Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Grigis
A. Mohamed

Résultats de finitude pour les lacunes spectrales

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 23, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A23_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

RESULTATS DE FINITUDE POUR LES LACUNES SPECTRALES

A. GRIGIS & A. MOHAMED

Exposé n° XXIII

17 Novembre 1992

1. Introduction

Dans cet exposé nous donnons un résumé d'une nouvelle démonstration de la conjecture de Bethe-Sommerfeld qui affirme qu'en dimension supérieure ou égale à deux le spectre de l'opérateur de Schrödinger périodique ne présente qu'un nombre fini de lacunes (ou gaps). Cette conjecture a été établie par Skriganov [8] en dimension deux et trois et en dimension supérieure à trois pour certains réseaux de périodes. D'autres travaux ont été consacrés à ce problème (Dahlberg et Trubowitz [1], Veliev [9]). Pour un potentiel constant le spectre est $\mathbb{R}^+$ et les bandes spectrales peuvent être définies géométriquement à l'aide des zones de Brillouin ([11]). Il est clair que les bandes se chevauchent si la dimension est supérieure à un, et il s'agit de montrer que ceci persiste si le potentiel n'est plus constant. Par rapport aux autres travaux notre méthode utilise la théorie des Fourier intégraux pour estimer la fonction de comptage des opérateurs de Floquet et nous contrôlons ainsi microlocalement la perturbation créée par le potentiel. Nous pensons que cette méthode peut s'adapter à d'autres opérateurs périodiques.

2. Idée de la démonstration.

Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ le tore quotient $\mathbb{R}^n/\Gamma$ et Γ^* le réseau dual :

(1) $$\Gamma^* = \{\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*; \gamma.a \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \Gamma\} .$$

D'autre part soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$ les cellules élémentaires respectives de Γ et Γ^*.

Soit V une fonction réelle Γ-périodique ayant une certaine régularité.

(2) $$V(x-a) = V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Gamma .$$

On pourra toujours supposer, quitte à translater le spectre étudié, que :

(3) $$\int_{\mathcal{K}} V(x)dx = 0$$

On considère l'opérateur de Schrödinger Γ-périodique :

(4) $$H = H_0 + V(x) = -\Delta + V(x) = D^2 + V(x)$$

Si $V \in L^2(\mathbb{R}^n)$, H est autoadjoint non borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et le spectre de H a une structure de bandes.

Pour $\theta \in (\mathbb{R}^n)^*$ on considère l'opérateur (sur $L^2(\mathbb{T}^n)$) :

(5) $$H^\theta = (D-\theta)^2 + V(x) ,$$

dont le spectre est discret et constitué d'une suite croissante, tendant vers l'infini, de valeurs propres $\lambda_k(\theta)$. La théorie de Floquet montre que le spectre de H est la réunion des intervalles (bandes spectrales) :

$$b_k = \{\lambda_k(\theta), \theta \in \mathcal{K}^*\} \ , \tag{6}$$

En dimension 1, pour des potentiels génériques les bandes sont toutes séparées (voir [3], [6]) et il a une infinité de lacunes. C'est seulement pour des potentiels particuliers que le spectre de H présente un nombre fini de lacunes.

En dimension $n \geq 2$, les bandes peuvent se chevaucher et la conjecture de Bethe-Sommerfeld se ramène à :

"*Il existe* λ_0 *tel que* $[\lambda_0, +\infty[$ *soit contenu dans le spectre de* H"

Si on note $N(\lambda, Q)$ la fonction de comptage c'est à dire le nombre de valeurs propres $\leq \lambda$ de l'opérateur (auto-adjoint, semi-borné) Q, et si on pose

$$\begin{aligned} N_{\max}(\lambda^2, H) &= \sup_{\theta \in \mathcal{K}^*} N(\lambda^2, H^\theta) \\ N_{\min}(\lambda^2, H) &= \inf_{\theta \in \mathcal{K}^*} N(\lambda^2, H^\theta), \end{aligned} \tag{7}$$

alors la conjecture de Bethe-Sommerfeld est équivalente à

$$\exists \lambda_0 \ ; \ \forall \lambda > \lambda_0, \ N_{\max}(\lambda^2, H) > N_{\min}(\lambda^2, H) \ . \tag{8}$$

Nous étudions la fonction Γ^*-périodique $N(\lambda^2, H^\theta)$ à l'aide de l'opérateur d'évolution exp (itQ^θ) où $Q^\theta = |H^\theta|^{1/2}$. (C'est cet opérateur d'évolution qui prend la forme d'un opérateur intégral de Fourier).

Les estimations classiques ([5]) de la fonction de comptage donnent un premier terme, dit de Weyl, indépendant de θ et une estimation du reste qui me permet pas de prouver que $N(\lambda^2, H^\theta)$ oscille suffisamment en θ.

Suivant une idée de Dahlberg-Trubowitz [1] nous considérons les coefficients de Fourier de $N(\lambda^2, H^\theta)$

$$M_b(\lambda^2, H) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{T}^n)}{(2\pi)^n} \int_{(\mathbb{R}^n)^*/\Gamma^*} e^{-ib\theta} N(\lambda^2, H^\theta) d\theta, b \in \Gamma \tag{9}$$

Par une étude très technique de l'opérateur d'évolution et en utilisant (3) nous obtenons d'abord le résultat :

Théorème 1.— *Soit* $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \Gamma$-*périodique.*

On a :

$$|M_b(\lambda^2, H) - M_b(\lambda^2, H_0)| \leq C(V, b)(1 + \lambda^{\frac{n-5}{2}}) \tag{10}$$

où $C(V, b)$ *ne dépend pas de* λ.

D'autre part nous reprenons l'étude du cas sans potentiel (c'est-à-dire H_0). Le spectre est $\mathbb{R}^+$ et il n'y a pas de lacunes. Les extrémités des bandes sont les carrés des rayons internes et externes des zones de Brillouin (qui sont des couronnes polygonales). Pour estimer le recouvrement des bandes on obtient à l'aide de la phase stationnaire le résultat classique :

Lemme.— *Il existe une constante $C(n)$ tel que pour tout $b \neq 0 \in \Gamma$ et tout $\lambda > |b|^{-1}$:*

$$(11)\quad \begin{aligned} &|M_b(\lambda^2, H_0) - \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{T}^n)}{(\pi|b|)^{\frac{n+1}{2}}}\lambda^{\frac{n-1}{2}}(\sin(\lambda|b| - \frac{n-1}{2}) + \frac{1}{2\lambda|b|}\cos(\lambda|b| - \pi\frac{(n-1)}{2}))| \\ &\leq |b|^{-1}(\lambda|b|)^{\frac{n-5}{2}}C(n)\,. \end{aligned}$$

Il suffit alors pour chaque λ de minorer un coefficient de Fourier au moins pour montrer que $N(\lambda^2, H^\theta)$ oscille suffisamment et on obtient facilement le théorème suivant qui implique (8) donc la conjecture de Bethe-Sommerfeld :

Théorème 2.— *Soit $n > 1$ et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, Γ-périodique. Il existe $\rho_n > 0$ ne dépendant que de n et Γ et C_V ne dépendant que de V telles que pour $\lambda >> 1$:*

$$(12)\qquad N_{\max}(\lambda^2, H) - N_{\min}(\lambda^2, H) > \rho_n\lambda^{\delta(n)} - C_V(1 + \lambda^{\frac{n-5}{2}})$$

avec $\delta(n) = \frac{n-1}{2}$ si $n - 1 \notin 4\mathbb{N}$ et $\delta(n) = \frac{n-3}{2}$ si $n - 1 \in 4\mathbb{N}$.

On remarque qu'en dimension $4p + 1, p$ entier on a une estimation moins bonne. C'est un exercice sur les réseaux d'essayer de prouver que l'estimation peut être améliorée.

3. Rappels sur les zones de Brillouin

Nous rappelons ici la construction de Brillouin (voir [11] et aussi [8]).

Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^n$ euclidien, c'est-à-dire un sous-groupe additif discret, de rang n. L'ensemble des médiatrices de $[0, a], a \in \Gamma$ est fermé. Si x est dans le complémentaire de cet ensemble et si on range les points de Γ en une suite $a_m(x)$ tel que $|x - a_m(x)|$ soit croissante alors le rang de 0 dans cette suite est bien déterminé. La j-ième zone de Brillouin est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $0 = a_j(x)$.

Une zone de Brillouin est donc une couronne polygonale dont les cotés sont des médiatrices de segment $[0, a], a \in \Gamma$. La première zone de Brillouin est la cellule fondamentale bien connue appelée de Voronoi ou de Wigner ou de Brillouin.

Une propriété élémentaire et un peu surprenante est que toute zone de Brillouin est un domaine fondamental du réseau. Par exemple tout point intérieur à la j-ième zone de Brillouin peut s'envoyer par une translation du réseau sur un point et un seul de la 1ère zone qui se trouve ainsi découpée en un puzzle appelé j-ième puzzle de Brillouin.

Si on considère l'opérateur H_0 sur $\mathbb{R}^n$ comme étant Γ-périodique on sait que le spectre périodique de H_0 est l'ensemble des $|\gamma|^2$ pour $\gamma \in \Gamma^*$.

La j-ième bande spectrale de H_0 est $[r_j^2, R_j^2]$ où r_j et R_j sont les rayons internes et externes de la j-ième zone de Brillouin de Γ^*. Ces zones étant des polygones il est évident que les bandes spectrales se recouvrent si $n \geq 2$.

Références

[1] J. Dahlberg and E. Trubowitz, *A remark on two dimensional periodic potentials*, Comment Math. Helvetici, 57, 130-134, (1982).

[2] J. Feldman, H. Knörrer and E. Trubowitz,
[2-1] *The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator*, Invent. Math. 100 (2), (1990), 259-300.
[2-2] *Perturbatively unstable eigenvalues of a periodic Schrödinger operator*, Comment. Math. Helvetici 66 (1991), 557-579.

[3] A. Grigis, *Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t.20, 1987, p.641-672.

[4] H. Knörrer and E. Trubowitz, *A directional compactification of the complex Bloch variety* Comment. Math. Helvetici 65 (1990), 114-149.

[5] L. Hörmander,
[5-1] *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math., 121, 193-218, (1968).
[5-2] *The analysis of linear partial differential operators, III, IV*, Springer-Verlag, Berlin, (1985)

[6] T. Ramond, *Intervalles d'instabilité pour une équation de Hill à potentiel méromorphe*, Thèse Université Paris-Nord, Décembre 1991, et Bulletin de la SMF (1993).

[7] R.T. Seeley, *Complex powers of an elliptique operator*, Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math., 10, Am. Math. Soc., 288-307, (1967).

[8] M.M. Skriganov,
[8-1] *Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensionel periodic operators*, Proceedings of the Steklov Institute of Math., 171, (2), (1987).
[8-2] *The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential*, Invent. Math., 80, 107-121. (1985).

[9] O.A. Veliev, *The spectrum of multidimensional periodic operators*, (Russian), Teor. Funktssii. Anal. i Prilozhen., 49 (1988), p.17-34.

[10] A.V. Volovoy, *Improved two-term asymptotics for the eigenvalue distribution function of an elliptic operator on a compact manifold*, Comm. in Part. Diff. Equat., 15, (11), 1509-1563, (1990).

[11] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures*, Dover Publications New-York (1946).

A. Grigis
Université Paris XIII
Département de Mathématiques
Av. J.B. Clément
93430 Villetaneuse

A. Mohamed
Université de Nantes
Département de Mathématiques
2 rue de la Houssinière
44072 Nantes Cedex 03