SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. GAMBLIN

Système d'Euler incompressible et régularité microlocale analytique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 20, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SYSTEME D'EULER INCOMPRESSIBLE ET REGULARITE MICROLOCALE ANALYTIQUE

P. GAMBLIN

Exposé n° XX

19 Janvier 1993

0. Introduction

On modélise le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace physique $\mathbf{R}^d (d \geq 2)$ à l'aide du système d'Euler incompressible. Si on désigne par $v(t,x)$ et $p(t,x)$ respectivement la vitesse et la pression au point $x = (x^1, \cdots, x^d)$, à l'instant t, ce système s'écrit

$$(E_{inc}) \begin{cases} \partial_t v + v.\nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ . \end{cases}$$

On s'empresse alors de calculer la pression. On dérive pour cela l'équation d'évolution et on conserve sa partie symétrique. Il vient

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \partial_j (v^i v^j) \tag{0.1}$$

si $v^1, \cdots, v^d$ désignent les composantes du champ des vitesses v. En imposant des conditions de décroissance à l'infini à la solution v du système (E_{inc}), on peut donc exprimer la pression en fonction de v. Le système d'Euler incompressible peut alors être regardé comme un système quasi-linéaire à partie principale diagonale. Illustrant ce fait, J.-Y. Chemin montre dans [2] que toute solution $C^r (r > 1)$ du système (E_{inc}) sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ possède des lignes de courant C^∞. Récemment, en remettant à l'honneur des techniques introduites par L. Lichtenstein (voir [6]), Ph. Serfati montre (voir [7]) que, dans le cadre d'une approche lagrangienne, le système d'Euler peut s'écrire comme une équation différentielle ordinaire du second ordre analytique en temps et en déduit ainsi l'analyticité des lignes de courant d'abord dans un cadre restreint (Chap.IV A) puis pour toute solution $C^r (r > 1)$ (Chap.III).

En vue de s'intéresser à la régularité des lignes de courant d'une solution pas forcément lipschitzienne de (E_{inc}), on a préféré ici le cadre eulérien et repris l'idée développée par J.-Y. Chemin dans le cadre C^∞ (voir [2]). Elle consiste en la remarque suivante : on suppose que le facteur pseudo-différentiel $\nabla \Delta^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (v^i v^j)$ est simplement $f(v)$ où f est une fonction analytique. Le système (E_{inc}) s'écrit alors : $\partial_t v + v.\nabla v = f(v)$ et l'action répétée du champ $\partial_t + v.\nabla$ sur cette équation fournit une estimation, de type analytique, de $(\partial_t + v.\nabla)^k v$. **En fait, il faudra étudier et estimer précisément la commutation répétée du champ $\partial_t + v.\nabla$ avec l'opérateur de pression.**

Ce point de vue permet de retrouver directement l'analyticité des lignes de courant de toute solution $C^r (r > 1)$ de (E_{inc}) sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$, et d'obtenir une régularité Gevrey pour les lignes de courant d'une solution à tourbillon borné, non nécessairement lipschitzienne.

De plus, afin d'illustrer le fait que le système d'Euler incompressible (E_{inc}) possède un comportement très proche de celui d'une équation scalaire dans le domaine de l'ellipticité microlocale, on montre que le front d'onde analytique d'une solution $C^r (r > 1)$ de (E_{inc}) sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ est localisé dans la variété caractéristique $\{(t,x,\tau,\xi)/\tau + (v/\xi) = 0\}$.

Plus précisément, on note ψ le flot d'une solution "suffisamment régulière" de (E_{inc}), ce flot étant défini par

$$\partial_t \psi(t,x) = v(t,\psi(t,x)) \ , \ \psi(0,x) = x \ . \tag{0.2}$$

On étudie alors la régularité en temps du flot ψ dans deux situations "modèles".

• Dans un premier temps, la dimension d ne joue aucun rôle et on considère une condition initiale $v_0 \in C^r \cap L^q$ avec $r > 1$ et $1 < q < +\infty$. On sait (voir par exemple [2]) qu'il existe un temps T^* maximal, et une unique solution v de (E_{inc}) appartenant à $L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T^*[,C^r) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}([0,T^*[,L^q)$. Pour une telle solution, on a le résultat d'analyticité des lignes de courant.

Théorème A.— *Soit $v_0 \in C^r \cap L^q$ avec $r > 1$ et $1 < q < +\infty$. Si v est la solution $L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T^*[,C^r) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}([0,T^*[,L^q)$ de (E_{inc}), il existe une constante C_1 positive telle que, pour tout $T < T^*$,*

(i) pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|(\partial_t + v\nabla)^k v\|_{C^r([0,T]\times\mathbf{R}^d)} \leq C_1^k k! \|v\|^{k+1}_{C^r([0,T]\times\mathbf{R}^d)}$,

(ii) le flot ψ est analytique sur $[0,T]$ à valeurs $Id + C^r$.

• Dans un second temps, on se place en dimension 2 et on considère une condition initiale non lipschitzienne. On introduit pour cela les notions suivantes.

Définition 0.1.— *On appelle tourbillon du champ de vecteur $v = {}^t(v^1,v^2)$ la quantité $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$.*

Définition 0.2.— *On appelle champ de vecteurs tourbillonnaire stable, et on note σ, tout champ de vecteurs de la forme*

$$\sigma = (-x^2 \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho g(\rho) d\rho \ , x^1 \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho g(\rho) d\rho) \quad \text{où} \quad g \in C_0^\infty(\mathbf{R}\setminus 0)$$

et $\quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.

Ce champ σ est alors une solution stationnaire régulière de (E_{inc}) et $\nabla\sigma \in \bigcap_s H^s$.

Si $v_0 \in \sigma + L^2$ tel que $\omega_0 \in L^\infty \cap L^q (q < +\infty)$, on sait (voir [3]) qu'il existe une unique solution v de (E_{inc}) appartenant à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, \sigma + L^2)$ telle que $\omega \in L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}, L^q)$. De plus $v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, C^1_*)$ et il existe un flot ψ et une constante α positive tels que pour tout $T > 0$, $\psi \in \mathrm{Lip}([0,T], Id + C^{\exp(-\alpha T)})$. Pour une telle solution, on obtient une régularité Gevrey 2 des lignes de courant.

Théorème B.— *Soit $v_0 \in \sigma + L^2$ tel que $\omega_0 \in L^\infty \cap L^q (q < +\infty)$. Si v est la solution de (E_{inc}) appartenant à $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}\ , \sigma + L^2) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, C^1_*)$, pour tout $T > 0$, il existe deux constantes positives C_0 et C_1 telles que,*

(i) pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$,
$\|(\partial_t + v\nabla)^k v\|_{C^{1-\varepsilon}([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \leq C_0(\frac{C_1}{\varepsilon})^k (k!)^2$,

(ii) le flot ψ est Gevrey 2 sur $[0,T]$ à valeurs $Id + C^{\exp(-\alpha T)}$.

En conclusion, on déduit des théorèmes A et B le

Théorème C.— *Soit v solution $L^\infty([0,T], C^r)$ avec $r > 1$(resp : $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, C^1_*)$) de (E_{inc}). Alors le front d'onde analytique (resp : Gevrey 2) des composantes de v est inclus dans la variété caractéristique $\{(t,x,\tau,\xi)/\tau + (v/\xi) = 0\}$.*

Remarque : l'auteur ne connaît pas de solution explicite du système d'Euler incompressible dont le flot est à régularité exponentiellement décroissante avec le temps. L'optimalité du théorème B reste donc à vérifier.

1. Idées de la preuve des théorèmes A et B.

Il s'agit dans un premier temps d'exprimer convenablement le gradient de la pression en fonction de v. Pour cela, on peut montrer le lemme suivant où le temps, fixé, n'apparaît pas :

Lemme 1.1.— *Soit $u \in C^\sigma \cap L^q (\sigma > \frac{1}{2}$ et $q \geq 1)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Alors l'équation*

$$(0.1)' \qquad -\Delta p = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \partial_j (u^i u^j)$$

admet une solution $p(u,u)$ bornée, unique à constante près. De plus,

$$(1.2) \quad -\nabla p(u,u)(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \int (\partial_i \partial_j \nabla F_d)(x-z)(u^i(x) - u^i(z))(u^j(x) - u^j(z)) dz\ .$$

Puis, afin de décrire la commutation de l'opérateur d'intégrale singulière

$$-\nabla p(v,v)(t,x) = \sum_{i,j} \int (\partial_i \partial_j \nabla F_d)(x-z)(v^i(t,x) - v^i(t,z))(v^j(t,x) - v^j(t,z)) dz$$

avec les itérés du champ $\frac{D}{Dt} (= \partial_t + v\nabla)$, on définit les opérateurs multilinéaires suivants :

Définition 1.2.— *Soit $K_p \in C^\infty(\mathbf{R}^d \backslash 0)$ où $p \in \mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ tel que*

$$(1.3)_p \qquad |\partial^\alpha K_p(z)| \leq A_{p+|\alpha|}|z|^{-d+1-p-|\alpha|}$$

où (A_j) est une suite croissante de réels positifs. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une suite de fonctions de classe $C^{1-\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{p}[$. On définit alors l'opérateur :

$$Op(K_p, u_1, \cdots, u_p)(x) = \int K_p(x-z) \prod_{i=1}^{p} (u_i(x) - u_i(z))dz.$$

Il s'agit d'étudier tout d'abord, l'opérance de ces opérateurs sur les classes de Hölder. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 1.3.— *On considère les noyaux de la définition 1.2 et on suppose qu'ils sont homogènes de degré $-d+1-p$.*

(i) Il existe une constante C_2 indépendante de p telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{p}[$,

$$(1.4)_p \qquad \|O_p(K_p, u_1, \cdots, u_p)\|_{C^{1-p\varepsilon}} \leq A_p \varepsilon^{-1} C_2^p \prod_{i=1}^{p} \|u_i\|_{C^{1-\varepsilon}} \ .$$

(ii) Si $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une suite de fonctions $C^r (r > 1)$ et sous la condition d'annulation

$$(1.5)_p \qquad \int_{S^{d-1}} K_p(z) z^\beta d\sigma(z) = 0 \quad pour \quad |\beta| \leq p-1 \quad (\beta \in \mathbf{N}^d),$$

il existe une constante C_3 indépendante de p telle que

$$(1.6)_p \qquad \|O_p(K_p, u_1, \cdots, u_p)\|_{C^r} \leq A_{p+1} C_3^p \prod_{i=1}^{p} \|u_i\|_{C^r} \ .$$

Afin de nous ôter tout souci dans la suite, on régularise la condition initiale v_0 en définissant

$$v_{0,n} = \rho_n * v_0 \ ,$$

où ρ_n est une suite régularisante. Soit (v_n) la suite associée de solutions $C_b^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d)$ où T est un temps commun d'existence.

Il est maintenant temps d'appliquer le champ $\frac{D_n}{Dt}(= \partial_t + v_n.\nabla)$ à l'équation

$$\frac{D_n}{Dt} v_n = -\nabla p(v_n, v_n) \ .$$

On vérifie tout d'abord que la commutation répétée de l'opérateur de pression $-\nabla p$ avec $\frac{D_n}{Dt}$ est bien décrite par les opérateurs Op (voir la définition 1.2). En effet, on a le lemme suivant.

Lemme 1.4.— *Soit v un champ de vecteurs $C_b^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d)$, à divergence nulle, et une suite $(u_i)_{1\le i\le p}$ de fonctions $C_b^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d)$. Alors,*

$$(1.7)_p \qquad \begin{aligned}(\partial_t+v.\nabla)Op(K_p,u_1,\cdots,u_p) &= \sum_{i=1}^{p} Op(K_p,u_1,\cdot,(\partial_t+v.\nabla)u_i,\cdot,u_p)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{d} Op(\partial_j K_p,u_1,\cdots,u_p,v^j)\ .\end{aligned}$$

On en déduit, en notant $\tilde\mu_p=(\mu_{-1},\mu_0\cdots,\mu_p)$ et en raisonnant par récurrence sur k, que

$$(1.8)_k \qquad \begin{aligned}\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^k \nabla p(v_n,v_n) &= \sum_{p=0}^{k}\sum_{|\tilde\mu_p|=k-p} C^k_{\tilde\mu_p}\\ \times \sum_{j_{-1},\cdots,j_p=1}^{d} & O_p(\partial_{j_{-1}}\cdots\partial_{jp}\nabla F_d,\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_{-1}} v_n^{j_{-1}},\cdots,\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{\mu_p} v_n^{j_p})\end{aligned}$$

avec $C^k_{\tilde\mu_p}\le\frac{(k+1-p)!}{\tilde\mu_p!}$.

Dès lors, il suffit de vérifier que les noyaux $\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_p}\nabla F_d$ se conforment aux exigences de la définition 1.2 et de la proposition 1.3, et on démontre par récurrence sur k les estimations suivantes, où C est une constante “absolue” :

Estimations

- Cas de la dimension 2 (Théorème B)

pour tout $T>0$, pour tout $\varepsilon<\frac{1}{k+1}$,

$$(1.9)_k \qquad \|(\frac{D_n}{Dt})^k v_n\|_{L^\infty([0,T],C^{1-(k+1)\varepsilon})}\le(\frac{C}{\varepsilon})^k\frac{k!}{(k+1)^2}\|v_n\|^{k+1}_{L^\infty([0,T],C^1_*)}\ .$$

- Cas de la dimension quelconque (Théorème A)

Pour tout $T<T^*$,

$$(1.10)_k \qquad \|(\frac{D_n}{Dt})^k v_n\|_{L^\infty([0,T],C^r)}\le C^k\frac{k!}{(k+1)^2}\|v_n\|^{k+1}_{L^\infty([0,T],C^r)}\ .$$

Les affirmations (i) des théorèmes A et B se déduisent alors facilement de ces estimations en utilisant le fait que

$$\partial_t\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^k v_n=-v_n.\nabla\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^k v_n+\left(\frac{Dn}{Dt}\right)^{k+1} v_n$$

et que, **la divergence de v_n étant nulle,** $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{Dn}{Dt}\right)^j v_n = \left(\frac{D}{Dt}\right)^j v$ dans $\mathcal{D}'([0,T]\times\mathbf{R}^d)$.

Les affirmations (ii) des théorèmes A et B se montrent, quant à elles, facilement par récurrence à l'aide des points (i).

2. Front d'onde

On va maintenant illustrer les théorèmes A et B en termes de localisation du front d'onde analytique ou Gevrey des composantes de la vitesse v solution de (E_{inc}).

On rappelle tout d'abord la définition suivante (voir [5]).

Définition 2.1.— *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $s \in [1,+\infty[$. On appelle front d'onde Gevrey s (analytique si $s = 1$) de u, noté $WF_s u$, le complémentaire dans $\mathbf{R}^d \times (\mathbf{R}^d\backslash 0)$ de l'ensemble des (x_0,ξ_0) tels qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0, un voisinage conique Γ de ξ_0 et une suite bornée (u_N) de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ égale à u dans $\mathcal{U}$ et vérifiant*

$$(2.1)\qquad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C\left(\frac{C(N+1)^s}{|\xi|}\right)^N \text{ pour tout } \xi \in V \text{ et tout } N \in \mathbf{N}^* .$$

Remarque : On peut considérer $u_N = \chi_N u$ où (χ_N) est une suite de fonctions $C_0^\infty(K)$ valant 1 sur $\mathcal{U}$ et vérifiant

$$(2.2)\qquad |\partial^{\alpha+\beta}\chi_N| \leq C_\alpha (C_\alpha N)^{|\beta|} \text{ pour tout } \alpha \text{ et } |\beta| \leq N .$$

On va démontrer le résultat général suivant :

Théorème 2.2.— *Soit $Z = (Z_1,\cdots,Z_d)$ un champ de vecteurs dont les coefficients sont continus, et on note $\mathcal{Z}(x,\partial) = \sum_{i=1}^{d} Z_i(x)\partial_i$.*

Soit u une fonction L^∞. On fait les hypothèses suivantes :

(i) il existe une suite (Z_n) de champs de vecteurs C^∞ telle que $\lim_{n\to+\infty} Z_n = Z$ dans L^∞, et une suite (u_n) de fonctions C^∞ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ dans L^∞ ;

(ii) il existe deux constantes C_0 et C_1, et $s \geq 1$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} ||\mathcal{Z}_n^k(Z_{i,n})||_{L^\infty} &\leq C_0 C_1^k (k!)^s, \quad i = 1,\cdots d,\\ ||\mathcal{Z}_n^k(\text{div } \mathcal{Z}_n)||_{L^\infty} &\leq C_0 C_1^k (k!)^s,\\ ||\mathcal{Z}_n^k(u_n)||_{L^\infty} &\leq C_0 C_1^k (k!)^s . \end{aligned}$$

Alors $WF_s u \subset \{(x,\xi) \in T^*\mathbf{R}^d\backslash 0 / \sum_{i=1}^{d} Z_i(x)\xi_i = 0\}$.

Remarques 2.3

• **Dans le cas du système d'Euler incompressible (E_{inc}), vue la nullité de la divergence de la solution v, les estimations (ii) du théorème 2.2 ne sont autres que les estimations (1.9) et (1.10).**

• **Dans le cas d'une équation quasilinéaire**

$$(Q) \qquad \partial_t u + \sum_{i=1}^{d} Z_i(x,u)\partial_i u + Z_0(x,u) = 0 \ ,$$

où les Z_i sont analytiques en (x,u) (pour $i = 0,\cdots,d$), le front d'onde analytique d'une solution C^1 de (Q) est inclus dans la variété caractéristique $\{(t,x,\tau,\xi)/\tau + (\mathcal{Z}(x,u(x))/\xi) = 0\}$.

En effet, on régularise la donnée initiale u_0 et on obtient une suite (u_n) de solutions C^∞ associée aux données initiales régularisées. En dérivant l'équation (Q) (comme on l'a fait pour le système d'Euler), on obtient des estimations de type analytique pour la norme Lipschitz de $P_n^k(u_n)$ où $P = \partial_t + \mathcal{Z}(x,u,\partial)$. L'estimation de la norme L^∞ de P_n^k (div $\mathcal{Z}_n$) s'obtient alors gratuitement à l'aide de la précédente et de la formule de récurrence :

$$P_n^k\ (\operatorname{div} \mathcal{Z}_n) = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \sum_{i_0+..+i_p=k-p} C_{i_0..i_pk}(p+1)! \sum_{j_0,\cdots,j_p=1}^{d} \partial_{j_p} P^{i_p} Z_{j_{p-1}}..\partial_{j_0} P^{i_0} Z_{j_p}$$

où

$$C_{i_0\cdots i_pk} \leq \frac{(k+1-p)!}{i_0!\cdots i_p!}.$$

Et on retrouve dans ce cas, de manière simple, le résultat d'Hanges et Trêves (voir [4]).

Preuve du théorème 2.2 : Soit $(x_0,\xi_0) \in T^*\mathbf{R}^d\backslash 0$ tel que $\mathcal{Z}(x_0,\xi_0) \neq 0$ où $\mathcal{Z}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{d} Z_i(x)\xi_i$ est le symbole de $\mathcal{Z}(x,D)$.

On désigne par K un voisinage compact de x_0 et V un voisinage conique fermé de ξ_0, tels que $|\mathcal{Z}_n(x,\xi)| \geq C|\xi|$ dans $K \times V$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et C une constante indépendante de n.Dans la suite, on travaille avec Z_n et u_n qu'on note, pour simplifier, Z et u. Il s'agit d'estimer $|\hat{u}_N(\xi)|$ pour $\xi \in V$ avec $u_N = \chi_N u$.

$$\begin{aligned}
\hat{u}_N(\xi) &= \int e^{-ix\xi}\chi_N(x)u(x)dx \\
&= -\int \mathcal{Z}(x,D)(e^{-ix\xi})\frac{\chi_N(x)u(x)}{\mathcal{Z}(x,\xi)}dx \\
&= -\int e^{-ix\xi}\ {}^t\mathcal{Z}(x,D)\left(\frac{\chi_N(x)u(x)}{\mathcal{Z}(x,\xi)}\right)dx \ .
\end{aligned}$$

On effectue de la sorte N intégrations par parties et on obtient

$$\hat{u}_N(\xi) = \int e^{-ix\xi} R^N(x,\xi,D)(\chi_N(x)u(x))dx \ ,$$

avec

$$R(x,\xi,D)W = -{}^t\mathcal{Z}(x,\partial)\left(\frac{1}{\mathcal{Z}(x,\xi)}W(x)\right)$$

et

$$-{}^t\mathcal{Z}(x,D) = \mathcal{Z}(x,D) + i \text{ div } \mathcal{Z} \ .$$

On montre alors par récurrence sur j que

$$(2.4)_j \qquad R^j(W) = \sum_{|\tilde{\mu}_j|+|\tilde{\mu}_n|+n+q=j} C^{n,q}_{\mu,\nu,j} \mathcal{Z}^{\tilde{\mu}_n}(\text{div } Z) \quad \mathcal{Z}^{\tilde{\mu}_j}\left(\frac{1}{\mathcal{Z}(x,\xi)}\right)\mathcal{Z}^q(W) \ ,$$

avec

$$C^{n,q}_{\mu,\nu,j} \leq \frac{j!}{\tilde{\mu}_j!\tilde{\mu}_n!n!q!} \ .$$

D'autre part, toujours par récurrence sur j, on montre que

$$(2.5)_j \qquad \mathcal{Z}^j(\chi_N) = \sum_{q=1}^{j} \sum_{|\tilde{\mu}_q|=j-q} C^j_{\tilde{\mu}_q} \sum_{j_1\cdots j_q=1}^{d} \prod_{i=1}^{q} \mathcal{Z}^{\mu_i}(Z_{j_i})\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_q}\chi_N$$

avec, comme dans (1.8), $C^j_{\tilde{\mu}_q} \leq \frac{(j+1-q)!}{\tilde{\mu}_q!}$.

L'estimation (2.2) donne

$$|\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_q}\chi_N| \leq C_0(C_0N)^q \leq C_0e^N C_0^q q! \quad \text{pour } q \leq N$$

car $N^q/q! \leq e^N$. On déduit de $(2.5)_j$ et des estimations (2.3) du théorème 2.2 l'existence d'une constante C assez grande et indépendante de N telle que,

$$(2.6)_j \qquad \text{pour tout } j \leq N, \quad ||\mathcal{Z}^j(\chi_N)||_{L^\infty} \leq C^{j+1}e^N(j!)^s \ .$$

Il suffit maintenant de remarquer que, dans $(2.4)_j$, le terme $\mathcal{Z}^{\tilde{\mu}_N}(\frac{1}{\mathcal{Z}(x,\xi)})$ est homogène en ξ de degré $-N$. La formule de Leibniz assure d'autre part, que

$$(2.7) \qquad ||\mathcal{Z}^j(\frac{1}{\mathcal{Z}(\cdot,\xi)})||_{L^\infty} \leq C^{j+1}\frac{(j!)^s}{(j+1)^2}|\xi|^{-j} \text{ pour tout } j \in \mathbf{N} \ .$$

Cette estimation est montrée par récurrence sur j en utilisant (2.3). On réunit $(2.4)_j$, $(2.6)_j$, (2.3) et (2.7) pour prouver l'existence d'une constante C indépendante de N et ξ telle que

$$||R^N(x,\xi,D)(\chi_N u)||_{L^\infty} \leq C(C|\xi|^{-1})^N(N!)^s \ ,$$

et finalement

$$|\widehat{\chi_N u}(\xi)| \leq C(C|\xi|^{-1})^N (N!)^s \ .$$

Cette dernière estimation est donc vérifiée par les fonctions u_n avec une constante C ne dépendant que des constantes C_0 et C_1, et des voisinages K et V. Elle est donc aussi vérifiée par la fonction bornée $u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. ■

Références

[1] S. Alinhac, P. Gérard - *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Orsay Publications (1989).

[2] J.Y. Chemin - *Régularité des trajectoires d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace*, J. Math. Pures et Appliquées (1992).

[3] J.Y. Chemin - *Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel*, Inventiones, Math. **103** (1991), 599-629.

[4] N. Hanges, F. Treves - *On the analyticity of solutions of first* order nonlinear PDE (1991).

[5] L. Hörmander - *The analysis of linear PDO*, T.I.

[6] L. Lichtenstein, Uber einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogenerunzusammendrückbarer, reibunggsloser Flüssigkeiten und die Helmoltzochen Wirbelsatze, *Mathematische Zeitschrift*, **23**, 1925, pages 89-154 ; **26**, 1927, pages 196-323 ; **28**, 1928, pages 387-415 et **32**, 1930, pages 608-725.

[7] P. Serfati - Thèse de doctorat (Chap.III et Chap.IV A), Université Paris VI, septembre 1992.

Centre de Mathématiques

Ecole Polytechnique

91128 - Palaiseau cedex