de $|t(\lambda, \omega', \omega)|^2$ par rapport à la direction sortante ω'. Dans le problème à N-corps, on a pour le moment très peu d'informations sur les amplitudes de diffusion (voir [6, 15]). Il est donc prématuré d'utiliser cette définition pour étudier les sections efficaces. En 1980, Enss-Simon ([4]) ont introduit une autre définition des sections efficaces qui fait intervenir seulement l'opérateur de diffusion.

Définition 2. Pour $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ et $\omega \in \mathbf{S}^{d-1}$, on définit

$$g_\omega(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}_+} e^{i\sqrt{\lambda}\, x\cdot\omega} \frac{g(\lambda)}{\lambda^{1/4}}\, d\lambda.$$

Alors la section efficace, $\sigma(\lambda, \omega)$, avec la direction incidente ω, est définie comme une distribution par rapport à l'énergie par la relation

$$\int \sigma(\lambda, \omega)|g(\lambda)|^2 d\lambda = \|(S-1)g_\omega\|^2. \tag{1.3}$$

On remarque que dans [4], Enss-Simon ont choisi comme g_ω

$$g_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\lambda x\cdot\omega} g(\lambda)\, d\lambda.$$

Ici on a modifié le choix de g_ω pour que l'on puisse montrer l'équivalence des deux définitions des sections efficaces présentées ici. On peut aussi vérifier que si on note

$$\tilde{g}(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{i\sqrt{\lambda}\, \mu} \frac{g(\lambda)}{\lambda^{1/4}}\, d\lambda,$$

on a alors $\|g\| = \|\tilde{g}\|$. Ici $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(\mathbf{R})$.

Dans cette définition, la finitude de $\sigma(\lambda, \omega)$ est équivalente au fait que $(S-1)g_\omega \in L^2(\mathbf{R}^{d-1})$ pour tout $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$. Comme $g_\omega \notin L^2$ si $d > 1$, il est nécessaire de préciser la signification de $(S-1)g_\omega$ en utilisant des troncatures en variables $y = x - (x\cdot\omega)\omega$. Soit $\chi \in \mathcal{S}$ avec $\chi(0) = 1$. On peut, par exemple, prendre $\chi(y) = e^{-y^2}$ pour faciliter certains calculs. On pose

$$\chi_R(y) = \chi(y/R), \text{ pour } R > 1.$$

On définit alors $(S-1)g_\omega$ par

$$(S-1)g_\omega = \lim_{R\to\infty} (S-1)(\chi_R g_\omega), \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^{d-1}),$$

si la limite existe.

Rappelons que $\|(S-1)f\|^2$ représente la probabilité totale de retrouver les particules diffusées pour l'état entrant f. $e^{i\sqrt{\lambda}\, x\cdot\omega}$ étant une fonction propre généralisée de P_0 avec énergie λ, $g_\omega(\cdot)$ peut être interprétée comme fonction d'onde libre d'un faisceau de particules provenant de la direction ω. Dans le cas idéal où g est la fonction caractéristique d'un intervalle $[a, b]$, l'égalité (1.3) nous dit que l'intégration sur $[a, b]$ par rapport à l'énergie de la section efficace $\sigma(\lambda, \omega)$ est égale à la probabilité totale de retrouver les particules diffusées pour le faisceau de particules entrantes représenté par g_ω, ce qui est naturel, vu l'interprétation (1.2) pour des sections efficaces.

Remarque. On peut vérifier au moins formellement que les définitions 1 et 2 sont équivalentes. Ici on se contente de donner un argument de [13]. Voir [4] pour d'autres arguments. Soit $T(\lambda)$ l'opérateur défini par

$$T(\lambda) = F(\lambda)(S-1)F(\lambda)^*,$$

où $F(\lambda)$ est la représentation spectrale pour $P_0 = -\Delta$. Pour montrer l'équivalence des définitions 1 et 2, on calcule formellement la décomposition de g_ω dans la représentation spectrale de $-\Delta$:

$$\begin{aligned}
(F(\lambda)g_\omega)(\theta) &= C_1(\lambda)\int e^{-i\lambda^{1/2}\theta\cdot x} g_\omega(x)dx \\
&= C_1(\lambda)\int\int e^{i(\mu^{1/2}\omega-\lambda^{1/2}\theta)\cdot x}\frac{g(\mu)}{2\pi^{1/2}\mu^{1/4}}d\mu dx \\
&= C_2(\lambda)\delta(\omega-\theta)g(\lambda).
\end{aligned}$$

Ici $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ sont des constantes que l'on peut calculer. Ecrivant $T(\lambda)$ sous forme intégrale, on obtient, encore à un niveau formel,

$$\begin{aligned}
\|(S-1)g_\omega\|^2 &= \int \|T(\lambda)F(\lambda)g_\omega\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{d-1})}\, d\lambda \\
&= \int C_2(\lambda)^2|g(\lambda)|^2\int_{\mathbf{S}^{d-1}}|\int_{\mathbf{S}^{d-1}} t(\lambda;\omega',\theta)\delta(\theta-\omega)d\theta|^2\, d\omega' d\lambda \\
&= \int |g(\lambda)|^2\sigma_1(\lambda,\omega)\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Cela signifie que formellement, on a $\sigma(\lambda,\omega) = \sigma_1(\lambda,\omega)$ au sens des distributions. Les arguments formels ci-dessus peuvent être justifiés rigoureusement si on suppose, par exemple, que l'amplitude de diffusion est continue sur $\mathbf{S}^{d-1}\times\mathbf{S}^{d-1}$. $\square$

2 Hamiltoniens à N-corps.

Pour introduire les sections efficaces dans le problème à N-corps, on note $\mathbf{X} = \mathbf{R}^d$ l'espace de configuration totale (dans le repère où le centre de masse est fixé à l'origine) pour un système à N particules notées $\{1,2,\cdots,N\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des partitions en clusters du système $\{1,2,\cdots,N\}$. Pour chaque partition $a\in\mathcal{A}$, on note $\mathbf{X}^a$ l'espace de configuration intra-cluster et x^a les coordonnées intra-cluster. En utilisant la structure euclidienne sur $\mathbf{X} = \mathbf{R}^d$, on peut décomposer $\mathbf{X}$ comme somme directe et orthogonale: $\mathbf{X} = \mathbf{X}^a\oplus\mathbf{X}_a$, $\forall a\in\mathcal{A}$. On écrit souvent pour $x\in\mathbf{X}$: $x = x^a + x_a$. L'opérateur de Schrödinger à N-corps que l'on va étudier dans cet exposé est de la forme:

$$P = -\Delta + \sum_{a\in\mathcal{A}} V_a(x^a),$$

où Δ est le Laplacien sur $\mathbf{X}$ et pour simplifier l'exposé, on supposera par la suite que les V_a sont réguliers et vérifient

$$|\partial_y^\alpha V_a(y)| \le C_\alpha\langle y\rangle^{-\rho-|\alpha|},\ \forall\alpha, \tag{2.1}$$

pour $\rho > 1$ à préciser. Dans la théorie de la diffusion, il est souvent commode d'écrire, pour chaque $a \in \mathcal{A}$,

$$P = P^a - \Delta_a + I_a(x) = P_a + I_a(x),$$

où Δ_a est le Laplacien en variables x_a et $I_a(x)$ est l'interaction inter-cluster:

$$I_a(x) = \sum_{b \not\subseteq a} V_b(x^b).$$

Pour chaque canal de diffusion $\alpha = (a, E_\alpha, \phi_\alpha)$ avec $a \in \mathcal{A}$, $E_\alpha \in \sigma_{pp}(P^a)$ et

$$P^a \phi_\alpha = E_\alpha \phi_\alpha, \ \|\phi_\alpha\| = 1,$$

on peut définir un couple d'opérateurs d'onde

$$W_\pm^\alpha = \text{s-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itP} e^{-itP_a} \mathcal{J}_\alpha, \quad \text{où } \mathcal{J}_\alpha f(x) = \phi_\alpha(x^a) f(x_a) \text{ pour } f \in L^2(\mathbf{X}_a).$$

Etant donnés deux canaux de diffusion $\alpha = (a, E_\alpha, \phi_\alpha)$, $\beta = (b, E_\beta, \phi_\beta)$, on définit l'opérateur $S_{\beta\alpha}$ pour la diffusion $\alpha \to \beta$:

$$S_{\beta\alpha} = (W_\beta^+)^* W_\alpha^- : L^2(\mathbf{X}_a) \to L^2(\mathbf{X}_b).$$

Définition La section efficace, $\sigma_{\beta\alpha}(\lambda, \omega)$, pour la diffusion $\alpha \to \beta$, avec la direction incidente $\omega \in \mathbf{S}_a$, est définie comme une distribution en énergie par

$$\int \sigma_{\beta\alpha}(\lambda, \omega) |g(\lambda)|^2 d\lambda = \|(S_{\beta\alpha} - \delta_{\beta\alpha}) g_\omega\|_b^2. \tag{2.2}$$

Ici $\|\cdot\|_b$ est la norme dans $L^2(\mathbf{X}_b)$, $g \in C_0^\infty(\mathbf{I}_\alpha)$ avec $\mathbf{I}_\alpha =]E_\alpha, \infty[$ et

$$g_\omega(x_a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{in_\alpha(\lambda) x_a \cdot \omega} \frac{g(\lambda)}{n_\alpha(\lambda)^{1/2}} d\lambda,$$

où $n_\alpha(\lambda) = \sqrt{\lambda - E_\alpha}$.

Dans le cas où $\sigma_{\beta\alpha}(\lambda, \omega)$ est bien définie pour tout canal de sortie β, on peut alors étudier la section totale de diffusion avec le canal d'entrée α, $\sigma_\alpha(\lambda, \omega)$, qui est définie par

$$\sigma_\alpha(\lambda, \omega) = \sum_{\text{tout } \beta} \sigma_{\beta\alpha}(\lambda, \omega).$$

Le plan général de ce travail est le suivant: On montre d'abord que les sections efficaces, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda, \omega)$, sont bien définies au sens des distributions en λ. Ensuite, on cherche la représention de $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda, \omega)$ (ou de $\sigma_\alpha(\lambda, \omega)$) et l'identifie à une fonction continue et finalement, on étudie leur asymptotique à haute énergie. Ici, on se contente d'énoncer les résultats et de faire quelques comentaires. On renvoie à [19] pour les détails de la démonstration.

3 Résultats.

Pour deux canaux α, β quelconques, on ne pourrait pas en général espérer la finitude des sections efficaces, même si les potentiels d'interaction décroissent assez vite. Par cette raison, on va seulement étudier les sections efficaces dans le cas où l'un des deux canaux est un canal à deux clusters avec l'énergie intra-cluster hors des seuils. Pour fixer l'idée, on note désormais $\beta = (b, E_\beta, \phi_\beta)$ un canal de diffusion quelconque et $\alpha = (a, E_\alpha, \phi_\alpha)$ un canal de diffusion à deux clusters avec l'énergie hors des seuils:

$$E_\alpha \in \sigma_{pp}(P^a) \setminus \cup_{b \subset a} \sigma_{pp}(P^b).$$

Ceci implique que $\phi_\alpha(\cdot)$ décroit rapidement en variables x^a ([3]).

Considérons d'abord la diffusion $\alpha \to \beta$. Dans ce cas, la finitude des sections efficaces a été étudiée dans [2] après une intégration sur ω et dans [4] après une intégration sur λ. En particulier, il est démontré dans [4] que pour tout β et pour tout $E_\alpha < a < b$,

$$\int_a^b \sigma_{\beta\alpha}(\lambda, \omega)\, d\lambda < \infty. \tag{3.1}$$

On peut donc étudier la section totale avec le canal d'entrée α: $\sigma_\alpha(\lambda, \omega) = \sum_\beta \sigma_{\beta\alpha}(\lambda, \omega)$. Très récemment, dans un travail en commun avec D. Robert ([13]), nous avons démontré que $\sigma_\alpha(\lambda, \omega)$ est finie et, en fait égale à une fonction continue pour $(\lambda, \omega) \in (\mathbf{I}_\alpha \setminus \mathcal{T}) \times \mathbf{S}_a$, où $\mathbf{S}_a$ est la sphère d'unité dans $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{I}_\alpha =]E_\alpha, +\infty[$ et $\mathcal{T} = \cup_{c \in \mathcal{A}} \sigma_{pp}(P^c)$. Plus précisément, on a

$$\sigma_\alpha(\lambda, \omega) = \frac{1}{n_\alpha(\lambda)} \Im < R(\lambda + i0) I_a e_\alpha, I_a e_\alpha >, \text{ pour } (\lambda, \omega) \in (\mathbf{I}_\alpha \setminus \mathcal{T}) \times S_a, \tag{3.2}$$

où $R(\lambda \pm i0)$ sont les valeurs aux bords de la résolvante $(P - z)^{-1}$ et e_α est donné par

$$e_\alpha(x, \lambda, \omega) = \phi_\alpha(x^a) e^{i n_\alpha(\lambda) x_a \cdot \omega}$$

avec $n_\alpha(\lambda) = (\lambda - E_\alpha)^{1/2}$. Dans ce cas, on a le résultat suivant sur l'asymptotique à haute énergie pour $\sigma_\alpha(\lambda, \omega)$.

Theorem 3.1 *Soit $\alpha = (a, E_\alpha, \phi_\alpha)$ un canal de diffusion à deux clusters avec l'énergie hors des seuils. Sous l'hypothèse (2.1) avec $\rho > (n_a + 1)/2$, posons:*

$$\eta_a = \begin{cases} \frac{1}{2}, & si\ \rho > \frac{n_a+3}{2}, \\ \frac{1}{2}(\rho - \frac{n_a+1}{2} - \epsilon), & si\ \frac{n_a+1}{2} < \rho \le \frac{n_a+3}{2}, \end{cases} \tag{3.3}$$

pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. On a alors:

$$\sigma_\alpha(\lambda, \omega) = \frac{1}{4\lambda} \int_{X^a} |\phi_\alpha(x^a)|^2 \int_{\Pi_\omega} (\int_{\mathbf{R}} I_a(x^a, y + s\omega) ds)^2 dy dx^a + O(\lambda^{-1-\eta_a}), \tag{3.4}$$

quand $\lambda \to \infty$, uniformément en $\omega \in \mathbf{S}_a$. Ici $y = x_a - (x_a \cdot \omega)\omega$ et Π_ω est le plan d'impact: $\Pi_\omega = \{x_a; x_a \cdot \omega = 0\}$.

Dans le cas où le canal d'entrée, β, est quelconque, la situation est plus compliquée et à notre connaissance, la finitude n'a pas été abordée jusqu'à maintenant. Dans ce cas, on ne peut plus espérer la finitude des sections totales avec le canal d'entrée β. On se contente donc de discuter les sections efficaces, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$, pour la diffusion $\beta \to \alpha$, où α est un canal à deux clusters avec l'énergie intra-cluster hors des seuils.

On note

$$\Sigma_a = \mathbf{S}_a \setminus \cup_{b \not\subset a} \mathbf{X}_b, \tag{3.5}$$

et

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta} =]\max\{E_\alpha, E_\beta\}, +\infty[.$$

Pour $\omega \in \Sigma_b$, on définit:

$$\theta_\omega = \inf\{\theta \in]0,\pi/2]; \exists \omega' \in \mathbf{S}_b \cap (\cup_{c\not\subset b}\mathbf{X}_c) \text{ t.q. } \cos\theta = |\omega \cdot \omega'|\}. \tag{3.6}$$

Si $\#b = 2$, on a $\Sigma_b = \mathbf{S}_b$ et $\theta_\omega = \pi/2$ pour tout $\omega \in \mathbf{S}_b$. Etant donné un canal d'entrée $\beta = (b, E_\beta, \phi_\beta)$ et une direction incidente $\omega \in \Sigma_b$, on construit une microlocalisation de la manière suivante. Posons $\tau_{\beta,\omega} = |E_\beta||\mathrm{ctg}\theta_\omega|^2$. Pour $\lambda_0 > -E_\beta + \tau_{\beta,\omega}$, prenons $\delta > 0$ assez petit de sorte que

$$\mathbf{I}_0 \equiv [(1-2\delta)\lambda_0, (1+2\delta)\lambda_0] \subset]\tau_{\beta,\omega} - E_\beta, +\infty[.$$

Choisissons $\chi_b \in C_0^\infty(\mathbf{X}_b^*)$ telle que

$$\chi_b(\xi_b) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi_b|^2 \in \mathbf{I}_0 \text{ et} |\xi_b/|\xi_b| - \omega| < \epsilon; \\ 0, & \text{si } |\xi_b|^2 \not\in [(1-2\delta)\lambda_0, (1+2\delta)\lambda_0] \text{ ou } |\xi_b/|\xi_b| - \omega| > 2\epsilon. \end{cases}$$

Soit $j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ avec $j(t) = 0$ si $t < 1/2$ et $j(t) = 1$ si $t > 1$. Posons

$$J_1(x) = \prod_{c \not\subset b} j(\frac{|x^c|}{\delta_1 |x|}),$$

où $\delta_1 > 0$ est assez petit, et

$$J_b(x) = J_1(x) j(|x|) + (1 - j(|x|)). \tag{3.7}$$

On peut alors vérifier que le support de $\chi_b(\xi_b)\nabla J_b(x)$ est inclus dans

$$|\xi_b - |\xi_b|\omega| < 2\epsilon|\xi_b|,$$

$$|x_b \cdot \xi_b| \le (2\epsilon + \cos(\theta_\omega - \epsilon))|x_b|\sqrt{(1+2\delta)\lambda_0} \le (1-\epsilon')\sqrt{\lambda}|x_b|,$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{I}_1 \equiv [(1-\delta)\lambda_1, (1+\delta)\lambda_1]$ avec $\lambda_1 = \lambda_0 + E_\beta$. Ici $\epsilon' > 0$ si $\delta, \delta_1 > 0$ sont suffisamment petits. Cela signifie que l'on peut appliquer les estimations micolocales de la résolvante établies dans [18] et obtenir pour tout $s > 1/2$,

$$\|\langle x\rangle^s \nabla J_b(x) \chi_b(D_b) R(\lambda \pm i0) \langle x\rangle^{-s}\| \le C\langle\lambda\rangle^{-1}, \quad \lambda \in \mathbf{I}_1, \tag{3.8}$$

pour tout $\lambda_1 > \tau_{\beta,\omega}$.

Theorem 3.2 *Soit $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$ la section efficace de la diffusion $\beta \to \alpha$ avec la direction incidente $\omega \in \Sigma_b$. Pour $\lambda_1 > \tau_{\beta,\omega}$, construire $J_b, \chi_b, \mathbf{I}_1$ comme ci-dessus. Alors sous la condition (2.1) avec $\rho > (\max\{\dim \mathbf{X}_a, \dim \mathbf{X}_b\}+1)/2$, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$ est bien défini comme une distribution sur $\mathbf{I}_1$ et pour tout $g \in C_0^\infty(\mathbf{I}_1)$, on a*

$$\begin{aligned}&\int \sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)|g(\lambda)|^2 d\lambda \\ = &\int \pi \|F_\alpha(\lambda)\mathcal{J}_\alpha^*\{1 - I_a R(\lambda+i0)\}Q_b e_\beta(\lambda,\omega)\|^2_{L^2(\mathbf{S}_a)} \frac{|g(\lambda)|^2}{(\lambda - E_\beta)^{1/2}} d\lambda.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ici $F_\alpha(\lambda)$ est la représentation spectrale de $-\Delta_a + E_\alpha$,

$$e_\beta(\lambda,\omega) = \phi_\beta(x^b) e^{i\sqrt{\lambda - E_\beta}\omega\cdot x_b}$$

et Q_b est donné par

$$Q_b = I_b(x)J_b(x)\chi_b(D_b) + [-\Delta, J_b(x)]\chi_b(D_b). \tag{3.10}$$

En particulier, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$ définie au sens de la distribution est égale à une fonction continue (λ,ω) pour $(\lambda,\omega) \in \{(\mu,\theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}_b; \theta \in \Sigma_b, \mu > \tau_{\beta,\theta}\}$:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega) = \frac{\pi}{(\lambda - E_\beta)^{1/2}} \|F_\alpha(\lambda)\mathcal{J}_\alpha^*\{1 - I_a R(\lambda+i0)\}Q_b e_\beta(\lambda,\omega)\|^2_{L^2(\mathbf{S}_a)}. \tag{3.11}$$

On remarque que $\lambda_1 > \tau_{\beta,\omega}$ est arbitraire. Par conséquent, on peut utiliser (3.11) pour étudier l'asymptotique à haute énergie de $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$ pour chaque $\omega \in \Sigma_b$ fixé.

Theorem 3.3 *Sous la condition du Théorème 3.2, on a:*

(i). Si $a = b$,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega) = \frac{1}{4\lambda}\int_{\Pi_\omega} |\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{X}^a} I_a(x^a, y + s\omega)\phi_\beta(x^a)\overline{\phi_\alpha(x^a)}\, dx^a ds|^2 dy + O(\lambda^{-1-\eta_a}), \tag{3.12}$$

quand $\lambda \to \infty$, pour chaque $\omega \in \Sigma_b$.

(ii). Si $a \neq b$,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega) = O(\lambda^{-1-2\eta_b}), \quad \lambda \to \infty. \tag{3.13}$$

Ici η_b est défini comme η_a dans le théorème 3.1 en remplaçant a par b.

4 Quelques commentaires.

Pour les détails de la démonstration des théorèmes 3.1-3.3, on renvoie à [19]. Ici on se contente de faire quelques commentaires.

(a). Dans le cas de deux corps, il y a une formule bien connue, dite formule de Born, pour les sections efficaces à haute énergie ([9]). Celle-ci se déduit par une méthode de perturbation de la formule optique pour les sections efficaces:

$$\sigma(\lambda,\omega) = \frac{1}{\lambda^{1/2}}\Im < R(\lambda+i0)Ve(\lambda,\omega), Ve(\lambda,\omega) >, \text{ pour } (\lambda,\omega) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}^{d-1}.$$

En fait, sous l'hypothèse (2.1) avec $\rho > (d+1)/2$ (rappelons que maintenant V est un potentiel de deux corps), on a pour tout $d/2 < s < \rho - 1/2$

$$\|\langle x\rangle^s V(x) R(\lambda \pm i0)\langle x\rangle^s V(x)\| = O(\lambda^{-1/2})$$

et

$$\sigma(\lambda, \omega) = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \Im < R_0(\lambda + i0)Ve(\lambda,\omega), Ve(\lambda,\omega) > +O(\lambda^{-3/2}),$$

lorsque $\lambda \to \infty$. Ici $e(\lambda,\omega) = e^{i\lambda^{1/2}x\cdot\omega}$ et $R_0(z)$ est la résolvante libre. Pour donner l'asymptotique à haute énergie, il suffit d'évaluer $\Im < R_0(\lambda + i0)Ve(\lambda,\omega), Ve(\lambda,\omega) >$ dans la limite $\lambda \to \infty$. Voir [16, 20] pour des résultats rigoureux dans un cadre plus général. Mais cet argument de perturbation ne s'applique plus au problème à N-corps, puisque dans ce cas, l'interaction intercluster I_a ne décroit plus sur l'espace de configuration total. Pour surmonter cette difficulté, nous avons utilisé dans la démonstration du Théorème 3.1 une approximation eikonale pour obtenir le terme principal et les estimations microlocales de la résolvante établies dans [18] pour estimer le reste.

(b). Concernant la finitude des sections efficaces, on pourrait démontrer que sous les conditions du théorème 3.2, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$ est finie et s'identifie à une fonction continue sur $(\mathbf{I}_{\alpha\beta}\backslash\mathcal{T})\times\Sigma_b$. Ceci est vrai pour tout opérateur de Schrödinger ayant une struture spectrale d'un problème de trois corps (voir [19] pour les détails). On remarque aussi que pour montrer la finitude de $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$, il est nécessaire d'imposer la condition $\omega \in \Sigma_b$. En fait, pour $\omega \in \mathbf{S}_b \setminus \Sigma_b$, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda,\omega)$ peut être infinie même si les potentiels décroissent assez vite (cf. Remark 3.1 dans [19]).

(c). De nombreux problèmes concernant les sections efficaces dans le problème à N-corps restent ouverts. Ici on en mentionne seulement un. Selon le résultat de Enss-Simon ([4]), la section efficace $\sigma_{\beta\alpha}(\lambda,\omega)$ d'un canal d'entrée α à deux clusters à un canal de sortie β quelconque est bien définie comme une distribution positive en λ sur $]E_\alpha,\infty[$. Ceci implique que $\sigma_{\beta\alpha}(\lambda,\omega)$ est une mesure et pour chaque ω fixé et pour tous $E_\alpha < a < b$, on a:

$$\int_a^b \sigma_{\beta\alpha}(\lambda,\omega)\, d\lambda < \infty.$$

D'autre part, on a démontré dans [13] que $\sigma_\alpha(\lambda,\omega) = \sum_\beta \sigma_{\beta\alpha}(\lambda,\omega)$ est une fonction continue de λ sur $]E_\alpha,\infty[\backslash\mathcal{T}$. Quelle est la forme de singularité de $\sigma_\alpha(\lambda,\omega)$ pour $\lambda \in]E_\alpha,\infty[\cap\mathcal{T}$?

(d). Après l'exposé oral de ce travail, l'auteur a reçu un preprint de Hiroshi Ito [7] dans lequel il a étudié l'asymptotique à haute énergie des sections efficaces dans le cas de 3-corps. Il a démontré, entre autres, le théorème 3.1 pour le problème à 3-corps sous l'hypothèse supplémentaire que 0 n'est valeur propre d'aucun des sous-Hamiltoniens à deux corps.

References

[1] W.O. Amrein, J.M. Jauch and K.B. Sinha, Scattering Theory in Quantum Mechanics, W.A. Benjamin, Reading, Mass., 1977.

[2] W.O. Amrein, D.B. Pearson and K.B. Sinha, Bounds on the total scattering cross section for N-body systems, Nuovo Cimento, 52 A (1979), 115-131.

[3] H. Cycon, R. Froese, W. Kirsch and B. Simon, Schrödinger Operators, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, 1987.

[4] V. Enss and B. Simon, Finite total cross-sections in nonrelativistic quantum mechanics, Commun. in Math. Phys., 76(1980), 177-209.

[5] W. Hunziker, Potential scattering at high energies, Helv. Phys. Acta 36(1963), 838-856.

[6] H. Isozaki, Structure of S-matrices for three body Schrödinger operators, Comm. Math. Phys., 146(1992), 241-258.

[7] H. Ito, High energy behavior of total scattering cross sections for 3-body quantum systems, preprint

[8] A. Jensen, The scattering cross section and its Born approximation at high energies, Helv. Phys. Acta 53(1980), 398-403.

[9] L.D.. Landau and E. M. Lifchitz, Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory, Pergmon Press, Oxford, 1965.

[10] P. Perry, I.M. Sigal and B. Simon, Spectral analysis of N-body Schrödinger operators, Ann. of Math., 114(1981), 519-567.

[11] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

[12] D. Robert and H. Tamura, Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross sections, Ann. Inst. H. Poincaré, 46(1987), 415-442.

[13] D. Robert and X.P. Wang, Pointwise semiclassical asymptotics for total cross sections in N-body problems, preprint 1992, Univ. Nantes.

[14] I.M. Sigal and A. Soffer, The N-particle scattering problem: asymptotic completene for short range systems, Ann. of Math. 126(1987), 35-108.

[15] E. Skibsted, Smoothness of N-body scattering amplitudes, preprint 1992, Univ. Aarhus.

[16] A. Sobolev, D.R. Yafaev, On the quasiclassical limit of total scattering cross-section in non-relativistic quantum mechanics, Ann. Inst. H. poincaré, 44(1986), 195-210.

[17] X.P. Wang, On the three-body long-range scattering problems, Lett. in Math. Phys., 25(1992), 267-276.

[18] X.P. Wang, Microlocal resolvent estimates of N-body Schrödinger operators, preprint 1992, Univ. Nantes.

[19] X.P. Wang, Total cross sections in N-body problems: finiteness and high energy asymptotics, preprint 1992, Univ. Nantes.

[20] D.R. Yafaev, The eikonal approximation for the Schrödinger equation, Proc. of the Steklov Inst. Math., 179(2) (1989), 251-266.

Université de Nantes
Département de Mathématiques
B.P. 1044
44037 NANTES CEDEX