F. Bethuel
O. Rey

Le problème des surfaces à courbure moyenne prescrite

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 5, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A5_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LE PROBLEME DES SURFACES A COURBURE MOYENNE PRESCRITE

F. BETHUEL & O. REY

Exposé n° V

15 Décembre 1992

1. Introduction

Les questions que nous allons considérer trouvent leur origine dans le problème de Plateau classique : étant donné Γ un arc de Jordan dans $\mathbf{R}^3$ il s'agit de trouver les surfaces paramétrées par le disque et d'aire minimale s'appuyant sur Γ. Une telle surface a nécessairement une courbe moyenne nulle, et si $u : D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ en est une paramétrisation conforme, u vérifie le système

$$\begin{aligned}&\Delta u = 0\\ &|u_x|^2 - |u_y|^2 = u_x.u_y = 0\\ &u_{|\partial D^2} \quad \text{est une paramétrisation continue et monotone de} \quad \Gamma\end{aligned}$$

Réciproquement, u solution de ce système paramètrise une surface de courbure moyenne nulle s'appuyant sur Γ, stationnaire (et non nécessairement minimale) quant à l'aire. Une généralisation naturelle de ce type de problème est de s'intéresser aux surfaces de courbure moyenne constante H : la question devient alors de trouver u solution du système

$$\begin{aligned}&\Delta u = 2H u_x \wedge u_y\\ &|u_x|^2 - |u_y|^2 = u_x.u_y = 0\\ &u_{|\partial D^2} \quad \text{est une paramétrisation continue et monotone de} \quad \Gamma\end{aligned}$$

Afin de doter le problème d'une structure variationnelle, on préfère considérer les problèmes de Dirichlet correspondants, c'est à dire chercher u solution de

$$(I) \qquad \begin{aligned}&\Delta u = 2H u_x \wedge u_y \quad \text{sur} \quad D^2\\ &u = \gamma \quad \text{sur} \quad \partial D^2\end{aligned}$$

où γ est une paramétrisation continue et monotone de Γ. On peut ensuite se servir de la liberté que nous avons dans le choix de γ comme paramétrisation de Γ pour sélectionner parmi ces solutions l'une d'entre elles qui satisfera la condition supplémentaire de conformalité. Les solutions du problème de Dirichlet peuvent être obtenues comme les points critiques de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 + \frac{2H}{3}\int_{D^2} u.u_x \wedge u_y$$

sur

$$H^1_\gamma = \{u \in H^1(D^2; \mathbf{R}^3); u|_{\partial D^2} = \gamma\}$$

La généralisation suivante consiste à seulement prescrire la courbure moyenne, sans lui imposer d'être constante - ce qui nous amène à considérer les problèmes suivants

$$(II) \qquad \begin{aligned}&\Delta u = 2H(u) u_x \wedge u_y \quad \text{sur} \quad D^2\\ &u = \gamma \quad \text{sur} \quad \partial D^2\end{aligned}$$

où $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est une fonction fixée. Le problème admet encore une structure variationnelle, avec la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 + \frac{2}{3}\int_{D^2} Q(u).u_x \wedge u_y$$

où $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est définie par

$$Q(u) = (\int_0^{u_1} H(t, u_2, u_3)dt \ , \int_0^{u_2} H(u_1, t, u_3)dt, \int_0^{u_3} H(u_1, u_2, t)dt)$$

Dans ce qui suit, nous allons nous préoccuper de l'existence et de la multiplicité des solutions au problème (II) - des résultats similaires valant ou pouvant être conjecturés pour le problème de Plateau -voir [2].

Dans la section suivante, nous rappelons le résultat d'existence dû à Hildebrandt, obtenu par minimisation de J sur un sous-ensemble convenable de H^1_γ [7] - (d'autres résultats d'existence sont exposés dans [6] [22] [20] [13]).

D'après l'observation de certains cas particuliers, Rellich conjectura que les solutions du problème devaient exister par paires. Et en effet, sous les mêmes hypothèses que Hildebrandt, et dans le cas où H est une constante, Brézis et Coron prouvèrent l'existence d'une seconde solution [3] - (pour d'autres énoncés concernant l'existence d'une seconde solution avec $H \equiv$ constante, voir [22] [14] [15] [16]). Ce résultat est rappelé dans la Section 3. Malheureusement, la preuve ne s'étend pas sans difficultés au cas où H est variable. L'obstacle principal consiste à analyser précisément le comportement des dites suites de Palais-Smale, le problème variationnel étant non compact. Pour surmonter cette difficulté, Struwe introduisit, à la suite de Sacks et Uhlenbeck [11], une fonctionnelle perturbée qui, elle, vérifie la condition de Palais-Smale. Cette stratégie lui permit de prouver dans [18] un résultat partiel de multiplicité - légèrement amélioré par Wang [19] - dans le cas où H est proche d'une constante H_0 dans la norme

$$[H - H_0] = \operatorname*{ess\ sup}_{u \in \mathbf{R}^3} [(1 + |u|)(|H(u) - H_0| + |\nabla H(u)| + |Q(u) - H_0 u|$$

$$+|dQ(u) - H_0 id|]$$

Dans [2], nous proposons une approche directe du problème, reposant à la fois sur une analyse détaillée des suites de Palais-Smale pour la fonctionnelle J et des estimations a priori sur les solutions. La Section 4 est ainsi consacrée à l'exposition des arguments principaux de cette approche, qui nous permet de prouver l'existence d'une seconde solution au problème (II) sous des hypothèses sensiblement allégées - c'est à dire H proche d'une constante H_0 en norme L^∞. Pour terminer, nous donnons dans la Section 5 une application géométrique des méthodes utilisées.

2 La "petite" solution

Améliorant des résultats antérieurs de Werner [23] et Heinz [6], Hildebrandt a prouvé dans [7] le résultat suivant :

Théorème 1.— *Soit* $\gamma \in H^{1/2}(\partial D^2, \mathbf{R}^3) \cap C^0(\partial D^2, \mathbf{R}^3)$, $H \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, *avec*

$$\|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2, \mathbf{R}^3)} \cdot \|H\|_{L^\infty(D^3, \mathbf{R})} \leq 1$$

Alors (II) admet une solution $\underline{u}$, *qui satisfait*

$$\|u\|_{L^\infty(D^2, \mathbf{R}^3)} \leq \|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2, \mathbf{R})}$$

Remarques :

1 - Des résultats similaires ont été obtenus par Wente [20] [21] et Steffen [13] dans le cas $H \equiv$ constante, par Steffen [14] dans le cas H variable. Le résultat peut être retrouvé en utilisant l'équation de la chaleur associée au problème - voir [10].

2 - En utilisant une procédure de minimisation sur l'énergie des solutions de (II) par rapport à la paramétrisation γ de Γ (trois points étant préalablement fixés pour éviter le problème dû à l'invariance par transformation conforme), on obtient une solution du problème de Plateau [7].

Nous esquissons la démonstration dans le cas $h = \|H\|_{L^\infty(D^3, \mathbf{R}^3)} < 1$, $\|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2, \mathbf{R}^3)} \leq 1$, et H régulier - le cas général s'en déduisant par homogénéité et approximation.

Soit donc h' tel que $h < h' < 1$, et $\tilde{H} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une fonction régulière telle que

$$H \equiv \tilde{H} \quad \text{sur} \quad D^3; \tilde{H}(|u|) = 0 \quad \text{pour} \quad |u| > \frac{1}{h'} \; ; \|H\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)} < h'$$

Notons $\tilde{J}$ et $\tilde{Q}$ les fonctionnelles correspondant à $\tilde{H}$. On a

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^3} |\tilde{Q}(u)| \leq 1$$

si bien que

$$\frac{1}{3}E(u) \leq \tilde{J}(u) \leq \frac{5}{3}E(u) \quad (E(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2)$$

pour tout $u \in H^1_\gamma$. Dans ces conditions, un résultat de Morrey assure que le minimum de J sur H^1_γ est atteint par une fonction $\underline{u}$ qui est solution de (II), avec $\tilde{H}$ à la place de H. Comme on a également

$$-\Delta|\underline{u}|^2 = -2(|\nabla \underline{u}|^2 + \underline{u}.\Delta \underline{u}) \leq -2|\nabla \underline{u}|^2(1 - |\underline{u}||\tilde{H}(\underline{u})|) \leq 0$$

$\underline{u}$ est sous-harmonique sur D^2, et le principe du maximum assure que

$$|\underline{u}| \leq 1 \quad \text{sur} \quad D^2$$

$\tilde{H}$ étant égal à H sur D^3, $\underline{u}$ est solution de (II).

Notons, avant de clore cette section, que dans le cas où $H \equiv$ constante, Brézis et Coron montrent dans [3] la coercivité de $J''(\underline{u})$:

Lemme 1.—

Supposons que H est une constante qui vérifie $|H|.\|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2,\mathbf{R}^3)} < 1$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$J''(\underline{u})(\varphi.\varphi) = \int_{D^2} |\nabla\varphi|^2 + 4H\underline{u}.\varphi_x \wedge \varphi_y \geq \delta \int_{D^2} |\nabla\varphi|^2$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(D^2, \mathbf{R}^3)$.

Remarque: Quand $H \equiv$ constante, $\underline{u}$ est en fait la solution d'énergie minimale de (I).

Soit en effet u une autre solution de (I). On a

$$J(u) = J(\underline{u} + \varphi) = J(\underline{u}) + \frac{1}{2}J''(\underline{u})(\varphi, \varphi) + 2HV(\varphi)$$

$$J(\underline{u}) = J(u - \varphi) = J(u) + \frac{1}{2}J''(u)(\varphi, \varphi) - 2HV(\varphi)$$

avec $\varphi = u - \underline{u}$ et $V(\varphi) = \frac{1}{3}\int_{D^2} \varphi.\varphi_x \wedge \varphi_y$.

On a donc $J''(\underline{u})(\varphi, \varphi) = -J''(u)(\varphi, \varphi)$.

Or $J''(u)(\varphi, \varphi) - J''(\underline{u})(\varphi, \varphi) = 12HV(\varphi)$.

Par conséquent

$$2HV(\varphi) = -\frac{1}{3}J''(u)(\varphi, \varphi)$$

et

$$J(u) = J(\underline{u}) + \frac{1}{6}J''(\underline{u})(\varphi, \varphi)$$

3 La "grande" solution pour $H \equiv$ constante

Afin de prouver l'existence d'une seconde solution à (II), une idée naturelle est de profiter de la caractérisation de la première solution en tant que minimum pour appliquer le lemme du col. Ce programme a été réalisé par Brézis et Coron dans [3] et par Struwe dans [16], pour $H \equiv$ constante. Plus précisément, il est prouvé dans [3] :

Théorème 2.— *Soit*

$$\gamma \in H^{1/2}(\partial D^2, \mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\partial D^2, \mathbf{R}^3), \gamma \not\equiv \text{ constante sur } \partial D^2$$

et $H \neq 0$ tels que

$$|H|.\|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2,\mathbf{R}^3)} < 1$$

Alors, (I) admet au moins deux solutions.

Remarque:

1 - Si $\gamma \not\equiv$ constante, un résultat de Wente [22] montre que $u \equiv \gamma$ est la seule solution.

2 - Le cas où γ est la paramétrisation à vitesse constante d'un cercle suggère que la condition $|H|.\|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2,\mathbf{R}^3)} < 1$ est optimale.

3.1. Le comportement des suites de Palais-Smale

La principale difficulté que nous avons à surmonter est le manque de compacité de la fonctionnelle J, c'est-à-dire la mise en défaut de la condition de Palais-Smale. Une suite de Palais-Smale pour J est une suite (u_n) telle que

$$J(u_n) \quad \text{est borné} \quad ; J'(u_n) \quad \text{tend vers} \quad 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}$$

La condition de Palais-Smale signifierait que toute suite de ce type est relativement compacte - ce qui n'est pas le cas.

Remarquons d'abord la propriété suivante :

Lemme 2.— *Toute suite de Palais-Smale est bornée dans H^1*

Preuve : $J'(u_n) \to 0$ dans H^{-1} s'écrit

$$\Delta u_n = 2H u_{n_x} \wedge u_{n_y} + f_n \ , \ f_n \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}$$

En soustrayant à cette égalité l'équation $\Delta \underline{u} = 2H \underline{u}_x \wedge \underline{u}_y$, en multipliant par $\varphi_n = u_n - \underline{u}$, et en intégrant sur D^2, on obtient

$$-\int_{D^2} |\nabla \varphi_n|^2 = 2H \int_{D^2} (u_{n_x} \wedge u_{n_y} - \underline{u}_y \wedge \underline{u}_y)\varphi_n + o(|\varphi_n|_{H_0^1})$$

Une intégration par parties nous donne alors (voir [3, Appendix])

$$-\int_{D^2} |\nabla \varphi_n|^2 = 4H \int_{D^2} \underline{u}.\varphi_{n_x} \wedge \varphi_{n_y} + 2H \int_{D^2} \varphi_n.\varphi_{n_x} \wedge \varphi_{n_y} + o(|\varphi_n|_{H_0^1})$$

Par ailleurs, un développement de J en $\underline{u}$ fournit

$$J(u_n) = J(\underline{u}) + \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla \varphi_n|^2 + 2H \int_{D^2} \underline{u}.\varphi_{n_x} \wedge \varphi_{n_y} + \frac{2H}{3}\int_{D^2} \varphi_n.\varphi_{n_x} \wedge \varphi_{n_y}$$

Il s'ensuit que

$$\left|\int_{D^2} \varphi_n.\varphi_{n_x} \wedge \varphi_{n_y}\right| \leq C + o(|\varphi_n|_{H_0^1})$$

et le Lemme 1 montre alors que (φ_n) est borné dans H_0^1.

Du Lemme 2 on déduit donc que toute suite de Palais-Smale est faiblement relativement compacte. Il est facile de voir que toute limite faible d'une telle suite est solution de (I). En effet, on peut écrire :

$$u_x \wedge u_y = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}(u \wedge u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x \wedge u))$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(D^2, \mathbf{R}^3)$, on a :

$$\int_{D^2} u_x \wedge u_y . \varphi = -\frac{1}{2} \int_{D^2} u \wedge u_y . \varphi_x + u_x \wedge u . \varphi_y$$

et cette dernière expression est continue pour la topologie faible de H^1.

Néanmoins, les suites de Palais-Smale ne sont pas nécessairement fortement relativement compactes dans H^1. Brézis et Coron ont précisément analysé dans [4] ce défaut de convergence, démontrant :

Théorème 3.—

Soit (u_n) *une suite de Palais-Smale pour* J. *Alors, il existe*

(i) $u_0 \in H^1$, *solution de (I)*

(ii) un nombre fini de solutions $\omega^1, \cdots, \omega^p$ *de* $\Delta\omega = 2H\omega_x \wedge \omega_y$ *sur* $\mathbf{R}^2$

(iii) des suites $(a_n^1), \cdots, (a_n^p)$ *de* D^2

(iv) des suites $(\varepsilon_n^1), \cdots, (\varepsilon_n^p)$ *de* $\mathbf{R}_+^*$ *tendant vers* 0

tels que, à une sous-suite près, on ait

$$\|u_u - u_0 - \sum_{i=1}^{p} \omega^i(\frac{\cdot - a_n^i}{\varepsilon_n^i})\|_{H^1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\int_{D^2} |\nabla u_n|^2 = \int_{D^2} |\nabla u_0|^2 + \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla \omega^i|^2 + o(1)$$

$$J(u_n) = J(u_0) + \sum_{i=1}^{p} J(\omega^i) + o(1)$$

Ce théorème met en relief le rôle des solutions de l'équation sur l'espace tout entier. Ces solutions sont entièrement classifiées, comme le précise le lemme suivant [4] :

Lemme 3.— *Soit* $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ *tel que*

$$\Delta\omega = 2H\omega_x \wedge \omega_y \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^2, \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla\omega|^2 < +\infty \quad (H \neq 0)$$

Alors ω *s'écrit*

$$\omega(z) = \frac{1}{H}\Pi\Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\Big) + C, \quad z = (x, y) = x + iy$$

où $\Pi : \mathbf{C} \to S^2$ *est la projection stérérographique,* P *et* Q *sont des polynômes et* C *est une constante. De plus*

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla\omega|^2 = \frac{8\pi}{H^2}\max(\deg P \ , \deg Q)$$

et

$$J(\omega) = \frac{4\pi}{3H^2}\max(\deg P \ , \deg Q)$$

3.2. Le lemme du col

Nous rappelons ici le lemme du col classique :

Lemme.—

Soit F *une fonctionnelle* C^1 *sur un espace de Banach* V, *qui satisfait les conditions suivantes :*

(i) $F(0) = 0$

(ii) $\exists r > 0 \ , \ \rho > 0$ *tels que* $F(v) \geq \rho \ , \ \forall v \in V, \|v\| = r$

(iii) $\exists v_0 \in V, \|v_0\| > r$, *tel que* $F(v_0) < 0$.

Alors, si $c = \inf_{p \in P} \max_{t \in [0,1]} F(p(t))$ *avec* $P = \{p \in C^0([0,1], V), \ p(0) = 0, p(1) = v_0\}$, *il existe une suite* (v_n) *de* V *telle que*

$$F(v_n) \to c \ , \ F'(v_n) \to 0 \quad \text{dans} \quad V'$$

On applique ce lemme à la fonctionnelle $J(. + \underline{u}) - J(\underline{u})$. Le Lemme 1 assure que (ii) est satisfaite. (iii) est également trivialement satisfaite, et le lemme suivant nous fournit une borne supérieure pour c :

Lemme 4.— *Il existe v_0 satisfaisant (iii) tel que*

$$c < \frac{4\pi}{3H^2}$$

La preuve de ce lemme repose sur un calcul précis effectué le long d'un chemin explicite. Supposons qu'il existe $\varphi \in H_0^1(D^2, \mathbf{R}^3)$ tel que

$$(*) \qquad 3V(\varphi) = \int_{D^2} \varphi.\varphi_x \varphi_y = -1 \quad \text{et} \quad \int_{D^2} |\nabla\varphi|^2 + 4H\underline{u}.\varphi_x \wedge \varphi_y < (32\pi)^{1/3}$$

Evidemment, $J(\underline{u} + t\varphi) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ et

$$\sup_{t\in\mathbf{R}+} (J(\underline{u} + t\varphi) - J(\underline{u}))$$

$$= \sup_{t\in\mathbf{R}+} \frac{t^2}{2}(\int_{D^2} |\nabla\varphi|^2 + 4H\underline{u}.\varphi_x \wedge \varphi_y) - \frac{2H}{3}t^3$$

$$= \frac{1}{24H^2}(\int_{D^2} |\nabla\varphi|^2 + 4H\underline{u}.\varphi_x \wedge \varphi_y)^3$$

$$< \frac{4\pi}{3H^2}$$

L'existence de φ réalisant $(*)$ est établie dans [3]. (L'inégalité isopérimétrique donne :

$$\inf_{\substack{\varphi\in H_0^1 \\ 3|V(\varphi)|=1}} \int_{D^2} |\nabla\varphi|^2 = (32\pi)^{1/3}$$

C'est en concentrant φ au voisinage d'un point où $\nabla\underline{u} \neq 0$ que l'on peut montrer que

$$\inf_{\substack{\varphi\in H_0^1 \\ 3|V(\varphi)|=1}} \int_{D^2} |\nabla\varphi|^2 + 4H\underline{u}.\varphi_x \wedge \varphi_y < (32\pi)^{1/3})$$

3.3 Construction de la grande solution.

Le lemme du col nous fournit donc une suite de Palais-Smale (u_n) pour J. A une sous-suite près, u_n converge faiblement vers une solution u_0 de (I). De plus, le Théorème 3 nous apprend que soit

$$u_n \to u_0 \quad \text{dans} \quad H^1, \quad \text{et} \quad J(u_0) = J(\underline{u}) + c$$

soit

$$J(u_0) \leq J(\underline{u})+c-\inf\{J(\omega), \Delta\omega = 2H\omega_x\wedge\omega_y \text{ sur } \mathbf{R}^2, \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla\omega|^2 < +\infty, \omega \not\equiv \text{ constante}\}$$

$$\leq J(\underline{u}) + c - \frac{4\pi}{3H^2}$$

Ceci implique, d'après le Lemme 4, que soit $J(u_0) > J(\underline{u})$, soit $J(u_0) < J(\underline{u})$. Dans tous les cas $u_0 \not\equiv \underline{u}$, et le Théorème 2 s'ensuit.

En fait, la remarque qui suit le Lemme 1 assure que nous sommes dans le premier cas, c'est à dire

$$u_n \to u_0 \quad \text{dans} \quad H^1, \quad \text{et} \quad J(u_0) = J(\underline{u}) + c\ .$$

4. La seconde solution pour H variable

Dans cette section, on ne suppose plus que H est une constante. Dans ce contexte, on peut raisonnablement conjecturer que le Théorème 2 est encore valable pour H variable "proche", dans un sens à préciser, d'une constante $H_0 \neq 0$ qui vérifie

$$(**) \qquad |H_0|\|\gamma\|_{L^\infty(\partial D^2,\mathbf{R}^3)} < 1$$

L'application de méthodes perturbatrices se heurte cependant à de sérieux obtacles. Par exemple, l'argument que nous avons utilisé pour montrer que la limite faible d'une suite de Palais-Smale est solution de l'équation n'est plus valable dès lors que H n'est pas *exactement* une constante. Le terme non linéaire n'est plus faiblement continu. En fait J n'est pas même différentiable sur H^1. [Il n'est pas clair que J soit déjà bien définie sur H^1 tout entier. Dans le cas $H \equiv$ constante, l'intégrale $\frac{1}{3}\int_{D^2} u.u_x \wedge u_y$ correspondrait dans le cas de la paramétrisation d'une surface fermée régulière ($u \in H_0^1(D^2)$) à un volume, et l'on a les inégalités

$$\mathcal{V}^{2/3} \leq \frac{1}{(36\pi)^{1/3}}\mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ désignent respectivement l'aire et le volume, et

$$|\int_{D^2} u.u_x \wedge u_y|^{2/3} \leq \frac{1}{(32\pi)^{1/3}} \int_{D^2} |\nabla u|^2$$

Dans le cas H variable, l'intégrale $\int_{D^2} Q(u).u_x \wedge u_y$ est bien définie également sur H^1 tout entier, elle correspond à un volume calculé sur une certaine variété.]

Pour surmonter ces difficultés, Struwe a suivi la stratégie inaugurée par Sacks et Uhlenbeck a propos des applications harmoniques. Il introduit une fonctionnelle perturbée pour laquelle la condition de Palais-Smale est vérifiée. Mais les passages à la limite ultérieurs obligent à des hypothèses fortes sur H. Afin de mener la déviation de H par rapport à une constante, il considère l'espace affine des fonctions H telles que

$$[H - H_0] = \text{ess} \sup_{u \in \mathbf{R}^3} [(1 + |u|)(|H(u) - H_0| + |\nabla H(u)|)$$

$$+|Q(u) - H_0 u| + |dQ(u) - H_0 id|] < +\infty$$

Il prouve alors [18] :

Théorème 4.—

Supposons que $H_0 \in \mathbf{R}^*$ satisfait $(**)$ avec $\gamma \not\equiv$ constante. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour un sous ensemble dense de fonctions H dans le α-voisinage de H_0, (II) admet au moins deux solutions.

Ce théorème a été amélioré par Wang [19], qui a montré que le résultat était valable pour un voisinage entier de H_0 dans la même norme.

Dans [2], nous montrons que par une approche directe du problème on peut considérablement affaiblir les hypothèses sur H. On montre en effet :

Théorème 5.— *Supposons que $H_0 \in \mathbf{R}^*$ satisfait $(**)$, avec $\gamma \not\equiv$ constante. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute fonction H satisfaisant*

$$\|H - H_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})} < \alpha$$

(II) admet au moins deux solutions.

Nous suivrons pas à pas la stratégie développée dans la section précédente. Le premier problème qui se pose est que la dérivée de J, définie formellement par

$$J'(u).\varphi = \int_{D^2} \nabla u.\nabla\varphi + 2\int_{D^2} H(u) u_x \wedge u_y.\varphi$$

n'a pas de sens pour φ quelconque dans H_0^1. En revanche, l'expression est bien définie pour toute fonction test $\varphi \in H_0^1 \cap L^\infty$. On pose alors

$$\|J'(u)\| = \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1 \cap L^\infty \\ \|\varphi\|_{H_0^1}=1}} |J'(u).\varphi|$$

S'il existe un domaine U de H_γ^1 sur lequel $\|J'(u)\|$ est borné inférieurement par une constante $a > 0$, il est alors possible, suivant la procédure de construction d'un pseudo-gradient, d'obtenir un champ de vecteurs $w(u)$ localement lipschitzien sur un voisinage V de U tel que

$$w(u) \in H_0^1 \cap L^\infty$$
$$\|w(u)\| \leq 1$$
$$|J'(u).w(u)| > a/2$$

Grâce à ce champ de vecteurs, on peut établir un lemme de déformation comme dans le cas classique, et le lemme du col est encore valable - quitte à donner à $J'(u)$ le sens défini plus haut. De surcroît, on a :

Lemme 2'.— *Toute suite de Palais-Smale est bornée dans H^1, pourvu que*

$$\beta = \sup_{u \in \mathbf{R}^3} [(1+|u|)|H(u) - H_0| + |Q(u) - H_0 u|]$$

soit suffisamment petit.

La preuve de ce lemme est identique à celle du Lemme 2, la petitesse de β permettant de se ramener dans les calculs au cas $H \equiv H_0$

Nous avons ensuite besoin du résultat suivant, établi dans [1], sur la limite faible d'une suite de Palais-Smale :

Théorème 6.—

Supposons que $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ satisfait

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^3} |\nabla H(u)| < +\infty$$

Soit (u_n) une suite bornée dans $H_\gamma^1(D^2, \mathbf{R}^3)$ telle que

$$\Delta u_n = 2H(u_n) u_{n_x} \wedge u_{n_y} + f_n \quad \text{sur} \quad D^2$$

avec

$$f_n \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}$$

Toute limite faible d'une sous-suite de (u_n) vérifie

$$\Delta u = 2H(u) u_x \wedge u_y \quad \text{sur} \quad D^2$$

Une fois que ce résultat de convergence est établi, on est en mesure de prouver un équivalent du Théorème 3, caractérisant le défaut de compacité pour les suites de Palais-Smale :

Théorème 3'.—

Supposons que $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ satisfait

$$(***) \qquad \sup_{u \in \mathbf{R}^3} (1+|u|)|\nabla H(u)| < +\infty$$

Soit (u_n) une suite de Palais-Smale pour J. Alors il existe

(i) $u_0 \in H^1$, solution de (II)

(ii) un nombre fini de solutions $\omega^1, \cdots, \omega^p$ de $\Delta\omega = 2H(\omega)\omega_x \wedge \omega_y$ sur $\mathbf{R}^2$

(iii) des suites $(a_n^1), \cdots, (a_n^p)$ de D^2

(iv) des suites $(\varepsilon_n^1), \cdots, (\varepsilon_n^p)$ de $\mathbf{R}_+^*$ tendant vers 0

tels que, à une sous suite près, on ait

$$\|u_n - u_0 - \sum_{i=1}^{p} \omega^i(\frac{\cdot - a^i}{\varepsilon_n^i})\|_{H^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$$

et

$$\int_{D^2} |\nabla u_n|^2 = \int_{D^2} |\nabla u_0|^2 + \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla \omega^i|^2 + o(1)$$

$$J(u_n) = J(u_0) + \sum_{i=1}^{p} J(\omega^i) + o(1)$$

Désignons par J_H, J_{H_0} respectivement les fonctionnelles correspondant à H et H_0, et par $\underline{u}, \underline{u_0}$ les "petites" solutions associées, données par le Théorème 1.

On applique donc le lemme du col à la fonctionnelle $J_H(\cdot + \underline{u}_0) - J_H(\underline{u}_0)$, comme nous y ont autorisé nos arguments précédents. En comparant J_H et J_{H_0}, on voit facilement que les conditions (i) (ii) (iii) sont encore satisfaites, pourvu que β soit assez petit.

D'où l'existence d'une suite (u_n) de H^1_γ telle que

$$J_H(u_n + \underline{u}_0) - J_H(u_n) \to c_H = \inf_{p\in P} \max_{t\in[0,1]} (J_H(p(t) - \underline{u}_0) - J_H(\underline{u}_0))$$

$$\|J'_H(u_n + \underline{u}_0)\| \to 0$$

Si les hypothèses du Lemme 2' et du Théorème 3' soit vérifiées, on sait que $u_n + \underline{u}_0$ converge faiblement dans H^1_γ vers une limite $\bar{u}$, et que soit

$$J_H(\bar{u}) = J_H(\underline{u}_0) + c_H$$

soit

$$J_H(\bar{u}) \leq J_H(\underline{u}_0)+c_H-\inf\{J_H(\omega), \Delta\omega = 2H(\omega)\omega_x\wedge\omega_y \text{ sur } \mathbf{R}^2, \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla\omega|^2 < +\infty, \omega \not\equiv \text{ constante}\}$$

Par un calcul perturbatif, il est facile de montrer l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\eta \leq c_H \leq \frac{4\pi}{3H_0^2} - 2\eta \qquad \text{(voir Lemme 4)}$$

et

$$\inf\{J_H(\omega), \Delta\omega = 2H(\omega)\omega_x\wedge\omega_y \text{ sur } \mathbf{R}^2, \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla\omega|^2 < +\infty, \omega \not\equiv \text{ constante}\} > \frac{4\pi}{3H^2} - \eta$$

toujours en supposant que β est assez petit.

Par ailleurs, il s'ensuit de la détermination de $\underline{u}$-voir la preuve du Théorème 1 - et du Lemme 1, que $\underline{u}$ converge vers $\underline{u}_0$ dans H^1_γ quand H tend vers H_0 dans L^∞, et que $J_H(\underline{u}) \to J_H(\underline{u}_0)$. Il en résulte que soit

$$J_H(\overline{u}) > J_H(\underline{u}) \quad (J_H(\bar{u}) \geq J_H(\underline{u}) + \frac{\eta}{2})$$

soit

$$J_H(\bar{u}) < J_H(\underline{u}) \quad (J_H(\bar{v}) \leq J_H(\underline{u}) - \frac{\eta}{2})$$

dès lors que β est assez petit.

Remarque : En reprenant le calcul de la fin de la section 2, on voit en fait que si u est solution de (II), on doit avoir

$$J_H(u) \geq J_H(\underline{u}) - C\beta$$

ce qui prouve que pour β assez petit, nous somme dans le premier cas : la convergence de $u_n + \underline{u}_0$ vers $\bar{u}$ est forte, et $J_H(\bar{u}) > J_H(\underline{u})$.

Notons maintenant que le Lemme 2' nous donne une borne pour la norme H^1 de $\bar{u}$ - voir la preuve du Lemme 2 - indépendante de H proche de H_0 avec β assez petit. Ainsi, le dernier ingrédient dont nous avons besoin pour achever la preuve du Théorème 5 est une borne a priori sur la norme L^∞ des solutions en fonction de la norme H^1 :

Théorème 7.—

Supposons que $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est une fonction régulière et bornée. Soit u une solution régulière de (II).

Il existe $C > 0$, dépendant seulement de la norme L^∞ de H. tel que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|\gamma\|_{L^\infty} + C(\int_{D^2} |\nabla u|^2 + 1)^2$$

La preuve de ce théorème, fondée sur une idée de Grüter [5], est donnée dans [2].

Nous sommes maintenant en mesure de conclure. Soit $\beta_0 > 0$ fixe, tel que pour H proche de H_0 avec

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^3} [(1 + |u|)|H(u) - H_0| + |Q(u) - H_0 u|] < \beta_0$$

il existe une seconde solution $\bar{u}$ de (II), qui vérifie

$$\|\bar{u}\|_{H^1} \leq R$$

R indépendant de H. Le théorème 7 implique

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty} \leq \|\gamma\|_{L^\infty} + C(R^2 + 1)^2 = R'$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $H \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ qui satisfait

$$\|H - H_0\|_{L^\infty} < \alpha$$

on peut trouver $\widetilde{H} \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ vérifiant

$$\widetilde{H}(u) = H(u) \quad \forall u \in \mathbf{R}^3, |u| \leq R'$$

et

$$\tilde{\beta} = \sup_{u \in \mathbf{R}^3} [(1 + |u|)|\tilde{H}(u) - H_0| + |\tilde{Q}(u) - H_0 u|] < \beta_0$$

ainsi que $(* * *)$- (on prend $\tilde{H}(u) \equiv H_0$ pour $|u|$ grand).

Les deux solutions $\underline{u}, \bar{u}$ correspondant à $\widetilde{H}$ étant telles que

$$\|\underline{u}\|_{L^\infty}, \|\bar{u}\|_{L^\infty} \leq R'$$

elles sont aussi solutions de (II) pour la fonction de courbure initiale de H.

Remarque :

α dépend de $\|\gamma\|_{L^\infty}$ et H_0. Il est cependant facile de vérifier, en reprenant les preuves, que α peut être choisi indépendamment de γ lorsque $\|\gamma\|_{L^\infty} \to 0$.

En faisant tendre γ vers 0 dans L^∞, on obtient des surfaces à courbure moyenne prescrite paramétrisées par S^2 (et des solutions non constantes de $\Delta\omega = 2H(\omega)\omega_x \wedge \omega_y$ sur $\mathbf{R}^2$).

5. Application géométrique

Soit M une variété riemannienne difféomorphe à S^2. D'après Sacks et Uhlenbeck [11], on sait qu'il existe un difféomorphisme harmonique conforme de S^2 dans M. Un tel u vérifie alors l'équation

$$\Delta u = 2H(u)u_x \wedge u_y$$

En utilisant comme précédemment les techniques développées par Grüter [5] (voir aussi Hoffmann et Spruck [8]), on établit

Théorème 8.—

$$\sup_{x \in M} |H(x)| \geq C \frac{D(M)}{A(M)}$$

où H désigne la courbure moyenne, $D(M)$ le diamètre de $M, A(M)$ son aire, et C une constante universelle.

On peut conjecturer que la meilleure constante possible est atteinte dans le cas de la sphère, soit $C = 2\pi$

En élargissant au cas de variétés non nécessairement difféomorphes à la sphère, comme dans [12], on peut conjecturer l'inégalité suivante :

$$\sup_{x \in M} |H(x)| \geq C(\text{genre de } M) \frac{D(M)}{A(M)}$$

Références :

[1] F. Bethuel, *Weak convergence of Palais-Smale sequences for some critical functionals*, to appear.

[2] F. Bethuel, O. Rey, *Multiple solutions to the Plateau problem for nonconstant mean curvature,* to appear in Duke Math. J.

[3] H. Brezis, J.M. Coron, *Multiple solutions of H-Systems and Rellich's conjecture*, Comm. Pure Applied Math. **37**, (1984), pp. 149-187.

[4] H. Brézis, J.M. Coron, *Convergence of solutions of H-Systems or how to blow bubbles*, Arch. Rat. Mech. Anal. **89**, (1985), pp. 21-56.

[5] M. Grüter, *Regularity of weak H-Surfaces*, J. Reine Angew. Math. **329**, pp. 1-15.

[6] E. Heinz, *Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung*, Math. Ann. **127**, (1954), pp. 258-287.

[7] S. Hildebrandt, *Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmumg und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie*, Math. Z. **112**, (1969), pp. 205-213.

[8] D. Hoffmann, J. Spruck, *Sobolev and isoperimetric inequalities for riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **27**, (1974), pp. 715-727, et **28**, (1975), pp. 765-766.

[9] C. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, Berlin (1966).

[10] O. Rey, *Heat flow for the equation of surfaces with prescribed mean curvature*, Math. Ann. **291**, (1991), pp. 123-146.

[11] J. Sacks, K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of spheres*, Ann. Math. **113**, (1981), pp. 1-24.

[12] J. Sacks, K. Uhlenbeck, *Minimal immersions of closed Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **271**, (1982), pp. 639-652.

[13] K. Steffen, *On the existence of surfaces with prescribed mean curvature and boundary*, Math. Z. **146**, (1976), pp. 113-135.

[14] K. Steffen, *On the uniqueness of surfaces with prescribed mean curvature spanning a given contour*, Arch. Rat. Mech. Anal. **94**, (1986), pp. 101-122.

[15] M. Struwe, *Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature*, Arch. Rat. Anal. **93**, (1986), pp. 135-157.

[16] M. Struwe, *Large H-surfaces via the mountain-pass Lemma*, Math. Ann. **270**, (1985), pp. 441-459.

[17] M. Struwe, *Plateau's problem and the Calculus of Variations*, Mathematical Notes **35**, Princeton University Press (1988).

[18] M. Struwe, *Multiple solutions to the Dirichlet problem for the equation of prescribed mean curvature*, Analysis, et cetera, Academic Press, Boston (1990).

[19] G. Wang, *The Dirichlet problem for the equation of prescribed mean curvature*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire, 9, (1992), pp. 643-655.

[20] H. Wente, *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Analysis Appl. **26**, (1969), pp. 318-344.

[21] H. Wente, *A general existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, Math. Z. **120**, (1971), pp. 277-278.

[22] H. Wente, *The differential $\Delta x = 2H(x_u \wedge x_v)$ with vanishing boundary values*, Proc. A.M.S. **50**, (1975), pp. 113-137.

[23] H. Werner, *Das problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung*, Math. Ann. **133**, (1957), pp. 303-319.

Olivier Rey
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex

Fabrice Bethuel
ENPC-CERMA, La Courtine
93167 Noisy-le-Grand cedex
CMLA Cachan
94235 Cachan cedex