S. Alinhac

Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 3, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A3_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

TEMPS DE VIE ET COMPORTEMENT EXPLOSIF DES SOLUTIONS D'EQUATIONS D'ONDES QUASI-LINEAIRES EN DIMENSION DEUX

S. ALINHAC

Exposé n° III

19 Janvier 1993

Introduction

1. Notre but est de comprendre le moment, le lieu et l'allure de l'explosion de solutions régulières d'équations hyperboliques non linéaires.

En dimension d'espace $n \geq 2$, il ne semble possible actuellement que d'aborder l'étude de situations de perturbations de l'équation des ondes $\Box u = 0$. Pour une telle perturbation quasi-linéaire $\Sigma g_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}^2 u = 0$, on considérera la solution régulière u d'un problème de Cauchy à données C_0^∞ de taille ε, et l'on notera T_ε son temps de vie.

Cette situation a été étudiée par de nombreux auteurs, principalement Klainerman [13], [14], John [8], [9], [10], [11], [12] et Hörmander [6], [7] (voir également les bibliographies de ces ouvrages pour plus de détails).

Nous nous limitons ici à $n = 2$, pour des raisons de simplicité, mais aussi parce que, dans la situation d'existence "presque globale" du cas $n = 3$, on a pensé que les mécanismes de l'explosion n'apparaissent pas aussi clairement qu'en dimension $n = 2$.

L'étude du cas $n = 3$ fera l'objet d'un travail ultérieur (voir cependant [9]).

En fait, à notre connaissance, les seuls cas où l'on sait prouver l'explosion effective (i.e., $T_\varepsilon < +\infty$) en en comprenant le mécanisme sont ceux de la dimension $n = 1$ ou d'équations de structure "invariante par rotation" pour des données de Cauchy également invariantes par rotation (voir [6], [8], [10]). Dans certains cas spéciaux d'équations "invariantes par rotation", on sait prouver l'explosion pour des données quelconques, sans en comprendre, semble t-il, le mécanisme (voir [8]).

Les résultats que nous présentons ici sont de nature purement asymptotique, bien que la méthode "d'optique géométrique à l'explosion" utilisée (cf. §2.3) semble promettre, dans certains cas, une élucidation du mécanisme de l'explosion.

Le résultat principal (Théorème 1.2) est l'existence d'un "temps de vie asymptotique" T_ε^a tel que, pour des données génériques, on ait à la fois

i) Pour tout $N \geq 1$, $T_\varepsilon \geq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$ pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$,

et

ii) Il existe $C > 0$ avec $\frac{1}{c}\frac{1}{T_\varepsilon^a - t} \leq \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leq \frac{c}{T_\varepsilon^a - t}$ pour $t \leq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$.

Tout se passe donc "comme si" on avait (sous les hypothèses du théorème 1.2)

i) $$T_\varepsilon < +\infty \;, T_\varepsilon - T_\varepsilon^a = 0(\varepsilon^\infty) \quad \text{et}$$

ii) $$\frac{1}{c}\frac{1}{T_\varepsilon - t} \leq \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{T_\varepsilon - t} \quad \text{pour} \quad t < T_\varepsilon \,.$$

Soulignons que nous n'avons aucune preuve de cette dernière assertion ; c'est une simple croyance personnelle.

Il serait évidemment très intéressant de comparer ces résultats à ceux d'études numériques.

2. La méthode de la preuve est classique dans son principe (cf. [6],[7]), qui tient en deux points :

i) Construire une solution approchée u_a,

ii) Estimer $\dot{u} = u - u_a$ à l'aide d'inégalités d'énergie.

Le premier point requiert un soin particulier, car on vise ici une approximation d'ordre arbitraire en ε, au moins au bord du cone de lumière. Les grandes lignes de la construction sont indiquées au §2 (cf. [1] et [2] pour les détails).

Quant au deuxième, il est standard loin de l'explosion (cf. [14], [6], [7]), mais délicat ensuite, car bien entendu, si l'on avait $T_\varepsilon < +\infty$, on aurait $\int^{T_\varepsilon} \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} dt = +\infty$ (cf. par exemple [16]). Il convient d'introduire des poids (singuliers) dans les inégalités standard pour obtenir un bon contrôle des différentes normes de $\dot{u}$ par des puissances de $\frac{1}{T_\varepsilon^a - t}$. Cette technique est expliquée au §3 (voir [3] pour les détails).

1. Temps de vie asymptotique.

1.1. Notations et hypothèses.

a. Dans $\mathbf{R}^3$, on note (x_0, x_1, x_2) les variables, en utilisant souvent la notation commode $x_0 = t$, $x = (x_1, x_2)$; les coordonnées polaires en (x_1, x_2) seront notées (r, ω), avec $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_1 = r\cos\omega, x_2 = r\sin\omega, \omega_1 = \cos\omega, \omega_2 = \sin\omega$, $\partial_\omega = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$.

On considère l'équation des ondes quasi linéaire à coefficients réels et constants

$$\square u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0 \ , \tag{1.1.1}$$

où la sommation est étendue aux indices $0 \le i, j, k \le 2$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, g_{ij}^k = g_{ji}^k$, et $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$.

Avec $\omega_0 = -1$, on définit (comme dans [6])

$$g(\omega) = g_{ij}^k \omega_i \omega_j \omega_k \ . \tag{1.1.2}$$

On suppose données des fonctions $u^0(x,\varepsilon) = \varepsilon u_1^0(x) + \varepsilon^2 u_2^0(x) + \cdots$, $u^1(x,\varepsilon) = \varepsilon u_1^1(x) + \varepsilon^2 u_2^1(x) + \cdots$ réelles de classe C^∞, supportées dans $|x| \leq M$, et on considère pour $\varepsilon > 0$ le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \square u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0 \\ u(x,0) = u^0(x,\varepsilon),\ \partial_t u(x,0) = u^1(x,\varepsilon). \end{array} \right. \tag{1.1.3}$$

On note T_ε le temps de vie de la solution C^∞ de ce problème.

b. Rappelons (cf. [5],[6]) que le premier terme u_1 d'approximation de $u = \varepsilon u_1 + \cdots$ est la solution de

$$\square u_1 = 0\ , u_1(x,0) = u_1^0(x), \partial_t u_1(x) = u_1^1(x)\ ,$$

avec

$$u_1 \sim \frac{R(r-t,\omega)}{r^{1/2}}, \quad \text{pour} \tag{1.1.4}$$

$$R(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{s\geq\sigma} \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} \{\tilde{R}(s,\omega,u_1^1) - \partial_s \tilde{R}(s,\omega,u_1^0)\} ds\ ,$$

$\tilde{R}(s,\omega,v)$ désignant la transformée de Radon $\tilde{R}(s,\omega,v) = \int_{x\omega=s} v(x)dx$ de v.

Nous faisons ici l'hypothèse de "non dégénérescence" suivante :

(ND) Il existe un point (σ_0,ω_0) tel que

i)
$$-g(\omega_0)\partial_\sigma^2 R(\sigma_0,\omega_0) < 0\ ,$$

ii)
$$\forall A\ , \exists C > 0 \quad \text{avec, pour} \quad |\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \leq A\ ,$$

$$-g(\omega)\partial_\sigma^2 R(\sigma,\omega) \geq -g(\omega_0)\partial_\sigma^2 R(\sigma_0,\omega_0) + C(|\sigma-\sigma_0| + |\omega-\omega_0|)^2.$$

$$\text{On pose alors} \quad A_0 = \frac{1}{g(\omega_0)\partial_\sigma^2 R(\sigma_0,\omega_0)}. \tag{1.1.5}$$

1.2. Le résultat principal.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.2.— *Considérons le problème de Cauchy (1.1.3) et faisons l'hypothèse (ND).*

Alors il existe une fonction T_ε^a *telle que*

i) Pour tout $N \geq 1$, $T_\varepsilon \geq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$ *pour* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$,

ii) Il existe $C > 0$ *telle que, pour* $\frac{cte}{\varepsilon^2} \leq t \leq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$ *et* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$, *on ait*

$$\frac{1}{C}\frac{1}{T_\varepsilon^a - t} \leq \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{T_\varepsilon^a - t} .$$

De plus, T_ε^a est de la forme $T_\varepsilon^a = \frac{\tau_*^2(\varepsilon,\varepsilon^2 \log \varepsilon)}{\varepsilon^2}$, où τ_* est une fonction C^∞ de ses arguments avec $\tau_*(0,0) = A_0$.

Nous appelons T_ε^a le "temps de vie asymptotique" de u.

Mentionnons qu'on a donné dans [3], II un résultat beaucoup plus précis, où la taille du reste $\dot{u} = u - u_a$ (cf. introduction) est estimée. Ce résultat permet en particulier de localiser l'"explosion asymptotique" de $|\nabla^2 u|$.

Notons qu'il est, en principe, possible de calculer T_ε^a à une appoximation arbitraire.

Dans [3], I, on a calculé les deux premiers termes de τ_*,

$$\tau_* = A_0 + A_1\varepsilon + 0(\varepsilon^2 \log \varepsilon) . \tag{1.2.1}$$

Rappelons brièvement le calcul de A_1 :

On considère la solution du problème

$$\Box u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_1 = 0, \ u_2(x,0) = u_2^0(x), \partial_t u_2(x,0) = u_2^1(x),$$

pour laquelle on montre

$$u_2 - \frac{g(\omega)}{2}(\partial_\sigma R)^2 \sim \frac{L(r-t,\omega)}{r^{1/2}},$$

pour une certaine fonction L de classe C^∞. La valeur de A_1 est

$$A_1 = -A_0^2 g(\omega_0)\partial_\sigma^2 L(\sigma_0,\omega_0). \tag{1.2.2}$$

Remarquons enfin que le choix de la forme exacte de (1.1.1) est sans grande importance : notre méthode s'applique aussi bien à des équations plus générale du type $g_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}^2 u = 0$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous indiquons très sommairement les idées de la preuve, en renvoyant le lecteur à [2] et [3] pour les détails.

2. La solution approchée.

La construction se fait dans l'esprit des techniques de "matching et stretching" classiques pour les équations différentielles ordinaires (voir par exemple [17]).

a. L'équation des ondes n'ayant pas de lacune en dimension 2, l'étude du comportement de la solution à l'intérieur du cône de lumière (c'est-à-dire pour $r - t \leq -$ cte) est assez délicate. Néanmoins, comme l'essentiel a lieu au bord du cône de lumière, nous ne discuterons ici que cette dernière zone.

b. Remarquons que si l'on dispose, pour $r - t \geq -$ cte seulement, d'une bonne solution approchée u_a, on peut utiliser des inégalités d'énergie dans un domaine $\{r - t \geq -\text{ cte},\ T_1 \leq t \leq T_2\}$ (qui est un domaine d'influence de $\square$) pour estimer $\dot{u}$ dans cette zone.

c. On distingue dans la construction trois périodes : le "démarrage", où u_a se laisse décrire par une série en ε, les effets des interactions non linéaires ne se faisant encore guère sentir.

Une "période de transition" (jusqu'à $t \leq \frac{\text{cte}}{\varepsilon^2}$) au cours de laquelle s'établit un équilibre entre les effets de propagation et les effets d'interactions, qui peut-être asymptotiquement décrit par des équations du premier ordre. Une troisième période au cours de laquelle les mécanismes de "focalisation" deviennent dominants et préparent la solution à l'explosion.

2.1. Le démarrage (période I).

• On définit les fonctions $u_i(x,t)(i \geq 1)$ par

$$\square u_i + Q_i = 0,\ u_i(x,0) = u_i^0(x),\ \partial_t u_i(x,0) = u_i^1(x),$$

avec

$$Q_1 = 0,\ Q_p = \sum_{\ell+\ell'=p} g_{ij}^k \partial_k u_\ell \partial_{ij}^z u_{\ell'} \quad \text{pour} \quad p \geq 2.$$

On choisira tout simplement $u_a = u_a^I = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i u_i$, k grand selon les besoins.

• Pour la suite, il importe d'avoir une idée du comportement des u_i.

On a (prop. 3.1 de [2])

$$u_1(x,t) = \frac{1}{r^{1/2}} L_1(r - t, \omega, \frac{1}{r}),$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{r^{1/2}} \{\sqrt{t} R_2^1(r - t, \omega, \frac{1}{r}) + L_2(r - t, \omega, \frac{1}{r}) + \cdots\},$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{r^{1/2}}\{tR_3^2(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + \sqrt{t}R_3^1(r-t,\omega,\frac{1}{r})$$
$$+(\log t)L_3^1(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + L_3(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + \cdots\}$$

etc ..., avec $\Box\frac{L_i}{r^{1/2}} \sim 0$. Cette dernière propriété suggère d'appeler les L_i les "profils libres" de u.

On observe que R_2^1 ne dépend que de L_1, tandis que L_2 dépend à la fois des traces de u_2 et d'un certain "résidu", très décroissant avec le temps, des interactions non linéaires de L_1 avec lui-même (en dimension d'espace un, ce "résidu" serait à support compact un temps). De même, R_3^2, R_3^1 et L_3^1 dépendent des termes précédemment calculés tandis que L_3 dépend des traces de u_3 et d'un "résidu" d'interactions, etc....

L'existence et les propriétés de ces "profils libres" de u est étudiée dans [1]. Nous verrons que "le temps de vie asymptotique" T_ε^a de u est calculable à partir d'eux seuls (comme pour (1.2.2)).

2.2. La phase de transition (période II).

On observe que la série

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \cdots =$$

$$\frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\{(L_1 + \varepsilon\sqrt{t}R_2^1 + \varepsilon^2 tR_3^2 + \cdots) + \varepsilon(L_2 + \varepsilon\sqrt{t}R_3^1 + \cdots) + \varepsilon^2 \log t L_3^1 + \varepsilon^2(L_3 + \cdots)\}$$

qui définit u_a^I perd son caractère asymptotique (et donc son utilité) lorsque $\varepsilon\sqrt{t}$ n'est plus petit. Comme par ailleurs elle apparaît formellement comme une fonction des variables supplémentaires $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$ et $\zeta = \varepsilon^2 \log t$, on va maintenant chercher u_a sous la forme

$$u_a = u_a^{II} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}F(\sigma,\omega,z,\tau,\zeta), \sigma = r-t, z = \frac{1}{r}. \tag{2.2.1}$$

La variable $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$ ("stretching") s'appelle traditionnellement le "temps lent" du problème (cf. [4], [16]) ; la variable $\zeta = \varepsilon^2 \log t$ est un deuxième "temps lent" qui s'introduit ici du fait de la précision recherchée.

On fixe dorénavant $0 < A < A_0$ (défini en (1.1.5)), et on limite la période II à $\tau \leq A$.

On peut alors montrer (prop. 4.1 de [2]) qu'il existe une solution de la forme (2.2.1) de $\Box u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u \sim 0$, pour laquelle les fonctions $\partial_\tau^{2\ell}\partial_z^\ell F(\sigma,\omega,0,0,0)(\ell \geq 0)$ sont prescrites ; cette solution est alors unique.

D'autre part on peut constater, pour la fonction F correspondant au choix de u_a^I en période I, que

$$F(\sigma,\omega,0,0,0) = (L_1 + \varepsilon L_2 + \varepsilon^2 L_3 + \cdots)(\sigma,\omega,0), \partial_\tau^{2\ell}\partial_z^\ell F(\sigma,\omega,0,0,0) = 0(\ell \geq 1).$$

Le choix de ces "données initiales" pour u_a en période II garantira donc, grâce à l'unicité, le recollement correct ("matching") des approximations. Pour des raisons techniques dues au comportement à l'intérieur, on choisit en fait d'effectuer ce recollement dans une zone $t \sim \varepsilon^{-14/9}$.

Autrement dit, on calcule $u_a^{II} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F$ en résolvant une équation non linéaire avec le "profil libre" $\frac{\varepsilon}{r^{1/2}}(L_1 + \varepsilon L_2 + \cdots)$ comme donnée initiale. Qu'a-t-on gagné à cette démarche, par comparaison avec (1.1.3) ? D'abord, les variables ne sont pas les mêmes, mais l'essentiel est que l'équation à résoudre est, asymptotiquement, du premier ordre (comme il convient dans une méthode d'"optique géométrique"). Indiquons notamment que le terme principal $v(\sigma, \omega, \tau, \zeta) = F(\sigma, \omega, \tau, \zeta)$ de F est obtenu en résolvant l'équation $\partial_\tau v - g/2(\partial_\sigma v)^2 = 0$, pour une donnée initiale $v_0(\sigma, \omega, \zeta) = L_1 + \varepsilon L_2 + \cdots + 0(\zeta)$.

Cela explique, compte tenu des propriétés de l'équation de Burger, le rôle fondamental joué par A_0, car le temps de vie de v vaut $A_0 + 0(\varepsilon) + 0(\zeta)$.

2.3. Optique géométrique à l'explosion.

2.3.1 La phase de transition se termine à $\tau = A$. On constate qu'au voisinage de cet instant, les variables $z = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon^2}{\tau^2}(1 + \frac{\sigma\varepsilon^2}{\tau^2})^{-1}$ et $\zeta = 2\varepsilon^2 \log \frac{\tau}{\varepsilon}$ sont devenues superflues ; on veut donc réécrire la fonction $F(\sigma, \omega, z, \tau, \zeta)$ précédemment calculée sous la forme $F(\sigma, \omega, \tau)$ (par abus).

Avec $u = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F(r - t, \omega, \tau)$, le calcul donne

(2.3.1)
$$\Box u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{rt}} \left\{ -\partial_\tau \partial_\sigma F + g \partial_\sigma F \partial_\sigma^2 F + \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{\tau^3} \left(\frac{1}{4} + \partial_\omega^2 \right) F + \cdots \right] \right\},$$

où les points désignent divers termes faisant intervenir les dérivées premières et secondes de F en $\partial_\sigma, \partial_\omega, \partial_\tau$.

D'autre part, la valeur de u_a^{II} pour $\tau = A$,

$$u_a^{II}|_{\tau=A} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F(\sigma, \omega, \frac{\varepsilon^2}{A^2}(1 + \frac{\sigma\varepsilon^2}{A^2})^{-1}, A, 2\varepsilon^2 \log \frac{A}{\varepsilon}) \equiv \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F_A(\sigma, \omega),$$

fournit naturellement la trace sur $\tau = A$ du nouveau F, solution de (2.3.1).

Si l'on trouve une solution régulière F de

(2.3.2) $$\partial_\tau \partial_\sigma F + g \partial_\sigma F \partial_\sigma^2 F + \varepsilon^2 [\cdots] = 0 \quad \text{satisfaisant}$$

(2.3.3) $$F(\sigma, \omega, A) = F_A(\sigma, \omega),$$

que dire de la deuxième trace de F sur $\tau = A$? on voit facilement qu'elle est en fait déterminée, à $0(\varepsilon^\infty)$ près, par la première.

Ceci garantit que pour l'approximation $u_a^{III} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F(r-t,\omega,\tau)$ obtenue à l'aide d'un tel F, on a aussi $\partial_\tau(u_a^{III}-u)|_{\tau=A}$ petit si u_a^{II} est une approximation suffisamment bonne de u.

2.3.2 Expliquons maintenant comment on peut trouver une solution de (2.3.2)/(2.3.3) (on translate ici τ pour se ramener à une donnée initiale sur $\tau = 0$).

Rappelons d'abord que les fonctions considérées sont toutes supportées pour $\sigma \le M$.

• Soient alors $h(x,\omega,\tau)$ et $V(x,\omega,\tau)$ des fonctions à déterminer, supportées pour $x \le M$, vérifiant $h(x,\omega,0) = 0, V(x,\omega,0) = \partial_x F_A(x,\omega)$.

Si τ_* est assez petit pour que $D = 1 + \partial_x h > 0$ lorsque $\tau < \tau_*$ on définit pour $0 \le \tau < \tau_*, X(\sigma,\omega,\tau)$ par

$$X(\sigma,\omega,\tau) + h(X(\sigma,\omega,\tau),\omega,\tau) = \sigma, \tag{2.3.4}$$

et l'on cherche la solution de (2.3.2) sous la forme

$$F(\sigma,\omega,\tau) = \int_M^\sigma V(X(s,\omega,\tau),\omega,\tau)ds. \tag{2.3.5}$$

• Calculons par exemple $\partial_\omega^2 F$: en posant $x = X(s,\omega,\tau)$, il vient $F(\sigma,\omega,\tau) = \int_M^{X(\sigma,\omega,\tau)} (DV)(x,\omega,\tau)dx$. D'où

$$\partial_\omega F(\sigma,\omega,\tau) = \int_M^{X(\sigma,\omega,\tau)} (D\partial_\omega V - \partial_\omega h \partial_\omega V)(x,\omega,\tau)dx \ ,$$

puis $\partial_\omega^2 F(\sigma,\omega,\tau) = \frac{\partial_x V}{D}(\partial_\omega h)^2(X(\sigma,\omega,\tau),\omega,\tau) + \int_M^{X(\sigma,\omega,\tau)}(D\partial_\omega^2 V - \partial_\omega^2 h\partial_x V - 2\partial_\omega h \partial_\omega \partial_x V)(x,\omega,\tau)dx$.

• Les différents termes de (2.3.2) se calculent de façon analogue, et l'on obtient

$$-\partial_\tau\partial_\sigma F + g\partial_\sigma F \partial_\sigma^2 F + \varepsilon^2[\cdots] = \frac{\partial_x V}{D}\{\partial_\tau h + gV + \varepsilon^2 \mathcal{L}_1(h,V)\}$$

$+(-\partial_\tau V + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2(h,V))$, où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont certaines expressions, non linéaires et intégrales de dérivées de h et V.

Ici le membre de gauche est évalué en (σ,ω,τ) tandis que le membre de droite l'est en $(X(\sigma,\omega,\tau),\omega,\tau)$.

Il suffit donc de choisir h et V solutions de

$$\begin{cases} \partial_\tau h + gV + \varepsilon^2 \mathcal{L}_1(h,V) = 0, \\ -\partial_\tau V + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2(h,V) = 0, \\ h(x,\omega,0) = 0, \quad V(x,\omega,0) = \partial_x F_A(x,\omega), \end{cases} \tag{2.3.6}$$

pour résoudre (2.3.2)/(2.3.3) pour $0 \leq \tau < \tau_*$.

Nous croyons qu'il est possible, dans certaines situations de résoudre (2.3.6) de façon exacte. Ici, nous nous contentons de choisir $h = h^{(\ell)} = h_0 + \varepsilon^2 h_1 + \cdots + \varepsilon^{2\ell} h_\ell, V = V^{(\ell)} = V_0 + \varepsilon^2 V_1 + \cdots + \varepsilon^{2\ell} V_\ell$, où $V_0 = \partial_x F_A, h_0 = -\tau g \partial_x F_A$ correspondent à la solution de l'équation de Burger, tandis que les h_j, V_j sont déterminés successivement par (2.3.6) (ℓ est grand selon les besoins).

On obtient ainsi une solution $u_a = u_a^{(\ell)}$, définie pour $0 \leq \tau < \tau_*^{(\ell)}(\varepsilon, \varepsilon^2 \log \varepsilon)$ (car $F_A, h^{(\ell)}, V^{(\ell)}, X^{(\ell)}, F^{(\ell)}$ dépendent de ε de cette façon), avec $\tau_*^{(\ell)}(0,0) = A_0$.

C'est uniquement ici qu'intervient l'hypothèse (ND) faite sur g et le premier profil libre R ; cette hypothèse permet l'étude de $D^{(\ell)}$ à l'aide du théorème des fonctions implicites.

3. Inégalités d'énergie et estimations des restes.

Une fois u_a construite, on pose $u = u_a + \dot{u}$ et il vient

$$L\dot{u} \equiv \Box \dot{u} + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k \partial_{ij}^2 u_a \partial_k \dot{u} = -J_a, \tag{3.1}$$

où

$$J_a = \Box u_a + g_{ij}^k \partial_k u_a \partial_{ij}^2 u_a.$$

L'opérateur L est essentiellement le linéarisé de l'équation sur u_a.

Il s'agit maintenant de contrôler $\dot{u}$ à l'aide d'inégalités sur L, dans un domaine d'influence de L, très voisin de $\{t_0 = \frac{A^2}{\varepsilon^2} \leq t \leq T, r - t \geq -\text{ cte}\}$ (en effet, l'estimation de $\dot{u}$ pour les deux premières périodes ne pose pas de problème, cf. par exemple [6]).

3.1. Dans le calcul habituel d'intégrations par parties de $L\dot{u}\dot{u}_t$ qui mène à l'inégalité d'énergie standard (cf. par exemple prop. 6.3.2 de [7]), on voit apparaître des termes du type $\nabla^2 u \nabla \dot{u} \nabla \dot{u}$, auxquels s'ajoutent les termes du type $\nabla^2 u_a \nabla \dot{u} \nabla \dot{u}$ provenant des termes d'ordre inférieur de L. Comme $||\nabla^2 u||_{L^\infty} \sim ||\nabla^2 u_a||_{L^\infty} \sim \frac{C_1 \varepsilon}{\sqrt{t}(\tau_* - \tau)}$ (nous omettons partout l'indice (ℓ) de $u_a = u_a^{(\ell)}$ pour alléger), le facteur correspondant d'amplification $e^{C_0 \int_{t_0}^T ||\nabla^2 u||_{L^\infty} dt}$ de l'énergie vaudra à peu près $\frac{1}{(\tau_* - \varepsilon\sqrt{T})^{2C_0 C_1}}$.

Pour obtenir des estimations précises du reste et de ses dérivées, nous allons mettre en évidence à l'aide d'inégalités à poids le caractère "quasi radial" du comportement de $\dot{u}$ (et donc de u), c'est-à-dire le fait que $\partial_{x_i} \dot{u} \sim -\omega_i \partial_t \dot{u}$.

3.2. Le principe de l'inégalité d'énergie à poids illustré sur un modèle.

Supposons pour simplifier $Lv = \Box v + a_o \partial_t v + \sum a_i \partial_i v$.

En introduisant le poids $a = e^{B\varphi(r-t)}$(φ croissante, $B > 1$), on trouve $a\Box v v_t = aB\frac{\varphi'}{2} \sum\limits_{i\geq 1}(\omega_i v_t + \partial_i v)^2 + \partial_t E + \sum\limits_i \partial_i(\ )$, avec $E = \frac{a}{2}(v_t^2 + |\nabla_x v|^2)$. Cela permet d'écrire

$$aLvv_t = aB\frac{\varphi'}{2}\Sigma(\omega_i v_t + \partial_i v)^2 + \partial_t E + \Sigma\partial_i(\ ) + a(a_0 - \Sigma a_i\omega_i)(v_t)^2 + a\Sigma a_i(\partial_i v + \omega_i v_t)v_t$$

d'où, pour tout $\eta > 0$,

$$E(T) \leq E(t_0) + \int_{t_0}^{T} aLvv_t dt + 2(\eta + \sum a_i\omega_i - a_0)\int_{t_0}^{T} E(t)dt$$

pour B choisi assez grand (dépendant de η).

3.3. Le cas de l'opérateur L

.

L'opérateur L défini par (3.1) n'a pas pour partie principale $\Box$; on doit donc modifier l'exemple du §3.2 en prenant φ' de l'ordre de $\nabla^2 u$.

Voici les choix opérés :

$a = e^{B\frac{\varepsilon}{r^{1/2}}(\psi g V_0)(X,\omega)}$ où $V_0 = \partial_x F_A$ (voir §2.3.2), $\psi(x,\omega)(0 \leq \psi \leq 1)$ étant une troncature telle que $g\partial_x V_0 \geq$ cte > 0 sur supp ψ et $D \geq$ cte > 0 sur supp $(1-\psi)$ pour $\tau < \tau_*$.

En posant

$$d \doteq \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\frac{\partial_x V_0}{D}(X,\omega,\tau) \text{ et } E = \frac{1}{2}\int a[(\partial_t v)^2 + |\nabla_x v|^2 - g_{ij}^k \partial_k u \partial_i v \partial_j v]dx,$$

on a alors l'inégalité d'énergie suivante (voir [3]) :

(3.3.1) Pour tout $B \geq 1$, il existe une fonction $\alpha_B \geq 0$, vérifiant $\int_{t_0}^T \alpha_B(t)dt \leq C(1+B)$, et pour tout $\eta > 0$, une constante C_η telles que, pour tout $\lambda \leq 10$, on ait

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} a\psi dg\{(B - C_\eta)\sum_{i\geq 1}(\partial_i v + \omega_i \partial_t v)^2 + 2(\lambda - \frac{1}{2} - \eta)(\partial_t v)^2\}dx\ dt$$

$$+E(T) \leq E(t_0) + \int_{t_0}^{T} aLv\partial_t v dx\ dt + \int_{t_0}^{T}\{\alpha_B(t) + \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}(\tau_* - \varepsilon\sqrt{t})}\}E(t)dt.$$

Si, pour $\lambda > \frac{1}{2}$, on néglige le premier terme du membre de gauche, on obtient pour $E(T)$ par application du lemme de Gronwall, une amplification de $E(t_0)$ par un facteur $\frac{1}{(\tau_* - \varepsilon\sqrt{t})^{2\lambda}}$.

Ce résultat, quelque peu surprenant au vu des considérations du §3.1, s'obtient en utilisant le procédé expliqué au §3.2 et le fait très simple suivant : pour une solution $v(x, \tau)$ de l'équation de Burger de temps de vie τ_*, on a $||\partial_x v||_{L^\infty} \leq$ cte $+ \frac{1}{\tau_* - \tau}$.

3.4. Une fois que l'on dispose de l'outil (3.3.1), il est aisé de l'utiliser pour estimer $v = \dot{u}$ et ses dérivées par rapport à x, t et ω.

La preuve suit alors le chemin habituel d'un raisonnement par induction sur le temps (cf. [6], [7]).

Finalement, on définit le temps τ_* du théorème 1.2 par la propriété $\tau_* \sim \tau_*^{(0)} + \sum_{\ell \geq 1} (\tau_*^{(\ell+1)} - \tau_*^{(\ell)})$, ce qui est loisible car $\tau_*^{(\ell+1)} - \tau_*^{(\ell)} = 0(\varepsilon^{2\ell+2})$.

Bibliographie :

[1] Alinhac S. *Une solution approchée en grands temps des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux*, Comm. in PDE, **17** (3 et 4), (1992), 447-490.

[2] Alinhac S. *Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux* Preprint, Paris-Sud/Orsay (1992).

[3] Alinhac S. *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux* I et II, Preprint, Paris-Sud/Orsay (1992 et 1993).

[4] Di Perna R. et Majda A. *The validity of geometrical optics for weak solutions of conservation laws* Comm. Math. Phys. **98** (1985), 313-347.

[5] Friedlander G. *On the radiation field of pulse solutions of the wave equation I, II*, Proc. Roy. Soc. A, **269** (1962), 53-65 et **279** (1964), 386-394.

[6] Hörmander L. *The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations*, Mittag Leffler report n° 5 (1985).

[7] Hörmander L. *Non linear hyperbolic differential equations*, Lectures, (1986-87).

[8] John F. *Non linear wave equations, formation of singularities* Pitcher lectures in the Math. Sciences AMS (1990).